





Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXI. Jahrgang 1901.

München.
Verlag der k. Akademie.
1902.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Uebersicht

des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXXI Jahrgang 1901.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 5. Januar 1901. Seite

Sitzung vom 9. Februar 1901.

Sitzung vom 2. März 1901.

Oeffentliche Sitzung zur Feier des 80. Geburtstages Seiner Königlichen Hoheit des Prinzregenten, sowie des 142. Stiftungstages der Akademie am 13. März 1901.

Sitzung vom 4. Mai 1901.

Sitzung vom 8. Juni 1901.

Sitzung vom 6. Juli 1901.

Sitzung vom 9. November 1901.

Seite

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 16. November 1901.

Sitzung vom 7. Dezember 1901.

---

*

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 5. Januar 1901.

1. Herr R. Hartig theilt die Ergebnisse seiner Untersuchungen: „Ueber den Einfluss der Schwerkraft auf den Bau des Fichtenholzes“ mit. Dieselben werden anderweit zur Veröffentlichung gelangen.

2. Herr S. Günther hält einen Vortrag über eine umfassende Untersuchung: „Geographisch-akustische Probleme.“

3. Herr E. Selenka macht eine Mittheilung: „Ueber die Placentaranlage des Lutung (Semnopithecus pruinosus, von Borneo).“



Placentaranlage des Lutung
(Semnopithecus pruinosus, von Borneo).

Von **Emil Selenka.**

(*Eingelaufen 5. Januar.*)

(Mit Taf. I u. II.)

Die Keimblasen der Affen und des Menschen unterscheiden sich ganz auffallend von denen der übrigen Säugetiere durch eine Reihe caenogenetischer Anpassungen.

Wenn es auch nicht leicht gelingen wird, die mechanischen und physiologischen Ursachen festzustellen, welche diese eigentümlichen Sonderbildungen im Primatenkeime hervorgerufen haben, so lässt sich doch die schliessliche Bedeutung und der Wert dieser Anpassungen für die Ernährung der Frucht begreifen.

Um dies Resultat vorweg zu nehmen: Die Anpassungen, welche sowohl Keimblase wie Uterus während der ersten Schwangerschaftswochen aufweisen, haben zur Folge

1) Dass die junge Keimblase alsbald nach ihrer Festheftung schon durch den wertvollsten Stoff, den das Muttertier darzubieten im Stande ist, nämlich durch Blut ernährt wird;

2) Dass der gesamte embryonale wie mütterliche Ernährungsapparat von vornherein in seiner endgültigen Gestalt angelegt wird, und zwar erstens unter Vereinfachung oder Ausschaltung einiger altvererbter provisorischer Vorrichtungen, und zweitens unter Neubildung von Hilfsapparaten. Von provisorischen Nährorganen behauptet allerdings der Dottersack für kurze Zeit seine Rolle als Blut- und Gefässbilder, aber mütter-

licher Nahrungsstoff wird ihm nicht mehr direkt zugeführt, wie dies doch bei Vorläufern der Affen der Fall sein kann.

Die den Primatenkeimen eigenen Neuerungen sind sicherlich zum grossen Teil eingeleitet worden durch die frühzeitige Verwachsung des Eies mit dem Uterusepithel. Zwar sind die jüngsten bisher aufgefundenen Keime des Menschen (das Peters'sche Ei) und der Affen (die hier beschriebene Keimblase) schon zu alt, um die Gestalt, in welcher das Ei sich festsetzte, mit Sicherheit bestimmen zu können; aber die Aehnlichkeit mit solchen Säugetiereiern, welche notorisch schon vor der Gastrulation mit dem Uteringewebe verwachsen, ist so frappant, dass mit grösster Wahrscheinlichkeit auf eine Verwachsung auch des Primaten-Eies mit dem Uterusepithel vor der Bildung des Dotterblatts geschlossen werden muss. Hier können nur neue Beobachtungen das Entwickelungsbild ergänzen und detaillieren. Eine Besprechung dieser Frage findet sich in meinen Studien über „Menschenaffen", zweites und drittes Heft, Wiesbaden, 1899—1900. Die schematische Darstellung der Keimanlage, wie ich mir dieselbe vorstelle, ist in den Figuren 8—12 am Schlusse dieser Mitteilung gegeben.

Die hier abgebildete Keimblase des Lutung giebt nun einige neue Aufschlüsse über die Form und Struktur des jungen Keimes und dessen Hülle, sowie über die frühe Anlage der Placenten.

Die erste Figur stellt den geöffneten und aufgeklappten Uterus in natürlicher Grösse dar. Die ventrale Seite trägt die 1 mm grosse Keimblase, deren Gestalt aus den Abbildungen 2 und 7 zu ersehen ist. Auf der mit dem Uterus innig verwachsenen Fläche erhebt sich eine einzige bereits verästelte Zotte, die ich Zentralzotte nennen will, während der Rand wallförmig vorspringt. Die andere, kuppelförmige Hälfte zeigte sich zum grössten Teil frei und von Uterinschleim umspült; doch muss im lebenden Tiere auch hier schon das Chorion an der gegenüber liegenden Uteruswand festgewachsen gewesen sein, denn in der Mitte der Kuppe macht sich auf Dünnschnitten ein Defekt des Chorion von etwa $^1/_4$ Millimeter Aus-

dehnung nebst Zellenfetzen bemerkbar. Hier riss offenbar beim Eröffnen des Uterus das verwachsene Chorionstück von der Keimblase ab; da dasselbe aber auch von der sekundären Plazenta abgebröckelt ist, wie die Schnitte lehren, so liefert das Präparat leider keine Vorstellung von der Art und Weise der Verwachsung.

Auf der ventralen wie dorsalen Uterus-Innenfläche erhebt sich ein Placentarpolster, entstanden in Folge der Verwachsung der Keimblasenwand mit dem Uterusepithel. Die Polster sind viel ausgedehnter, als die Verwachsungsfläche der Keimblase. —

Nach diesen einleitenden Bemerkungen schreite ich zur genaueren Beschreibung der Keimblase und der Placentarkissen.

Die ganze Keimblase isoliert ist in Figur 2 als Rekonstruktionsbild wiedergegeben.

Folgende Zellschichten sind in der Wand der Keimblase zu erkennen:

1. Das Chorion-Ektoderm, in den Astenden der Zentralzotte mehrschichtig, im Uebrigen einschichtig.

2. Dem Chorionektoderm innen anliegend ein einschichtiges Lager flacher Mesodermzellen, das sich in der Zotte jedoch zu einem lockern Polster verdickt. In der 7. Abbildung ist, soweit es anging, Zelle für Zelle des Schnittes eingetragen. — Mit dem Polstergewebe hängt das Amnionmesoderm direkt zusammen. Diese Verbindungsbrücke verdient die besondere Bezeichnung „Haftstiel“; sie stellt einen Embryophor dar, welcher successive zum Nabelstrang sich umbildet. Eine Zeitlang schwebt der Embryo auf dem Haftstiel frei im Exocoelom. Beiläufig bemerkt, finden sich ähnliche Verhältnisse auch bei Eilingen anderer Säugetiere, z. B. der Wiederkäuer; hier wird in Folge des Amnionschlusses der Embryo nebst seinem Dottersack rings umspült von Flüssigkeit des Exocoeloms und ist zeitweilig allein durch einzelne mesodermale Haftfädchen mit dem Chorion verbunden oder liegt sogar vollständig frei im Exocoelom, bis die Wandung der Allantois sich ausgedehnt hat und mit der Chorionwand zum Allantochorion verschmilzt

(Bonnet, Selenka). — Einen Haftstiel fand Hubrecht am Keime des Tarsius. Die wichtigen Untersuchungen dieses Forschers harren zum grössten Teil noch der Veröffentlichung.

3. Die gesamte Verwachsungsfläche der Keimblase ist überzogen von einer Zellfusion, einem Syncytium. Ed. van Beneden nennt diese Schicht den Plasmodiblast. Die Kerne dieser Plasmodialschicht liegen grösstenteils in einer einzigen Lage (Fig. 7), doch erhebt sich das Syncytium am peripheren Verwachsungsrande der Keimblase sowie auf den Zellenknospen und an den Enden der Zottenäste zu wechselnden Verdickungen. Bei allen von mir geprüften Affenspecies zeigt diese Plasmodialschicht in den jungen Placenten das gleiche Verhalten: sie ist stets deutlich abgegrenzt vom Chorionektoderm, dessen Zellkerne fast durchweg kleiner sind, sie überwuchert den peripheren Verwachsungsrand der Keimblase auf eine kurze Strecke und dokumentiert sich als gewebszerstörendes Element: das erweisen die in den Ausläufern seines Protoplasmas liegenden Kernbrocken und die an seinen Berührungsflächen in Auflösung begriffenen Gefässwände und Bindegewebszellen. Die Herkunft dieses Plasmodiblasts ist weiter unten besprochen.

Ueber den Bau des Keimlings ist nur wenig zu melden. Fig. 3—5 zeigen denselben vom Rücken, von der Seite und von vorne in plastischen Darstellungen, Fig. 7 im Schnitt.

Das Ektoderm des Keimschildes besteht in einer ovalen verdickten Platte, deren hinteres Ende eine schwache Einsenkung, nämlich die Anlage der Primitivrinne, aufweist; vor derselben ist der Schild schwach buckelartig vorgewölbt, in gleicher Art, wie ich dies von etwas älteren Keimschildern des Cercocebus cynomolgus und des Semnopithecus nasicus beschrieben habe.

An den Rändern biegt der Keimschild in das Amnionektoderm über, dessen Zipfel in den Haftstiel sich einsenkt.

Der entodermale Dottersack ist ein winziges Bläschen; sein dorsaler Abschnitt steht direkt mit der Ektodermplatte des Keimschildes in Berührung. Der ungenügende Erhaltungszustand des Präparates verschaffte mir keine sichere Auskunft.

wieweit auch Mesodermzellen zwischen Ektoderm und Dotterblatt eingelagert sind; doch ist das jedenfalls nur in untergeordnetem Grade an der hinteren Hälfte des Keimschildes der Fall.

Von einem neurenterischen Kanal ist noch nichts zu sehen.

Mesoderm überzieht Amnion wie Dottersack als einschichtiges Zellenlager.

Ueber die Struktur des Uterus geben die Dünnschnitte folgende Auskunft.

Rings um die Keimblase erhebt sich ein Wall (Fig. 1 u. 7, W). Vergleicht man diesen mit den jungen Placentaranlagen anderer Affen („Menschenaffen", Seite 189—197), so lässt sich folgendes allgemeine Entwicklungsbild des Placentarwalles ableiten. Zuerst wird das Bindegewebslager unterhalb des Uterusepithels hyperämisch, indem Venen und Kapillaren sich erweitern und auch sich neubilden; es lagert sich Lymphödem zwischen die Bindegewebszellen; das nunmehr durchsaftete Gewebe verdickt sich endlich noch weit stärker infolge der Wucherungen des Uterusepithels, welches seltner in Gestalt von Taschen, meistens von soliden Kolben in die Bindegewebslage hineinwächst, unter stetiger Vergrösserung der Kapillaren. Die taschen- oder kolbenartigen Einwucherungen zerfallen alsbald in Zellencomplexe oder Zellennester, die grossenteils zu Syncytien zusammenschmelzen und dann in ihrer Struktur von der Plasmodialschicht, mit der sie auch stellenweise in Contakt treten, nicht zu unterscheiden sind, während etliche Zellennester in isolierte Zellen zerfallen, um vermutlich zu Decidua-Zellen zu werden.

Die kolbenartigen Gebilde sind jedoch nicht die einzigen Wucherungen des Uterusepithels. Die Epithellage selbst wird unregelmässig mehrschichtig und wandelt sich in eine lockere Decke um, deren Zellen ein sonderbares Aussehen gewähren: die meisten unterscheiden sich zwar nicht von den typischen Epithel- oder den jungen „Nesterzellen", viele aber sind deutlich zwei-, einige sogar dreikernig. Figur 6 zeigt die

häufig wiederkehrende Form dieser offenbar in Umwandlung begriffenen Zellen. Da sie das ganze Placentarkissen bedecken, also auch ganz ausserhalb des Verwachsungsbezirks mit der Keimblase zu finden sind, so liegt der Gedanke nahe, dass sie später mit dem Chorionektoderm verwachsen und einen Ueberzug über dasselbe bilden werden, sobald die Keimblase sich ausdehnt und mit ihnen in Berührung tritt; ich halte dieselben daher für die Mutterzellen des, die Zotten überziehenden Syncytiums (Plastmodiblast). Sowohl die Lage dieser Zellen wie ihre häufige Mehrkernigkeit, ferner der Umstand, dass ihr Protoplasma sich in ganz gleicher Weise überraschend dunkel tingiert wie der Plasmodiblast, reden dieser Deutung das Wort. Nachträglich finde ich auch in meinen älteren Präparaten junger Placentarpolster die Anhäufung des Uterusepithels zu einer lockern Schichte gleicher Struktur, wenn auch weniger mächtig als im vorliegenden Objekte.

Dasselbe Bild geben Schnitte durch das sekundäre Placentarpolster des Lutung. Die Zellen der kolbenförmigen Einwucherungen gehen direkt über in die mehrschichtige äussere Epithelschicht (Fig. 6).

Ist die hier ausgesprochene Deutung richtig, so wären die Syncytienbildungen in der Placenta der Primaten vermutlich alle auf das Uterusepithel zurückzuführen! Denn die verbreitete Ansicht, dass die verschiedenartigsten Gewebe des Uterus syncytialen Bau während der Schwangerschaft annehmen können, habe ich in meinen Präparaten nicht bestätigt gefunden.

Kollmann[1]) hat unlängst die Herkunft des Plasmodiblasts aus dem Chorionektoderm dargelegt. Ich möchte vermuten, dass die Präparate dieses Forschers nicht genügend gut conserviert waren, um eine so subtile histogenetische Frage zur Entscheidung zu bringen.

Der intervillöse Raum ist in allen bisher von mir beobachteten jungen Placentaranlagen mit hellem Gerinsel erfüllt,

[1]) J. Kollmann, Ueber die Entwickelung der Placenta bei den Makaken, mit 6 Figuren; in: Anatomischer Anzeiger, XVII, Nr. 24 u. 25.

in welchem stets vorgefunden wurden: 1) Blutkörper der Mutter. 2) Zerfallprodukte mütterlicher Zellen, zumal vereinzelte aufgeblähte Kerne. 3) in allen Richtungen ziehende, anfangs zahlreiche. in älteren Anlagen spärliche Balken von Syncytien.

Begrenzt wird der intervillöse oder Zwischenzotten-Raum 1) vom Plasmodiblast der Zotten, der in allen meinen Präparaten ein geschlossenes Lager bildet. 2) von Syncytien der Nesterzellen, die sich anfänglich und zeitweilig zu einer, lediglich von Muttergefässen durchbrochenen, soliden Platte vereinigen können („Menschenaffen, Seite 197, Sy'): 3) von Bindegewebszellen, falls die Syncytialplatte nicht ausgebildet ist, und 4) hie und da von Wandungen einiger erweiterter Venen oder Kapillaren, deren Endothel in nächster Nähe der Placenta vielfach. aber nicht immer, zu kubischen oder cylindrischen Zellen aufgequollen erscheint; letztere Erscheinung hat zu der irrigen Ansicht geführt, dass die Gefässendothelien sich in Deciduazellen umwandeln; die nähere Beschreibung dieser Verhältnisse wird in einer der nächsten Lieferungen der „Menschenaffen" von meinem Mitarbeiter. Herrn Dr. Ludwig Neumayer gegeben werden. — Ausdrücklich sei hervorgehoben, dass eine geschlossene Endothelmembran nimmermehr den Plasmodiblast überdeckt, wenigstens weder bei jungen Placentaranlagen des Menschen noch der Affen. Dennoch haben Waldeyer und Winkler recht, dass solche Membranen vorkommen: jedoch ist das dann nur in ganz beschränkter Ausdehnung und ausschliesslich nahe den Zottenenden der Fall. Hier erscheinen die Membranen als die offenen, der Resorption noch harrenden Mündungsstücke der erweiterten Venen! Also auch R. Virchow behält Recht, dass der intervillöse Raum kein erweiterter Gefässraum sei, dass vielmehr das Mutterblut frei zwischen den Zotten cirkuliere, eine Ansicht, welcher auch Kollmann beipflichtet.

Ueber die Entstehung des intervillösen Raumes habe ich aus Schnittserien verschiedener junger Placentaranlagen dieses Resultat gewonnen. In den anfangs mit Lymphödem erfüllten Intercellularraum des Uterus drängen sich erweiternde Kapillaren

ein und ergiessen in denselben mütterliches Blut, nachdem ihre Wandungen durch syncytiale Zellennester oder den Plasmodiblast, die ich beide für identische Gebilde halte, zerstört wurden.

An dem allgemeinen Geschäfte der Einschmelzung des Muttergewebes behufs Schaffung von Platz für die vordringenden Zotten beteiligen sich in untergeordnetem Grade auch mütterliche Leucocyten. Man findet dieselben in Zwei- und Vierteilung begriffen sehr häufig zwischen den Bindegewebszellen liegend, zumal in Placenten der 2. bis 3. Woche.

Da der, in den intervillösen Raum mündenden Arterien nur wenige sind, hingegen der das Blut abführenden Venen viele, so muss notwendig eine Stauung oder Stagnation der intervillösen Flüssigkeit eintreten. Eine flotte ergiebige Durchströmung des Zwischenzottenraumes mit Mutterblut wird erst etwa in der dritten Woche der Schwangerschaft Platz greifen.

Zum Schlusse seien die heterochronischen Verschiebungen, welche die Anlagen der ersten embryonalen Organe der Primaten erleiden, übersichtlich zusammengestellt.

A. Beschleunigung der Entwicklung erfahren folgende Gebilde:

1. Der Trophoblast (Hubrecht), d. h. das mit dem Uterus verwachsende Chorionektoderm. Durch die, wahrscheinlich schon vor der Gastrulation sich vollziehende Verwachsung werden die formativen Schildzellen (welche Keimschild, Amnion und Primitivstreif aufzubauen haben), ins Ei-Innere geschoben und veranlasst, sich von den Trophoblastzellen (Rauber'schen Zellen) abzuschnüren. In Folge davon erscheinen auffallend frühzeitig

2. das abgeschnürte Amnion und die Amnionhöhle.

3. Sehr frühzeitig entwickelt sich ferner der Mesoblasts, jedoch nur in seinen ausserembryonalen Partien; denn im Bereiche des Keimschildes ist seine Ausbildung verlangsamt.

4. Sehr früh entsteht die erste Zotte, die Zentralzotte. Dies gilt wohl für sämtliche Schwanzaffen, ob auch für die Menschenaffen, steht noch in Frage. Etwa eine Woche lang oder noch etwas länger unterscheidet sich die Zentralzotte durch

ihre Grösse und reiche Verästelung von den alsbald nachsprossenden Zotten, bis letztere die Zentralzotte in ihrem Wachstum einholen. In der Wurzel der Zentralzotte ist stets der Keim gelegen, ein Hinweis, dass hier die Verlötung des Eies mit dem Uterus begann.

5. Die Vascularisierung des Dottersacks, d. h. die Entstehung von Gefässendothelien und Blutkörpern als Mesodermgebilden, beginnt schon vor Anlage der Medullarwülste, erscheint daher ebenfalls sehr früh. — In der hier abgebildeten Keimblase ist allerdings von Gefässen noch nichts zu bemerken; sie ist noch zu jung.

B. Verlangsamt erscheint dagegen, wie dies zumal ältere Keimblasen lehren, die Differenzierung des Keimschildes, nämlich die Anlage

1. des Primitivstreifs und der aus ihm hervorgehenden Gebilde: Urdarm, Chorda, Urwirbelblastem,
2. des Canalis neurentericus,
3. der Medullarwülste.

Man kann sich denken, wenn schon diese Vorstellung nicht ganz den Nagel auf den Kopf treffen dürfte, dass die Keimscheibe nach ihrer Losschnürung vom Trophoblasten allzuwenig Zellen enthalte, um die typische Differenzierung zu Stande zu bringen; es muss ihr sozusagen Zeit gelassen werden, ihre Bausteine genügend zu vermehren.

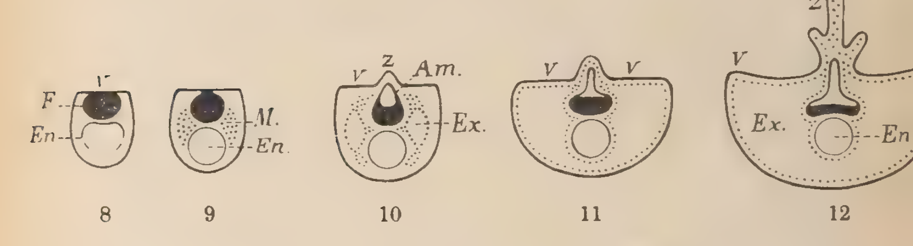
C. Reduktion der Gestalt erfährt die Allantois, indem sie nur zur kurzen schlauchförmigen Röhre auswächst, deren mesodermale Hülle jedoch an ihrem Blindende zu einem Gefässpolster sich ausbreitet, das in alle Zotten eindringt.

D. Als Neubildung ist der mesodermale Amnionstiel aufzufassen. Er verdickt sich als „Haftstiel“ bald zusehends und nimmt den Allantoisschlauch wie die Gefässe in sich auf. Hierdurch wird er zum Träger des Embryos. Der Gang seiner Umbildung lässt sich kurz durch folgende Schlagworte kennzeichnen: dünner mesodermaler Amnion- oder Rückenstiel — durch Verdickung des Mesodermgewebes wird er zum voluminösen Haftstiel — durch allmähliche, ventral gerichtete Dreh-

ung des Keimschildes um 90° wird er zum Schwanzstiel, indem er zugleich den Allantoisschlauch und die Dottergefässe in sein Polstergewebe aufnimmt — durch fortgesetzte Drehung des Eilings um 90° wird der Schwanzstiel zum Bauchstiel (His) — und endlich nach Bildung des Körpernabels, in welchen Allantoisstiel, Dottergang nebst Gefässen eingelagert werden und auf dessen Aussenfläche das Amnion sich festlegt, zum Nabelstrang.

Die Figuren 7 bis 11 geben Aufschluss über die Verlagerung des Keimes in das Ei-Innere oder die „Entypie des Keimfeldes", wie sie bei den Keimen der Schwanzaffen wahrscheinlich sich vollzieht.

Fig. 8 bis 12.



Schematische Darstellung der mutmasslichen Bildung des Amnion bei Affe und Mensch.

Dicke Umrisslinie = Chronionektoderm,
dünne Kreislinie = Dotterblatt,
punktiert = Mesoderm,

Am Amnion,
En Dottersack,
Ex Exocoelom,
F formative Keimschildzellen, welche sich vermutlich als kugliges Gebilde abschnüren und aus denen das Ektoderm des Amnion und des Keimschildes sowie der Primitivstreif hervorgehen.
M Mesoblast,
v Verwachsungsfläche des Eies mit dem Uterusepithel,
z die bei den Schwanzaffen zuerst gebildete Zentralzotte.

Erklärung zu Tafel I.

Fig. 1—6. Semnopithecus pruinosus, von Borneo.

Fig. 1. Der geöffnete Uterus in nat. Gr.
d dorsale Hälfte,
K das Keimbläschen,
N Narbe auf dem rechten Ovarium,
s Anlage der sekundären Placenta,
v ventrale Hälfte,
w Wallartige Erhebung der Uterinschleimhaut, in deren Mitte die 1 Millimeter grosse Keimblase liegt.

Fig. 2. Die Keimblase isoliert. $^{50}/_{1}$. Rekonstruktionsbild. In der Wurzel der „Zentralzotte“ ist der Keim bemerkbar.

Fig. 3—5. Der Keim, isoliert. Rekonstruktionsbild in 200 facher Vergrösserung.

Fig. 3. Der Keimschild von oben gesehen; Amnion weggelassen. Die Primitivrinne ist schwach angedeutet.

Fig. 4. Derselbe im Profil. — *Am* Amnionstiel, dessen Zipfel in das Mesenchympolster der Zotte übergeht. Vergl. Figur 7.

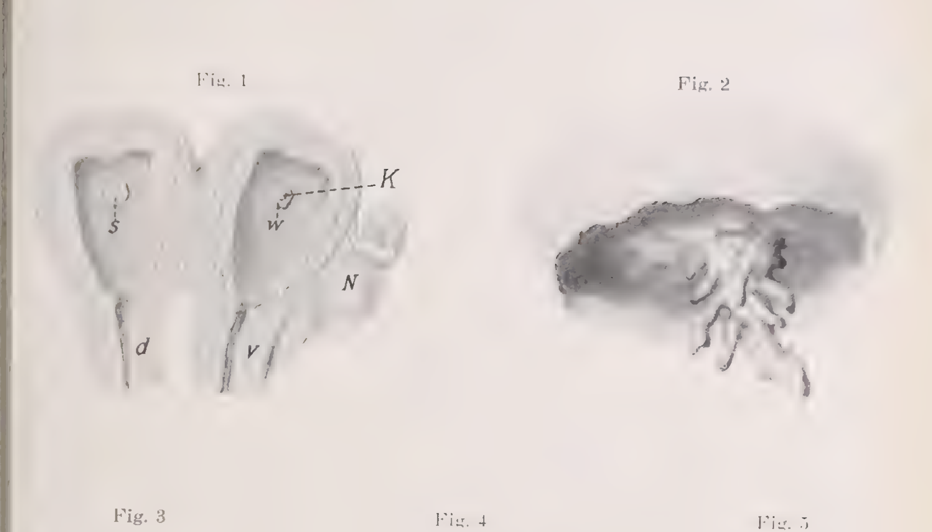
Fig. 5. Derselbe von vorn.

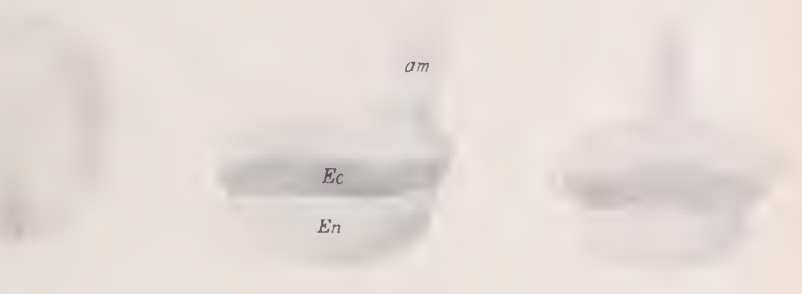
Fig. 6. Schnitt durch das wuchernde Uterusepithel des sekundären Placentarkissens, Randpartie. Vergr. ca. 600. Camera.
B Bindegewebszellen,
C Capillaren,
C U Cavum uteri,
K Kolbenförmige Einwucherung des Uterusepithels, später in Zellennester zerfallend,
N Zone der Nesterzellen,
Ue Zone des geschichteten Uterusepithels.

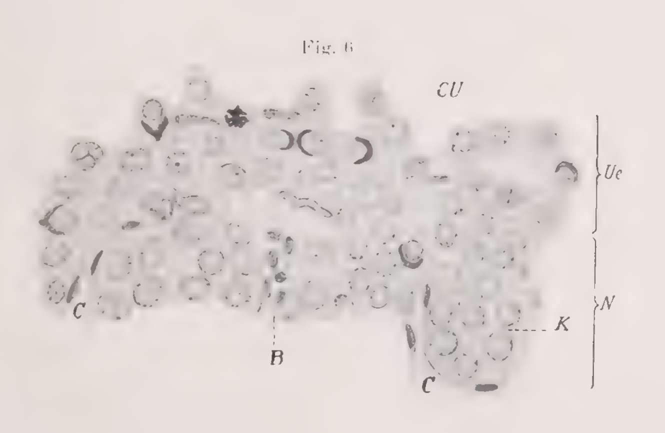
Erklärung zu Tafel II.

Fig. 7. Keimblase des Semnopithecus pruinosus nebst Umgebung. im Schnitt. $^{130}/_{1}$. Camera.

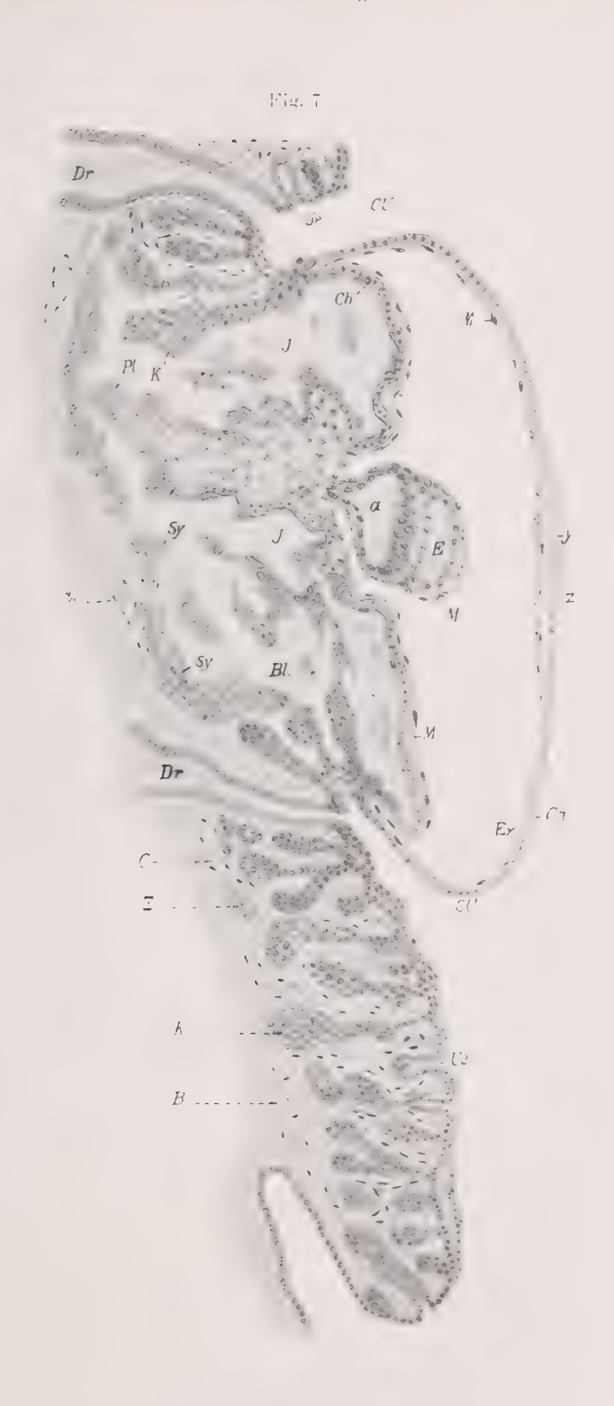
a Amnionhöhle,
B Bindegewebe,
Bl mütterliche Blutkörper,
C erweiterte Capillare,
Ca Capillare, in den intervillösen Raum sich öffnend,
Ch Chorionektoderm,
C U Cavum uteri,
Dr Drüsengang,
E Dottersack,
Ex Exocoelom,
I intervillöser Raum, mit Mutterblut gefüllt,
K kolbenförmige Wucherungen des Uterusepithels, später in Zellennester zerfallend,
M Mesoderm,
Pl Plasmodiblast (van Beneden), Plasmodialschicht,
Sy Syncytium, aus Zellennestern entstanden,
Ue taschenartige Einsenkungen des Uterusepithels,
y ein vom sekundären Placentarpolster abgerissener Teil des Chorion,
Z Zellennester.


Fig. 1
K
s
w
N
d
v
Fig. 2


Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
am
Ec
En


Fig. 6
CU
Ue
N
K
C
B
C




Fig. 7
Dr
Ch
J
Pl
K
a
Sy
J
E
M
Sy
Bl.
M
Dr
A
B



Akustisch-Geographische Probleme.

Von **S. Günther.**

(Eingelaufen 5. Januar.)

Wie bereits an anderer Stelle[1]) bemerkt wurde, muss als derjenige Teil der allgemeinen Physik, der mit der physikalischen Erdkunde die mindest lebhaften Beziehungen unterhält, die Lehre vom Schalle bezeichnet werden. Es wurde aber an jenem Orte zugleich betont, dass doch in neuerer Zeit eine ganze Anzahl von Fragen hervorgetreten ist, welche gleichmässig den Geographen und den Akustiker interessieren. Die bis zu einem gewissen Grade vielleicht auch einzubeziehende Fortpflanzung des Schalles unter verschiedenen äusseren Bedingungen soll hier ausgeschlossen bleiben, weil Untersuchungen der letzten Jahrzehnte hierüber eine vollständige Klärung gebracht haben, und ebenso soll von der vielgestaltigen Erscheinung des Echos nicht weiter die Rede sein, obwohl dieselbe, wie man u. a. von Hirn[2]) und von v. Fischer-Benzon[3]) erfahren hat, noch manches Rätsel aufgibt. Unser Zweck ist es vielmehr, das gesamte Material, welches sich bezüglich der, wenn der Ausdruck gestattet ist, spontanen Schallphaenomene nach und nach angesammelt hat, kritisch zu würdigen und deren Erklärung, soweit möglich, zu erbringen oder doch,

---

[1]) Günther, Handbuch der Geophysik, 2. Band, Stuttgart 1899, S. 41.

[2]) Hirn, Les échos multiples, Mondes, 2. Serie, 36. Band, S. 266 ff.

[3]) v. Fischer-Benzon, Das tönende Echo, Zeitschrift für physikalischen Unterricht, 1. Band, S. 116 ff.

falls es noch zu sehr an empirischen Daten fehlt, vorzubereiten. Mit dem Worte „spontan“ soll angedeutet werden, dass eine Ursache dieser Lufterschütterungen, die bald als blosses Geräusch, bald auch als eigentliche Klänge und sogar unter der Gestalt musikalischer Tonfolgen auftreten, zunächst nicht erkennbar ist, und eben die Aufsuchung dieser Ursachen erscheint als eine Pflicht, welcher bisher nur in sehr beschränktem Masse genügt werden konnte. Wie schon bemerkt, fehlt noch viel, dass man heute schon soweit wäre, die gewünschte Abhilfe vollständig zu erbringen, und ehe eine solche erhofft werden kann, muss eben die Analyse der Erfahrungsthatsachen weiter fortgeschritten sein, als dies zur Zeit der Fall ist.

Man wird sich nicht darüber wundern können, dass Vorkommnisse dieser Art, namentlich in früherer Zeit, abenteuerliche und mystische Deutung gefunden haben; dass aber auch noch viel später selbst in naturwissenschaftlichen Kreisen der Aberglaube den Weg der exakten Forschung kreuzte, liesse sich an mancherlei Belegen nachweisen.[1]) In manchen Fällen kommt die Tier- und Pflanzenwelt bei diesen Tönen als massgebender Faktor in betracht; die hierher gehörigen Objekte sollen uns nicht weiter beschäftigen, und es reicht hin, ihrer in einer Randnote[2]) Erwähnung zu thun. Dass der in einer

[1]) Ein drastischer Beleg ist beispielsweise ein von grosser Gelehrsamkeit zeugender Aufsatz, den der Mediziner v. Autenrieth veröffentlichte (Ueber Stimmen in der Höhe, Morgenblatt für gebildete Stände, 1827, Nr. 297—306), der für solche spontane Töne zwar nicht direkt, aber doch in einiger Umschreibung, das Hereinragen höherer Gewalten in unser Erdenleben in anspruch nimmt.

[2]) Dahin gehört z. B. das berüchtigte Geschrei, das mehrere Reisende zur Nachtzeit auf der Insel Ceylon gehört haben wollten, und das nach J. Davy (An Account of the Interior of Ceylon, London 1821) thatsächlich von einem allerdings seltenen Vogel, dem „Ulama“ (Teufelsvogel) herrührt. Einen eigentümlich musikalischen Baum hat Schweinfurth (Im Herzen von Afrika, 1. Teil, Leipzig-London 1874, S. 105) im obersten Nilgebiete angetroffen. Die Dornen der Flötenakazie werden durch Insektenstiche zu unförmlichen, zahlreiche Oeffnungen aufweisenden Missgebilden aufgetrieben, und wenn der Wind durch diese Löcher dringt,

falschen, anthropomorphistischen Auffassung erzogene Mensch vergangener Jahrhunderte aus diffusen Geräuschen alles mögliche und unmögliche herauslesen zu können vermeinte, darf uns nicht wunder nehmen. Wer sich mit der Geschichte der Erd- und Naturkunde im Mittelalter und auch noch in den folgenden Jahrhunderten abgegeben hat, wird nicht in Verlegenheit sein, diese Behauptung durch Beispiele zu stützen,[1]) und auch das XIX. Jahrhundert ist an Rückfällen in eine

so erhält der in der Nähe des Baumes Befindliche den Eindruck, als ob aus jenem Flötentöne hervorkämen. Und wenn viele solche Bäume neben einander stehen, so erhebt sich ein Flöten und Pfeifen, wie von tausend Stimmen. Dadurch, dass Schweinfurth einen „Schoffar"-Hain — dies ist die Benennung von Acacia fistulosa bei den Schilluk-Negern — in der Nähe von Kairo anlegen liess, ist das Studium dieser immerhin merkwürdigen Schallerscheinung wesentlich erleichtert worden.

[1]) Derjenige Teil der damals bekannten Erde, der von düsteren Sagen und Vorstellungen besonders heimgesucht ward, ist ohne Zweifel Island. Darauf hatte bereits K. v. Maurer (Zur Volkskunde Islands. Zeitschrift des Vereins für Volkskunde, 1891, S. 42) aufmerksam gemacht, und neuerdings hat Thoroddsen in seinem verdienstlichen Werke (Geschichte der isländischen Geographie, deutsch von A. Gebhardt, 1. Band, Leipzig 1897) die einschlägigen, für uns hier besonders wichtigen Momente zusammengestellt. Von den im Treibeise heulenden Stimmen der verdammten Seelen weiss schon Saxo Grammaticus, der bekannte dänische Historiker und Geograph des XII. Jahrhunderts, zu erzählen (a. a. O., S. 61). Hier war es also das allerdings schreckhafte Getöse der sich an einander reibenden Treibschollen, welches in der angegebenen Weise umgedeutet wurde, aber auch die Stimmen der im Fegefeuer Schmachtenden glaubte man in dem Brüllen der isländischen Vulkane zu vernehmen (K. v. Maurer, Die Hölle auf Island, Zeitschrift etc., 1894, S. 256 ff.) zu vernehmen. Die deutschen Beschreiber Jakob Ziegler und Sebastian Münster nahmen dergleichen bereitwillig hin. Sogar noch gegen Ende des XVI. Jahrhunderts ist der Wittenberger Mathematiker Peucer von den „schluchzenden" Stimmen überzeugt, die aus der Tiefe des Hekla-Kraters kommen (Thoroddsen, S. 142); ja künftige Kriege sollen sich sogar durch den Lärm im Inneren jenes Feuerberges voraus ankündigen. Es dauerte bis tief ins XVII. Jahrhundert hinein, ehe Island seiner Eigenschaft als klassisches Land geographischer Fabuliererei, hauptsächlich dank den Bestrebungen höher gebildeter Volksgenossen, ganz entkleidet wurde.

solche Denkweise nicht arm.[1]) Wir werden noch zum öfteren Veranlassung haben, darauf hinzuweisen, dass auf diesem, wie auf manchem anderen Gebiete die objektive Betrachtung der Dinge erst ganz allmählich zu ihrem Rechte gelangt ist.

Prüft man die einzelnen Vorkommnisse, wie sie uns beschrieben werden, genauer, so gewinnt man die Ueberzeugung, dass sich dieselben wesentlich in drei Gruppen sondern lassen. An der Spitze stehen diejenigen Geräusche und Klänge, welche bei der Bewegung lockerer Gesteinsfragmente entweder unmittelbar entstehen oder doch mit solchen in ursächliche Verbindung gebracht werden können. Der tönende Sand, um die übliche Bezeichnung zu gebrauchen, hat schon wiederholt zu Erörterungen Anlass gegeben, während freilich eine zusammenfassende Behandlung dessen, was man von der Sache weiss, noch vermisst wird. Weiterhin haben eigentümliche Töne und Tonverbindungen an die Reihe zu kommen, welche man ausschliesslich im Bereiche einzelner Oertlichkeiten von genauer geographischer Abgrenzung zu hören Gelegenheit hat, deren auslösender Grund mithin notwendig in lokalen oder doch regionalen Verhältnissen gesucht werden muss, welche es bestimmten physikalischen Gesetzen ermöglichen, sich in einer sonst minder leicht zu beobachtenden Weise zu bethätigen. Zum dritten endlich sind die abrupten Lufterschütterungen namhaft zu machen, welche für gewisse Gegenden und Landstriche charakteristisch zu sein scheinen und, je nachdem, unter den verschiedenartigsten Namen in der Wissenschaft bekannt geworden sind, worüber, wie gleich hier

---

[1]) Einer sehr drastischen Thatsache gedenkt v. Autenrieth am bezeichneten Orte. Der kühne Robbenschläger J. Weddell, der im Jahre 1823 die höchste südliche Breite für sehr lange Zeit erreicht hatte (Fricker, Antarktis, Berlin 1898, S. 43), schilderte die Südlichen Shetland-Inseln als von monströsen Zwittergebilden bewohnt und wollte dort die sonderbarsten Laute gehört haben. Bekanntlich sind ähnliche Behauptungen auch kürzlich wieder aus dem hohen Norden zu uns gedrungen, und auch bei anderen Polarfahrern lässt sich eine gewisse Neigung, in der Einsamkeit Phantasien nachzuleben, nicht verkennen.

hervorgehoben werden möge, eine Abhandlung von L. Weber[1]) die beste Auskunft, die sich überhaupt vorläufig geben lässt, erteilt. Dieser unserer Klassifikation gemäss zerfällt auch die vorliegende Studie ganz von selbst in drei getrennnte Abteilungen.[2])

I. Der tönende Sand.

Wer über Sand wegschreitet, vernimmt sehr leicht ein knirschendes Geräusch. Dass dessen Ursache in der Reibung der Gesteinspartikeln liegt, steht ausser Zweifel, und wenn es also auf solche Weise zur Bildung eines wirklichen Tones kommt, so gehört derselbe unzweifelhaft in die Klasse der sogenannten Reibungstöne, wie sie von Strouhal eingehenderer Untersuchung unterworfen worden sind,[3]) mag auch die Art und Weise, wie dieser Physiker die Reibung wirken liess, von der uns hier interessierenden noch so sehr verschieden sein. Mit Melde[4]) werden wir zunächst besser von Reibungsgeräuschen sprechen, wie sie stets auftreten, wenn die Luft aus einer schmalen Oeffnung zu entweichen genötigt ist. Auf dem Wege der Resonanz kann diese wirre Folge rascher Luftimpulse geregelt werden, so wie dies Tyndall[5]) mit folgenden Worten ausspricht: „Der dünne Luftstrom brandet gegen die scharfe Kante der Oberlippe und bringt da ein schwirrendes Geräusch hervor, aus welchem gewisse Impulse

---

[1]) Leonhard Weber, Ueber die sogenannten Mistpoeffers, Schriften des Naturwissenschaftlichen Vereines für Schleswig-Holstein, 11. Band, S. 66 ff.

[2]) Der Verf. nimmt die Gelegenheit wahr, für sachdienliche Mitteilungen den Herren Prof. Dr. S. Ruge in Dresden, Prof. Dr. O. Lenz in Prag und Dr. H. J. Klein in Köln seinen verbindlichen Dank auszusprechen.

[3]) V. Strouhal, Ueber eine besondere Art der Tonerregung, Annalen der Physik und Chemie (2), 5. Band, S. 216 ff.

[4]) F. Melde, Akustik; Fundamentalerscheinungen und Gesetze einfach tönender Körper, Leipzig 1883, S. 250.

[5]) J. Tyndall, Der Schall, deutsch von H. Helmholtz und G. Wiedemann, Braunschweig 1869, S. 229 ff.

durch die Resonanz der Pfeife verstärkt und in einen Ton verwandelt werden.“ Eine Pfeife im gewöhnlichen Sinne ist nun zwar in unserem Falle nicht vorhanden, wohl aber eine Vielzahl von Pfeifen winzigster Dimensionen. Stellen wir uns nämlich eine Sandfläche vor, wie sie uns etwa in Dünen- und Wüstengebieten entgegentritt, so erscheint dieselbe als ein Aggregat kleiner Körperchen von wesentlich gleicher Grösse und Beschaffenheit, die sich nur locker berühren, so dass überall Luft zwischen ihnen eingeschlossen ist. Der Tritt des Wanderers nähert diese festen Teilchen einander, und die Luft zwischen ihnen wird komprimiert und strömt aus zahllosen Oeffnungen mit relativ grosser Geschwindigkeit aus. Bei schneller Bewegung auf angenähert ebenem Boden ändert der den Luftaustritt bewirkende Anstoss unausgesetzt seinen Platz, und so ist kein Grund zu besonderer Verstärkung der Schrilltöne gegeben, wie sie andererseits platzgreifen muss, wenn eine grössere Partie von Sandkörnern nicht nur vorübergehend, sondern dauernd in Bewegung gesetzt wird, falls etwa eine geneigte Fläche, die ein leichtes Abrutschen der Sandmasse im Gefolge hat, begangen wird. Aus der Natur der Reibungstöne scheint also von vornherein, ohne dass auf eigentliche Erfahrung bezug genommen wird, hervorzugehen, dass ein lebhafteres Tönen des Sandes nur unter gewissen Bedingungen zu erwarten ist, während unter gewöhnlichen Umständen nur leise Geräusche das Ohr treffen, die sehr häufig so wenig intensiv sein werden, dass sie die Aufmerksamkeit kaum zu erregen vermögen. Nicht zu verstehen wäre auch, inwiefern die petrographische Beschaffenheit der Felsmasse, durch deren Verwitterung und Zerfall sich der Sand gebildet hat, auf dessen akustische Eigenschaften einen Einfluss ausüben sollte. Sehen wir nun zu, wie sich mit unseren auf rein physikalischem Wege gewonnenen Leitsätzen das von der geographischen Litteratur gelieferte Material verträgt. Vor allem wird sich zeigen, dass in der That ausschliesslich aus Dünen- und Wüstenländern die einschlägigen Wahrnehmungen stammen.

Beginnen wir mit den ersteren. Wer jemals einen Dünen-

hügel erstiegen, wird sich erinnern, dass es dabei, wenn der Fuss in die lockere Sandmasse einsank, niemals ganz ohne akustische Begleiterscheinungen abging. Ausnahmsweise verstärken sich dieselben, und solche Klangphänomene haben gelegentlich von sich reden gemacht.

Als in den siebziger Jahren L. Meyn mit der geologischen Aufnahme der Insel Sylt beschäftigt war, fesselte ihn der Anblick der stattlichen Uferhöhen, als deren Baustoff sich reiner Kaolinsand herausstellte.[1]) Die Aehnlichkeit desselben mit demjenigen, der ihm früher auf Bornholm zu Gesichte gekommen war, fiel ihm auf; geognostisch sei zunächst zwischen diesen beiden Sanden nicht der geringste Unterschied ausfindig zu machen, und trotzdem sei der Ursprung ein ganz abweichender. Derjenige auf der dänischen Insel sei nämlich der Rest eines zerstörten jurassischen Kohlengebirges. Nur das Gehör lasse anscheinend die Verschiedenheit erkennen. Nach Meyn[2]) gibt der Jurasand Bornholms, zumal bei „schleifender“ Bewegung des darüber hinwandelnden Fusses, einen eigentümlich schrillen Ton von sich, von dem auf Sylt nichts bekannt sein soll. Welchen sanguinischen Hoffnungen sich dieser gewiegte, mit der Feldarbeit ausserordentlich vertraute Forscher hingab, erhellt daraus, dass er den knirschenden Ton zum Range eines leitenden Prinzipes bei stratigraphischen Untersuchungen zu erheben geneigt war.[2]) „Ein Charakter dieser Art und von so grosser Seltenheit kann unter Umständen ein ebenso sicherer Leitfaden werden, als die beste Leitmuschel.“ Vielleicht käme man an der Hand dieses Hilfsmittels sogar soweit, jurassische Kohlenlager aufzuspüren. Einigermassen stört diese Hoffnungsseligkeit die Thatsache, dass man auch an der pommerschen Küste bei Kolberg tönenden Sand bemerkt habe, doch hilft über den möglichen Einwand die weitere Hypothese hinweg, dass wohl das in Bornholm anstehende

[1]) L. Meyn, Geognostische Beschreibung der Insel Sylt und ihrer Umgebung. Abhandlungen zur geologischen Spezialkarte Preussens und der thüringischen Staaten, 1. Band, 4. Heft, Berlin 1876.

[2]) Ebenda, S. 30 (634) ff.

Küstengebirge die Ostsee unterteufen und mit Ausläufern bis unter den gegenüberliegenden Strand reichen möge.

Diese Andeutung Meyns erregte einiges Aufsehen, obwohl sie zunächst von anderer Seite nicht bestätigt wurde; der beste geographische Kenner der Kolberger Gegend wenigstens, P. Lehmann, weiss von merkwürdigem Sande nichts zu berichten.[1]) Jedenfalls bat zu Beginn der achtziger Jahre Baird in Washington die preussische Geologische Landesanstalt um die Uebersendung einer Probe „klingenden Sandes von Kolberg". Man war mithin auch anderwärts auf die ganz unzutreffende Vermutung geführt worden, es liege da eine Spezialität von Sand vor, während es sich doch nur um eine Eigenschaft ausgedehnter Sandflächen handeln konnte. Deshalb hielt es Berendt für angezeigt, in einer eigenen Veröffentlichung[2]) die erforderliche Aufklärung zu geben. Er selbst hatte bei seinen Begehungen der deutschen Ostseeküste die fraglichen Töne mehrfach wahrgenommen: im Samland, auf der Kurischen und auf der Frischen Nehrung, bei Rügenwaldermünde, Heringsdorf und auf der an Mecklenburg angrenzenden, vorpommerschen Halbinsel Darss. Nicht immer lasse sich das oft ziemlich kräftige, „kreischende" Geräusch nach freiem Belieben hervorrufen; frisch getrockneter Sand biete dazu die günstigsten Bedingungen; vielleicht wirke ein leichter Salzüberzug mit, der nicht lange hafte. Jedenfalls habe die Sache keinen eigentlich geognostischen, sondern blos einen physikalischen Untergrund, und von Leitmerkmalen im Sinne Meyns könne keine Rede sein. „Damit aber fällt auch die Hoffnung, in diesem Klingen des Sandes ein spezielleres Unterscheidungsmerkmal der Sande, eine mit einer Leitmuschel vergleichbare Handhabe zur Auffindung dieser oder jener Formation erhalten zu können". Von Berendt wird offenbar der springende Punkt, auf den es

---

[1]) Paul Lehmann, Das Küstengebiet Hinterpommerns; Wanderungen und Studien, Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin, 19. Band, S. 332 ff.

[2]) Berendt, Ueber „klingenden" Sand, Zeitschrift der Deutschen Geologischen Gesellschaft, 35. Band, S. 864 ff.

ankommt, richtig betont. An und für sich ist jede Sandansammlung dazu geeignet, Klangerscheinungen durch eine schleifende, d. h. eine relativ grössere Bodenparzelle in Mitleidenschaft ziehende Fussbewegung auslösen zu lassen, und der Erklärung ist dann, wenn solche Erscheinungen ausbleiben, eigentlich ein viel weiteres Feld eröffnet, als wenn sie sich in der zu erwartenden Weise einstellen.

Von den Dünen weg wenden wir uns den Wüsten zu, in deren Bereiche wir auf eine reichere Ausbeute von Beobachtungsthatsachen rechnen dürfen. Schon einer der ersten Europäer, die in der Wüste zu reisen gezwungen waren, der Flamänder Ruysbroek, weiss von sonderbarem, trommelartigem Getöse in den weiten Sandebenen Innerasiens zu erzählen, und ein gleiches gilt von dem Italiener Marco Polo, der auf einer südlicher gelegenen Route dem gleichen Ziele im fernen Osten zustrebte. Man hat wohl diese Nachrichten rein subjektiv gedeutet und in ihnen Ausgeburten eines durch die angreifende Monotonie der Wüstenfahrt krankhaft beeinflussten Empfindungsvermögens erblickt, wie ja wirklich auch moderne Forschungsreisende sich solchen Einwirkungen nicht immer zu entziehen im Stande sind.[1]) Paulmier, dem wir eine wertvolle Ausgabe des Polo'schen Berichtes verdanken, spricht[2]) demzufolge von „Halluzinationen", zitiert aber doch auch eine unzweifelhaft reelle Mitteilung von solchen, der Wüste eigentümlichen Beeinflussungen des Gehörorganes. Es ist ja durchaus nicht zu wundern, dass Menschen, deren Gemüt ohnehin mysteriösen Einflüsterungen zugänglich ist, die Töne, die sie vernehmen, und von deren Herkunft sie sich keine unmittelbare Rechenschaft geben können, mit einer überirdischen Welt in Verbindung bringen. In dem erwähnten, reichhaltigen Aufsatze v. Autenrieths ist auch, mit Bezugnahme auf Angaben des

---

[1]) Man vergleiche z. B., was der Botaniker A. v. Bunge über seinen Ritt durch die persische Wüste Lut und über die dort erlebten Sinnestäuschungen meldet (Die russische Expedition nach Chorassan in den Jahren 1858 und 1859, Petermanns Geogr. Mitteilungen, 1860, S. 223).

[2]) Paulmier, Le livre de Marco Polo, 1. Band, Paris 1865, S. 150.

bekannten Erforschers Persiens, J. Morier, der Fabelwesen gedacht, mit denen — Ghohols, Dschins — das persische Volk die weiten Sand- und Salzwüsten seines Reiches bevölkert hat, grossenteils auch unter dem Zwange unverstandener Sinneseindrücke. Genaue, von zuverlässigen Berichterstattern stammende und teilweise auch kontrollierbare Nachrichten über Schallphänomene im Wüstensande liegen von drei überaus distanten Orten vor, nämlich aus Afghanistan, aus der westlichen Sahara und vom Ufer des Roten Meeres. Fürs erste sollen der erste und dritte Fall besprochen werden, während der zweite, über den man weitaus am besten unterrichtet ist, zuletzt an die Reihe zu kommen hat. Die einzige sonst noch anzuführende Erwähnung des klingenden Sandes rührt her von den Sandwich-Inseln und findet sich in einer Abhandlung von Meinicke.[1])

Gegen Ende der dreissiger Jahre durchzog J. Wood den Hindukusch auf einem seitdem von Europäern nur sehr wenig betretenen Wege. Als er die Gebirgslandschaft Koh-Daman erreicht hatte, erfuhr er von den Eingeborenen, dass hier eine Merkwürdigkeit gezeigt werde[2]); es sei dies Reig-Rawan, der bewegte und dabei tönende Sand. Die Klänge, die man dort höre, seien schrecklich und geisterhaft. Solche Schilderungen reizten den Reisenden, sich den Ort genauer anzusehen; er begab sich dahin in ziemlich skeptischer Stimmung, fand aber die Dinge im grossen und ganzen so, wie man sie ihm beschrieben hatte. Die Neigung des mit lockerem Sande bedeckten Hügels betrug ungefähr 45°; derselbe war der Sonnenbestrahlung ausgesetzt, so dass an der Oberfläche eine Tem-

---

[1]) Meinicke (Der Gebirgsbau der Gruppe Hawaii, Petermanns Geogr. Mitteilungen, 1874, S. 210) spricht von dem Berglande von Napali und erwähnt der dortigen Sanddünen (Nohili der Insulaner), auf denen durch das Herabrollen von Sandkörnern ein eigenartiges, oft donnerartiges Getöse erzeugt werde. Vgl. hiezu Gaea, 14. Band, S. 671 ff.

[2]) J. Wood, Personal Narrative of a Journey to the Source of the River Oxus, by the Route of the Indus, Kabul and Badakshan, London 1841, S. 180 ff.

peratur von $39^1/_2{}^0$, etwa zehn Zoll tiefer immer noch eine solche von fast 24^0 herrschte. Wie bei solchen Gelegenheiten immer, begaben sich sechs Männer auf den Gipfel der Anhöhe, um mit kräftiger Bewegung („the party above came trampling down“) beim Herabgehen den Sand durcheinanderzubringen. Der Zweck, einen grossen Lärm hervorzubringen, wurde allerdings, ungeachtet man den Versuch mehrmals wiederholte, nicht erreicht, aber ein Ton liess sich immerhin vernehmen, gleichend dem einer weit entfernten Trommel, gemässigt durch eine sanftere Musik. Wir werden uns überzeugen, dass dieser Tontypus auch anderwärts zur Geltung kommt. Wood möchte das „Wunder“ des Reig-Rawan mit der bekannten Schallverstärkung in einer sogenannten Flüstergallerie in Verbindung bringen, und insofern hat er darin recht, als auch in einer derartigen Gallerie eine Summation ungemein vieler, an und für sich überaus schwacher Einzelklänge zu einem sehr lauten Gesamtklange bewirkt wird. Massgebend ist aber da die Vereinigung zurückgeworfener Schallstrahlen in einem Brennpunkte, und insofern steht die Analogie zwischen beiden Geschehnissen doch nur auf sehr schwachen Füssen.

Die afrikanische Wüste ist schon oft zum Gegenstande monographischer Darstellung gemacht worden, aber nur einmal begegnet uns die Akustik des Sandes. K. A. v. Zittel, Schirmer, J. Walther, um nur einige der bekanntesten Autoren namhaft zu machen, lassen diesen Gegenstand unbesprochen. Dagegen war O. Lenz in der Lage, Erfahrungen darüber zu sammeln, wie sich dies am besten aus seinen eigenen Worten[1]) ergibt. „Inmitten der Einöde hört man plötzlich, aus dem Inneren eines Sandberges herauskommend, einen langen dumpfen Ton, wie von einer Trompete, der einige Sekunden anhält, dann aufhört, um nach kurzer Zeit aus einer anderen Gegend wieder zu ertönen. Es macht dies in der totenstillen, menschenleeren Wüste einen unheimlichen Eindruck. Es muss hier gleich bemerkt werden, dass es sich durchaus nicht etwa

---

[1]) O. Lenz, Timbuktu, 2. Band, Leipzig 1892, S. 53 ff.

um eine akustische Täuschung, wie man etwa auch optischen Täuschungen unterworfen ist, handelt; nicht nur ich, sondern alle meine Leute hörten diese dumpfen Töne, und der Führer Mohammed hatte uns schon am Tage vorher auf dieses Phänomen aufmerksam gemacht". Lenz bringt, anderer Naturstimmen nur im Vorbeigehen gedenkend, dieses Tönen der Sandhügel in engen Kausalzusammenhang mit der analogen Tonbildung auf der Sinaihalbinsel, deren Kennzeichnung wir uns für die dritte Stelle vorbehalten hatten, und wir halten dafür, dass er sich dabei im vollen Rechte befindet. Wir werden auf die Einzelheiten seines Erklärungsversuches nochmals zurückkommen, wenn wir zuvor das Verhalten des sinaitischen Glockenberges, der nicht mehr isoliert, sondern als Zielpunkt zahlreicher schriftstellerischer Aeusserungen dasteht, näher kennen gelernt haben.

Diesen Namen — Djebel Nakus — führt eine litorale Erhöhung am Golf von Suez, nach Rüppell[1]) etwa 3½ Stunden nordwestlich von dem bekannten Küstenplatze Tor gelegen, deshalb, weil das arabische Märchen dorthin die Stätte eines versunkenen Klosters verlegt, dessen Glocke sich noch ab und zu vernehmen lasse. Der erste Europäer, der das allgemeine Interesse auf diese merkwürdige Erdstelle lenkte, war der bekannte Orientreisende Seetzen, der Studienfreund A. v. Humboldts von Göttingen her.[2]) Als er mit seinen Leuten den Berg bestieg, vernahm er[3]) zuerst ein leises, säuselndes Geräusch, welches nicht aus dem inneren Felsen selbst, sondern von dem diesen bedeckenden, lockeren Quarzsande kam und nach und nach dem Tönen eines Brummkreisels ähnlich ward, schliesslich aber in ein starkes Dröhnen überging. Blos die Bewegung,

---

[1]) E. Rüppell, Reisen nach Nubien, Kordorfan und dem petraeischen Arabien, Frankfurt a. M. 1829, S. 206 ff. („Der tönende Berg Nakus").

[2]) K. Bruhns, Alexander v. Humboldt; eine wissenschaftliche Biographie, 1. Band, Leipzig 1872, S. 89.

[3]) In seinem Reisewerke (Berlin 1854, ed. Kruse) gedenkt Seetzen der Sache nicht; vgl. dagegen die Notiz Monatl. Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, 26. Band, S. 395 ff.

nicht aber der Wind schien ihm dabei mitzuwirken, und zumal durch absichtliches Herabrutschen von der steilen Höhe brachte er ein immer stärkeres Wogen des zuerst unerheblichen Klanges zuwege. Die starke Lufterschütterung, welche eintritt, wenn eine Klangscheibe, ein Gong, mit einem Schlägel bearbeitet wird, hat eine sehr grosse Aehnlichkeit mit dem musikalischen Rauschen des Sandes, und da solche Instrumente in den Könobien des Ostens viel gebraucht werden, so hatte man auch den Schlüssel zur Erklärung der Volkssage. Es spricht sehr zu gunsten Seetzens, dass er gleich anfangs die nüchterne, in der Hauptsache zutreffende Interpretation des Vorganges gab. Das Rutschen des Sandes erzeugt Luftwellen, deren Amplitude anfänglich sehr klein ist und stetig grösser wird.

Seetzens Eröffnung machte viel von sich reden, zumal da sie bald nachher auch von anderen Reisenden bestätigt ward. Eine Notiz in einer geachteten französischen Zeitschrift, die übrigens auf die näheren Umstände nicht eingeht, sprach den Glockenberg sogar für eine Weltmerkwürdigkeit an.[1]) Auch Arago widmete dem „unterirdischen Geräusch zu Nakus“ eine Betrachtung, die aber den Kern der Sache nicht trifft.[2]) Wirk-

[1]) Sur les bruits souterrains qu'on entend à Nakous, Annales de Chimie et de Physique (1), 33. Band, S. 439 ff. „Il y a près de Tor une montagne qui sous le rapport des circonstances physiques est peut-être une des plus remarquables non seulement à l'Arabie Pétrée, mais du monde entier“.

[2]) Für den Bericht Aragos war ebenso, wie für denjenigen Brewsters (Edinburgh Journal of Science, 7. Band, S. 51) die Erzählung eines Engländers Gray bestimmend gewesen, der, offenbar voreingenommen, den ganzen Hergang durch eine trübe Brille betrachtet und an die Mitwirkung vulkanischer Kräfte appelliert hatte. Seiner Ansicht nach sollte der Lärm die primäre, das Abrutschen des Sandes die sekundäre Erscheinung sein. Daher kommt auch die unzutreffende Bezeichnung des Geräusches als eines „unterirdischen“, was es in keiner Weise ist. Aus diesem Grunde stellt auch Arago den Glockenberg in Parallele zu anderen Erdgegenden, die mit ihm nicht das mindeste zu thun haben, zu deren Besprechung vielmehr erst in der zweiten und dritten Abteilung dieser Abhandlung Anlass gegeben ist. Vgl. F. Aragos Sämtliche Werke,

lich wertvolle Ermittlungen verdanken wir, nächst und nach Seetzen, einzig Rüppell, Ehrenberg und Palmer.

Von Rüppells Ortsstudie hatten wir schon zu sprechen; sie ist besonders deshalb von Wert für uns, weil sie uns ein gutes Bild von den Terrainverhältnissen liefert. Der Glockenberg ist eigentlich ein Sandsteinplateau von namhafter Höhe, welches oben in eine Flugsandebene übergeht. Statt steil abzufallen, zeigt sich die Uferhöhe durch eine „Felshohle", wie sich Rüppell ausdrückt, aufgeschlossen; dies ist ein schräg vom Meere aus ansteigender Einschnitt, dessen Böschungswinkel auf nahe an 50° geschätzt wird. Nicht blos die Decke, sondern auch der ganze Untergrund besteht aus feinem Sande, so dass jeder Fusstritt das labile Gleichgewicht stört. Man kann nach Willkür die ganze Masse zum Rollen, und damit zugleich zum Tönen, bringen, und auch ein Windstoss kann diesen Effekt erzielen. Dass die Reflexion des einmal erregten Schalles von den Wänden des Hohlraumes eine verstärkende Wirkung ausübt, wird man Rüppell unbedingt zugeben.

Ehrenbergs an Ort und Stelle gemachte Beobachtungen wurden nahe gleichzeitig mit denjenigen seines Landsmannes in Deutschland bekannt,[1]) machten aber weit mehr von sich reden. Dass die Bewegung des in der Hohlkehle aufsteigenden Wanderers die massgebende Ursache sei, wird unumwunden anerkannt. Neu ist, dass die Intensität des Tones als eine so beträchtliche geschildert wird. „Mit einem leisen Rauschen anfangend, ging das Geräusch allmählich in ein Murmeln, Summen und zuletzt in ein Dröhnen von solcher Heftigkeit

---

deutsch von W. G. Hankel, 15. Band, Leipzig 1860, S. 572. Der Herausgeber Hankel, welcher die Mitteilungen der deutschen Berichterstatter kannte, berichtigt den Irrtum des französischen Physikers in einer Randnote und konstatiert: „Das Geräusch entsteht nur durch das Herabrollen des Sandes".

[1]) Ehrenberg, Ueber das eigentümliche Getöse zu Nakuhs am Berge Sinai, Ann. d. Phys. u. Chem., 15. Band, S. 312 ff.; Schriften der Berliner Gesellschaft Naturforschender Freunde, 1829, S. 393 ff.; Laue, C. G. Ehrenberg, ein Vertreter deutscher Naturforschung im XIX. Jahrhundert, Berlin 1895, S. 98.

über, dass man es mit einem fernen Kanonendonner hätte vergleichen können, wenn es nicht anhaltender und gleichförmiger gewesen wäre“. Ehrenberg bemerkte auch, dass das langsame Erlöschen des Getöses mit der Beruhigung der aufgerührten Sandlagen zeitlich Hand in Hand geht. Auch wies er, dem eine ganze Reihe spontaner Schallerscheinungen bekannt war, jeden Zusammenhang derselben mit dem Djebel Nakus zurück und liess einzig und allein die Rutschbewegung des Sandes als Tonquelle zu.

Der englische Archaeologe Palmer, der sich übrigens in dem diesem Phänomene gewidmeten Abschnitte seines Reisewerkes[1]) auch in naturwissenschaftlichen Dingen gut beschlagen zeigt, charakterisiert die Art des Tönens ganz ebenso, wie dies ziemlich viel früher Ehrenberg that. Je höher man das amphitheatralische Thal hinaufkam, umso mehr verstärkte sich der Schall, und ebenso waren die dröhnenden Klänge desto kräftiger, je weniger bereits die Ruhe der lockeren Sandmassen gestört war. Es ist, so hebt Palmer hervor, eine rein örtliche Erscheinung und hängt zugleich von der Reibung und von der Erwärmung ab. Die präzise Betonung dieses letzteren Momentes ist neu, indem früher nur Wood, wie wir uns erinnern, auf die starke Temperaturerhöhung der obersten Schichten des rutschenden Sandes hingewiesen hatte. Bei einem Thermometerstande von etwas über 16° sei die Schallentwicklung lange keine so mächtige gewesen, als bei einem Thermometerstande von nahe 42°. Auch merkt Palmer an, dass die Feinheit der Sandkörner einen unterstützenden Faktor darstelle.[2]) Jedenfalls steht der Bericht dieses englischen Reisenden, obwohl derselbe nicht in erster Linie von naturwissenschaftlichen Interessen geleitet war, in bezug auf Genauigkeit

---

[1]) E. H. Palmer, The Desert of the Exodus, 1. Teil, Cambridge 1871, S. 217 ff.

[2]) Einige benachbarte Sandhügel blieben, während der Glockenberg erdröhnte, völlig neutral, allein sie bestanden aus gröberen Körnern und besassen — hierauf wird gleich nachher zurückzukommen sein — sämtlich einen kleineren Böschungswinkel.

und allseitige Würdigung aller beeinflussenden Umstände obenan. Auch dadurch bekundet Palmer seine Objektivität, dass er nicht versucht, ein Schallphänomen, das nicht weit vom Glockenberge seinen Sitz hat, auf die gleiche Ursache zurückzuführen.[1])

Eine gewisse Schwierigkeit für den Erklärer bietet nun aber die neuerdings hervortretende Thatsache, dass der Djebel Nakus mit der Zeit entschieden schweigsamer[2]) geworden

---

[1]) Auch auf dem Sinai selbst hört man bisweilen dumpfe Töne, die den Arabern umso mehr Stoff zu superstitiöser Deutung geben, als der von Gott angeblich mit eigener Hand gespaltene Berg (Kazwînis Kosmographie, deutsch von Ethé, 1. Halbband, Leipzig 1868, S. 363) vom Volke mit banger Scheu betrachtet wird. Wir lesen bei Palmer (S. 251) über diese Lufterschütterungen: „They are in all probability caused by large masses of rocks becoming detached by the action of frost and rolling wight a mighty crass over the precipice into the valley below". Zweifellos wird hier angespielt auf ein der Wüste eigentümliches Vorkommnis, nämlich auf die als eine natürliche Folge des jähen Wechsels von Tageshitze und nächtlicher Kühle sich häufig vollziehende Abtrennung von Gesteinsstücken, die mit jähem Krachen abspringen. Es liegen hierüber unwidersprechliche Zeugnisse von J. G. Wetzstein (Reiseberichte über Hauran und die Trachonen, Berlin 1860, S. 20) und O. Fraas (Aus dem Orient, Stuttgart 1878, 1. Teil, S. 38 ff., 2. Teil, S. 110) vor, wie nicht minder von dem berühmten Afrikaforscher Livingstone.

[2]) Gegen Ende der siebziger Jahre befand sich Th. Löbbecke am Golfe von Suez. Der kurze Bericht, den er von seinem Besuche des Glockenberges abstattet (Sitzungsberichte der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn, 1880, S. 82 ff.), und der von keiner besonderen Vertrautheit mit früheren Mitteilungen über den tönenden Sand zeugt, gewinnt dadurch an Bedeutung, dass es dem Erzähler nicht gelang, die Masse in Bewegung zu bringen und damit die Töne zu erzeugen. Erst der Abendwind verhalf ihm dazu, „einen eigentümlich vibrierenden" Ton zu vernehmen, den auch er mit dem Erklingen eines Gongs vergleicht. Jedenfalls also war jetzt, etwa zehn Jahre nach Palmers Anwesenheit an Ort und Stelle, die Sandmasse weniger leicht zum Tönen zu erregen. In den neunziger Jahren endlich bestieg Herr Professor Dr. Rothpletz den Uferhang, ohne überhaupt irgendwelcher Klangerscheinung inne zu werden; auch in der Tagespresse stösst man nicht mehr auf Angaben dieser Art.

ist. Zunächst scheint eine Naturerscheinung mit dem Orte, an dem sie zu wiederholten Malen beobachtet worden war, untrennbar verwachsen zu sein; freilich weiss man von den Echos, dass ganz geringe Umgestaltungen der reflektierenden Wände diesen Widerhall abgeschwächt oder ganz vernichtet haben,[1]) und so darf man von vornherein auf eine geminderte Stabilität akustischer Erscheinungen gefasst sein. Und im vorliegenden Falle liegt eine einfache Hypothese nahe genug, durch deren Anwendung man sich von einer fortschreitenden akustischen Trägheit des Sandes Rechenschaft zu geben vermag. Die Töne werden immer matter werden, je mehr sich das Profil der Sandanhäufung seiner natürlichen Gleichgewichtslage nähert.

Durch das Studium der Profile von Stratovulkanen, welche sich je gleichfalls zum grossen Teile aus losem Materiale aufbauen, ist man mit der Kurve bekannt geworden, welche die Oberfläche einer Sand- oder Schuttanhäufung bestimmt, wenn diese im stabilen Gleichgewichtszustande verharren soll. Nach J. Milne[2]) wäre dies eine sogenannte logarithmische Linie; indessen ist in dieser Bestimmung, wie aus den umfänglichen Versuchen von Loewe[3]) erhellt, nur eine Annäherung an die Wahrheit zu erblicken, indem man nicht einen konstanten, sondern thatsächlich einen vom Böschungswinkel selbst bis zu einem gewissen Grade abhängigen Reibungskoeffizienten zu Grunde zu legen hat. Auf die Form der Gleichung der Profilkurve kommt es hier nicht an; vielmehr genügt es, festgestellt zu haben, dass eine Anhäufung ungemein vieler, gleich grosser Körperchen, welche ganz den Wirkungen der Schwerkraft, Adhäsion und Reibung unterworfen

---

[1]) Gehlers Physikalisches Wörterbuch, 2. Auflage, besorgt von Muncke, 3. Band, Leipzig 1827, S. 96.

[2]) J. Milne, On the Form of Volcanos, Geological Magazine (2), 5. Band, S. 337 ff.; Further Notes on the Form of Volcanos, ebenda (2), 6. Band, S. 506 ff.

[3]) F. Loewe, Alte und neue Versuche über Reibung und Kohäsion von Erdarten, München 1872.

ist, unter dem Gesamteinflusse dieser Kräfte eine Gleichgewichtslage annimmt, für deren Oberfläche eine gegen aussen konkave Leitkurve von ganz bestimmter Beschaffenheit massgebend ist. Diese wird aber nicht sofort, sondern, wie man auch an den Schutthalden unserer Berge konstatieren kann, erst nach und nach erreicht, und wenn sie erreicht ist, so können örtliche Gleichgewichtsstörungen keinen nachhaltigen Effekt mehr erzielen. Offenbar meint Palmer dasselbe, wenn er sagt, die Neigung des Abhanges sei der „angle of rest" des Sandes im Normalstande. Man beachte wohl, dass von Rüppell und Ehrenberg der Böschungswinkel auf 50°, von Palmer hingegen nur auf 30° veranschlagt wird; wenn also auch wohl schwerlich die genannten Reisenden mit Klinometern versehen waren, um genauere Messungen vorzunehmen, so ist der Unterschied von 20° denn doch ein zu bedeutender, um blossen Schätzungsfehlern zugeschrieben werden zu können. Bedenkt man vielmehr, dass ein Zeitraum von mehr denn vierzig Jahren beide Beobachtungen trennt, so kann man sich der Vermutung nicht entziehen, dass im Laufe der Zeit eine Abflachung der Wände des Amphitheaters stattgefunden hat. Und dass es damit auch zu einer grösseren Verfestigung der Masse und infolgedessen wieder zu geringerer Geneigtheit des Sandes, die Rutschklänge hervorzubringen, kommen musste, ist nicht minder eine physikalische Notwendigkeit.

Anders liegen die Dinge, wenn man die von Lenz beschriebenen Sandhügel der westlichen Sahara ins Auge fasst. Dies sind nämlich echte Dünen. „Die langgestreckten Sanddünen von Igidi, welche ganze Bergreihen mit scharfen Kanten und Spitzen bilden, haben, wie alle Dünen, eine flachansteigende, dem Winde zugewendete Fläche und einen stärker geneigten, zum Teile sogar sehr steilen Absturz auf der entgegengesetzten Seite."[1]) Wenn also eine ganze Karawane sich

[1]) O. Lenz, S. 56. Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der Kontinentaldünen geben Aufschluss: Sokolow-Arzruni, Die Dünen; Bildung, Entwicklung und innerer Bau, Berlin 1894; Bertololy, Kräuselungsmarken und Dünen, Münchener Geographische Studien, 9. Heft, 1900.

auf der Leeseite eines solchen Sandberges abwärts bewegt, so ist es nicht zu wundern, dass eine progressive Verschiebung der ganz labil gelagerten Korpuskeln eintritt, welche die bekannten Geräusche und Töne auslöst.

Auch Lenz macht, ebenso wie Seetzen und Ehrenberg es thaten, die Reibung für die erste Entstehung dieser Klänge verantwortlich, deren stetige Verstärkung dann unbedingt als eine Resonanzerscheinung aufgefasst werden muss. Ob man jedoch mit ihm den einzelnen Quarzkörnchen eine gewisse „Klangfähigkeit“ beilegen darf, erscheint nicht sicher; wir kommen vielmehr auf die gleich eingangs verlautbarte Ansicht zurück, dass nicht sowohl die wechselseitige Reibung der einzelnen Teilchen an einander, sondern wesentlich der erzwungene Austritt der bis in grössere Tiefen hinab das lockere Gefüge der Sandmasse durchdringenden Luft sich zuerst als diffuses Reibungsgeräusch, wie es Meyn und Berendt kennen, und allgemach als wirklicher Reibungston im Sinne der Strouhal-Meldeschen Definition (s. o.) bemerklich macht. Bei den flachen baltischen Sandanhäufungen verblieb es beim Knistern, Knirschen, Kreischen; die mächtigeren Sandberge Afrikas, Arabiens, Turkestans gewähren die Möglichkeit wirklicher Tonbildung. Und mit dieser Auffassung sehr wohl vereinbar ist endlich auch die mehrseitig gemachte Wahrnehmung, dass Erhitzung des Sandes der Intensität des Schalles förderlich ist, indem sich eben die eingeschlossene Luft an sich schon in lebhafterem Bewegungzustande befindet.

Hiemit beschliessen wir den ersten Teil unserer Ausführungen. Das Phänomen des tönenden Sandes kann als ein in der Hauptsache geklärtes gelten, indem lediglich die sekundäre Mitwirkung anderer Faktoren, wie etwa der Windrichtung, mangels ausreichender Erfahrungsdaten noch einigermassen in Frage bleibt. Es wäre zu wünschen, dass man hinsichtlich der der zweiten und dritten Abteilung zugewiesenen Schallerscheinungen auch bereits zu einem gleich befriedigenden Gesamtergebnis gelangen könnte.

Sitzung vom 9. Februar 1901.

1. Herr H. Ebert hält einen Vortrag: „Weitere Beobachtungen der Luftelektricität in grösseren Höhen.“

2. Herr F. Lindemann legt eine von dem auswärtigen Mitgliede der Classe, Herrn A. Voss in Würzburg, eingesandte Abhandlung: „Ueber ein energetisches Grundgesetz der Mechanik“ vor.

3. Herr P. Groth überreicht eine Arbeit des Herrn Prof. Ernst Weinschenk dahier: „Die Kieslagerstätten im Silberberg bei Bodenmais, ein Beitrag zur Entstehungsgeschichte der Falbänder“, nebst einem Beitrag von Herrn Hüttenverwalter Kaspar Gruber in Bodenmais: „Der Schwefel- und Magnetkiesbergbau am Silberberge in Bodenmais“. Die beiden Abhandlungen erscheinen in den Denkschriften der Akademie.

4. Herr K. A. v. Zittel legt eine Abhandlung des Herrn Obermedizinalrathes Dr. Joseph Georg Egger vor: „Ostracoden aus Meeresgrundproben, gelothet von S. M. Sch. Gazelle“. Die Abhandlung wird in den Denkschriften veröffentlicht.

Weitere Messungen der elektrischen Zerstreuung in grossen Höhen.

Von **Hermann Ebert.**

(Eingelaufen 16. Februar.)

Nachdem durch zwei Fahrten mit dem Freiballon[1]) nachgewiesen worden war, dass man mit der neuen von Elster und Geitel ausgearbeiteten Methode die Grösse der elektrischen Leitfähigkeit der Atmosphäre im Luftballon in grossen Höhen mit kaum minder grosser Sicherheit wie am Boden messen kann, war es bei der Wichtigkeit der Kenntnis des Jonengehaltes der oberen Schichten erwünscht, bei möglichst ruhig gelagerter Atmosphäre eine neue Messungsreihe anzustellen. Auf die hierzu nötigen meteorologischen Bedingungen ist bei uns nur während des Winters mit einiger Sicherheit zu rechnen und zwar dann, wenn sich ein stabiles barometrisches Maximum mit klarem, kalten Frostwetter über dem Continente für längere Zeit erhält. Es wurde daher beschlossen eine neue, dritte Auffahrt bei der genannten Wetterlage zum Zwecke luftelektrischer Messungen vorzunehmen.

Bei dieser Fahrt, für welche die Mittel von dem Münchener Verein für Luftschiffahrt zur Verfügung gestellt wurden, und die wiederum Herr Dr. Robert Emden leitete, sollte ausserdem eine neue Aufstellart für das Instrument ausprobiert werden. Zu diesem Zwecke war am Gondelrande aussen ein kleines Tischchen durch übergreifende Metallbügel angehängt. Durch

[1]) Vergl. diese Berichte Bd. XXX, Heft III, p. 511, 1900.

die unteren äusseren Enden derselben gingen zwei grobgewindige Griffschrauben mit Platten an den dem Ballonkork zugekehrten Enden, so dass das Tischchen eingestellt werden konnte. Auf dasselbe wurde das Messinstrument mit allem Zubehör gesetzt. Diese Aufstellung hat sich als eine äusserst stabile und für das Beobachten sehr vorteilhafte bewährt. Endlich wurden bei dieser Fahrt auch Messungen mit einem das ganze Instrument umschliessenden, mit dem Zerstreuungskörper gleichnamig geladenen Fangkäfig angestellt, wodurch in den oberen Schichten sehr grosse Beträge der Zerstreuung erzielt wurden (bis zum 23-fachen der gleichzeitig am Boden gemessenen Zerstreuungen). Da nicht nur negative, sondern auch positive Ladungen mit wesentlich grösserer Geschwindigkeit bei Anwendung des Käfigs zerstreut wurden, so können Störungen durch direkte Bestrahlung des Zerstreuungskörpers (Hallwachs-Effekt) oder durch Ballonladungen nicht die Ursache dieser hohen Neutralisationsgeschwindigkeiten gewesen sein. Im Gegenteil erhält die von Elster und Geitel aufgestellte Ansicht, dass die Atmosphäre mit frei beweglichen elektrisch geladenen Partikelchen „Jonen" erfüllt sei, eine neue Stütze durch diese Versuche mit dem Fangkäfig, welche zugleich zeigen, dass die Zahl und die Beweglichkeit dieser Teilchen in den höheren Schichten eine ausserordentlich grosse ist.

Während der ganzen, über fünf Stunden dauernden Fahrt wurden gleichzeitig nach einem genau verabredeten Plane in München Zerstreuungsmessungen von Herrn Ingenieur K. Lutz mit einem Instrumente vorgenommen, welches sowohl vor der Fahrt wie nach derselben mit dem im Ballon benutzten Instrumente verglichen worden war.

Dritte Fahrt am 17. Januar 1901.

Schon am 13. Januar bedeckte nach Ausweis der Wetterkarte und des Wetterberichtes der k. b. meteorologischen Centralstation den grössten Teil Europas hoher gleichmässig verteilter Druck, während eine anscheinend über dem Ocean liegende

Depression sich mit ihrem vorderen Rande nur an der Westküste der britischen Inseln bemerkbar machte.

In den continentalen Lagen herrschte im Flachland meist nebliges Wetter; im südlichen Bayern reichte die Nebeldecke bis hart an den Rand der Voralpen heran. Dagegen meldeten alle Hochstationen übereinstimmend wolkenlosen Himmel und sehr reine Gebirgsaussicht.

Am 14. steigerte sich die Herrschaft des hohen Luftdruckes noch mehr, und über Deutschland und Oesterreich lagerte der Kern eines intensiven Maximums mit 780 mm Druck. Gleichzeitig bildete sich allmählich eine Temperaturverteilung mit der Höhe heraus, die für unsere Fahrt bestimmend war, da sie die beste Gewähr für eine möglichst stabile Lagerung der Schichten bot: Während die Temperatur im Flachlande überall zu sinken begann, ging sie auf den Hochstationen in die Höhe.

Am 15. hatte sich die Luftdruckverteilung nicht geändert, noch immer behauptete das barometrische Maximum über dem Continente seine Herrschaft, die über dem Ocean ebenfalls noch immer sich haltende Depression machte sich nur im äussersten Westen geltend. Die Temperaturen sanken bei immer klarer werdendem Wetter im Flachlande immer tiefer, auf den Hochstationen wurde es immer wärmer, so dass bereits an diesem Tage Temperaturumkehr constatiert werden konnte; in München herrschte z. B. am Morgen -11^{0}, auf der Zugspitze -8^{0}.

Da die Wetterkarte vom 16. zeigte, dass das über dem Ocean liegende Minimum im Vorgehen begriffen war und daher der Druck im Westen des Continents zu sinken begann, so durfte die Fahrt nicht länger aufgeschoben werden, wenn wir noch von der überaus günstigen Witterungslage Nutzen ziehen wollten; sie wurde also für den nächsten Tag beschlossen. Noch immer behauptete der hohe Druck seine Vorherrschaft über dem Continente, wenn auch das Barometer etwas zurückzugehen begann. In Bezug auf die Höhenstationen herrschte noch immer Temperaturumkehr (München -12^{0}, Zugspitze -7^{0}).

Am Fahrttage, den 17. Januar, war keine wesentliche Aenderung in der allgemeinen Wetterlage eingetreten. Noch immer lag das ausgeprägte barometrische Maximum über dem grössten Teile Europas und verlor nur langsam an Intensität. Der Kern desselben wies über Deutschland und Oesterreich noch immer mehr als 770 mm Luftdruck auf. Die Depression dagegen, welche am 16. über den britischen Inseln erschienen war, zog dem Golfstrome folgend nach Norden hin ab. Ueberall herrschte in Central-Europa das heitere Frostwetter der letzten Tage, nur local durch tiefliegende Nebelschichten getrübt.

In München war am Morgen Rauhfrost gefallen und starker Nebel aufgetreten bei einer Temperatur von — 12°, 769 mm Druck und völliger Windstille. Die Bergstationen hatten alle heiteres, wolkenloses Wetter, die Zugspitze — 5° Temperatur.

Das klare Frostwetter dauerte auch noch den folgenden Tag an und erst am 19. trat im Westen Trübung mit zunehmender Temperaturerhöhung ein, während gleichzeitig eine tiefe Depression vor den Scilly-Inseln im Westen Englands erschien. —

Am 16. wurden die beiden Zerstreuungsapparate noch einmal miteinander verglichen; dazu wurden sie auf zwei Pfeilern der Attika des Mittelbaues der technischen Hochschule so aufgestellt, dass alle näherliegenden Gebäudeteile (Dachfirst des Haupttraktes u. s. w.) symmetrisch zu den beiden Standorten lagen; eventuelle Spitzenwirkungen oder sonstige Störungen durch das Gebäude mussten sich auf beide Instrumente in gleicher Weise äussern. Die Entfernung der beiden Instrumente von einander betrug 7,7 m, so dass auch eine gegenseitige Beeinflussung ausgeschlossen war.

Ein von der individuellen Beschaffenheit des Apparates unabhängiges Maass der elektrischen Zerstreuung geben die Grössen a (gleich der in einer Minute am Zerstreuungskörper neutralisierten Elektricitätsmenge, diese ausgedrückt in Procenten der ursprünglichen Ladung, vergl. die vorige Mitteilung p. 519). In der folgenden Tabelle beziehen sich die ungestrichelten Buchstaben auf das Balloninstrument, die gestrichelten auf den

Vergleichsapparat. Als Versuchsdauer wurde immer eine Viertelstunde gewählt. Hinzugefügt sind die nach der Fahrt erhaltenen Vergleichswerte, sowie die ein Maass für die Unipolarität der Leitfähigkeit abgebenden Werte $q = a_- / a_+$ und endlich das Verhältnis (r) der procentualen Entladungsgeschwindigkeit: Balloninstrument / Vergleichsinstrument für Ladungen von demselben Vorzeichen.

Zeit (p. m.)	Vorzeichen	E	a %	q	a' %	q'	r
			München, den 16. Januar 1901.				
2h 27m — 42m	+	1,36	0,41	0,96	0,42	0,93	0,98
3 15 — 30	—	1,30	0,39		0,39		1,00
			München, den 18. Januar 1901.				
2 45 — 3h 0m	+	0,87	0,26	2,07	0,34	1,67	0,77
3 5 — 20	—	1,80	0,54		0,57		0,95
3 25 — 40	+	1,56	0,47	1,26	0,26	2,00	1,83
3 45 — 4h 0m	—	1,97	0,59		0,51		1,15
						Mittel	1,11

Die beiden Apparate waren nicht ganz gleich dimensioniert; der im Ballon verwendete hatte einen Zerstreuungskörper von 10,4 cm Höhe und 5,0 cm Durchmesser; das unten benutzte Vergleichsinstrument dagegen einen solchen von 10,2 cm Höhe und 4,6 cm Durchmesser. Die relative Capacität n des Elektroskopes allein zu dem System: Elektroskop + Zerstreuungskörper hatte bei den Instrumenten den Wert 0,488 bezw. 0,450 (Mittel aus je 12 Einzelbestimmungen). Bildet man aus den mitgeteilten Vergleichszahlen r das Mittel, so findet man, dass die Angaben des Vergleichsinstrumentes auf diejenigen des im Ballon benutzten reduciert werden, wenn man die ersteren mit 1,11 multipliciert.

Ein Reductionsfactor von etwa derselben Grösse hat sich auch an anderen Tagen, an denen beide Instrumente an demselben Orte gleichzeitig benutzt wurden, ergeben. Man sieht,

dass gelegentlich nicht unerhebliche Abweichungen vom Mittel vorkommen. Immerhin werden durch die genannte Reduction wenigstens angenähert vergleichbare Werte erhalten. In allen folgenden Tabellen werden daher zum Vergleiche unter den gestrichelten Buchstaben die auf das Balloninstrument durch Multiplication mit 1,11 reducierten Angaben des Vergleichsinstrumentes aufgeführt, so oft der im Ballon benutzte Apparat ohne Fangkäfig, sondern nur mit dem gewöhnlich über ihn gesetzten Schutzdach gegen Sonnenstrahlung und Influenzwirkungen benutzt wurde.

Um aber auch für den Fall, dass das Balloninstrument mit dem Käfig ausgerüstet wurde, die Reduction der Vergleichszahlen zu ermöglichen, wurden die beiden Instrumente wiederholt verglichen:

Balloninstrument im Käfig,
Vergleichsinstrument unter dem Schutzdach.

Ich teile im Folgenden nur die beiden am Tage vor der Fahrt erhaltenen Vergleiche mit.

Zeit (p. m.)	Vorzeichen	E	a %	q	a' %	q'	R
München, den 16. Januar 1901.							
Balloninstrument im Käfig.							
$2^h\ 52^m - 3^h\ 7^m$	+	2,03	0,61	1,41	0,30	1,60	2,03
$3\ \ 50 - 4^h\ 5^m$	−	3,00	0,90		0,48		1,88
						Mittel	1,96

Der Käfig wurde sehr weitmaschig gewählt, damit er die freie Circulation der Luft möglichst wenig behindere; er war cylinderförmig, 45 cm hoch und 25 cm im Durchmesser. Unten stand er auf einer runden Metallplatte mit Metallrand, welche auf einer mit Siegellackfüssen versehenen, dicken Glasplatte lag. Die Maschen hatten rhombische Gestalt und 46 bezw. 38 mm Diagonalenlänge im Lichten, gegenüber 1,6 mm Dicke des verzinkten Eisendrahtes, aus dem das Netz bestand. Der im

Inneren stehende Zerstreuungsapparat wurde nach dem Vorgange von Elster und Geitel vermittelst einer Sonde, einem in ein Glasrohr mittels Siegellack eingekitteten dicken Metalldrahtes, von der Trockensäule aus so geladen, dass das Drahtnetz, welches gleichzeitig zur Erde abgeleitet wurde, nichts von dieser Ladung empfing. Im Ballon wurde statt der Erdleitung eine längere Drahtleitung benutzt, welche am Rande des Ballonkorbes entlang geführt und mit allen grösseren leitenden Massen in der Gondel, u. A. dem Beobachter verbunden war. Sobald der Apparat im Inneren für sich bis zu einem Potentiale von der Höhe, wie sie auch sonst als Anfangsladung für die Messungen benutzt wurde, gegenüber dem ihn umschliessenden Metallhohlkörper (Netz + metallene Fussplatte), mit dem auch das Elektroskopgehäuse in leitender Verbindung stand, geladen war, wurde die Leitung von dem Drahtnetze abgenommen, so dass der Käfig nun völlig isoliert dastand, da er ja auf dem Glastischchen ruhte; nun wurde die Trockensäule mit dem eben benutzten Pole an den Käfig angeschlossen, ihr anderer Pol mit der Ableitung verbunden, so dass der Käfig mit demselben Vorzeichen wie der Zerstreuungskörper selbst geladen war. Dass das Netz, trotz seiner Maschenweite das von ihm eingeschlossene Elektroskop mit seinem Zerstreuungskörper vollkommen gegen äussere elektrostatische Einwirkungen schützte, war schon daran unmittelbar zu erkennen, dass die Blättchen weder bei den Beobachtungen an der Erde noch bei denen im Ballon irgend wie zucken, wenn die Ableitung oder die Trockensäule an den Käfig angelegt oder von ihm abgenommen wird. Durch besondere Versuche im Laboratorium habe ich mich aber ausserdem davon überzeugt, dass ein elektrisch geladenes Teilchen, welches durch die Maschen in das Innere des Käfigs gelangt ist, dessen elektrostatischen Wirkungen in der That vollkommen entzogen ist. Es wird nicht wieder herausgezogen, wenn die Käfigladung der seinigen etwa entgegengesetzt ist, selbst wenn man den Käfig so stark ladet, dass man kräftige Funken aus ihm ziehen kann.

Dieses Resultat steht vollkommen im Einklange mit den

Berechnungen, welche Maxwell in seinem Treatise, B. I, § 203 ff., über die elektrostatische Schutzwirkung von solchen Metallgittern angestellt hat. Hierdurch erklärt sich die jederzeit zu beobachtende gesteigerte Geschwindigkeit, mit der Ladungen im Inneren des gleichnamig geladenen Käfigs neutralisiert werden, in ungezwungener Weise, falls man sich auf den Standpunkt von Elster und Geitel stellt und annimmt, dass in der Atmosphäre in der That frei bewegliche, positiv und negativ geladene kleine Partikelchen jederzeit vorhanden sind, von denen in einem solchen geladenen Käfig eine grössere Anzahl angesammelt wird.

Die oben mitgeteilten Messungen zeigen, dass der hier verwendete Käfig die Entladungsgeschwindigkeit etwa verdoppelt. Nahezu dieselbe Zahl $R = 2$ hat sich an anderen Tagen ergeben, z. B. am 9. Dezember 1900, einem kalten, klaren Wintertage, an dem die Vergleichungen von früh morgens bis zum Abend fortgesetzt wurden. Wir wollen daher die Angaben des Vergleichsinstrumentes immer mit 2 multipliciert unter a' in den folgenden Tabellen dann aufführen, wenn oben im Ballon mit Käfig gearbeitet wurde. Diese Zahlen geben dann ungefähr die Entladungsgeschwindigkeit in Procenten der Anfangsladung an, welche von dem Balloninstrumente angezeigt würde, wenn dasselbe zur gleichen Zeit unten mit dem Käfig benutzt werden könnte. Freilich ist diese Beziehung der gleichzeitigen Beobachtungen auf einander eine nicht ganz sichere. Denn die Spannungen, bis zu denen der Käfig durch die Trockensäule geladen wird, wechseln mit dem Zustand der Säule, der bekanntlich selbst kein sehr constanter ist. Dass aber vor, während und nach der Fahrt die benutzte Ladesäule keine grossen Aenderungen erfahren hat, geht aus Folgendem hervor. Zur Erzielung eines geeigneten Ausschlages war die Spannung der ganzen Säule zu gross; sie musste an einer Stelle nahe der Mitte abgeleitet werden, wenn der für die Messung geeignetste Maximalausschlag am Elektroskop erhalten werden sollte. Die Stellen, an denen für die beiden Vorzeichen die Ableitung zu erfolgen hatte, blieben während der drei Beobachtungstage die

gleichen, ein Zeichen, dass sich wenigstens in dieser Zeit die Spannung der Säule nicht merklich verändert hatte. —

Am Fahrttage massen wir früh 8^h 40^m am Aufstiegplatze $-15{,}2^0$ C. und 89% Feuchtigkeitsgehalt, einem Mischungsverhältnis (kg Wasserdampf pro kg Dampf-Luftgemisch) von 0,0011 entsprechend. Rauhfrost und Nebel waren ringsum. Während das Elektroskop mit Schutzdach negativ geladen auf einem Wagen stand, wurde die Ballonkugel, als sie aus der Ballonhalle gebracht wurde, so dicht wie möglich an das Instrument herangeführt. Nicht das geringste Zucken der Blättchen war bemerkbar, die Zerstreuung zeigte vor und nach dem Herannahen des Ballons keinen Unterschied. Dadurch wird die früher (vorige Mitteilung p. 520) geäusserte Befürchtung, der Ballon möchte wenigstens im Anfange, bis sich seine Eigenladung zerstreut hat, die Messungen beeinflussen, entkräftet und die Ergebnisse der Herren Tuma und Börnstein, welche auf den Mangel einer merklichen Eigenladung des Ballons hinweisen, auch durch die Zerstreuungsmethode bestätigt, eine Thatsache, welche natürlich das Vertrauen, welches man in die im Freiballon angestellten Messungen setzen darf, erheblich steigert. Sowohl am Aufstiegsorte vor der Fahrt wie am Landungsplatze nach derselben wurden Messungen mit beiden Vorzeichen vorgenommen; die folgende Tabelle zeigt, dass die erhaltenen Resultate untereinander gut übereinstimmen, so dass das Instrument durch die Fahrt nicht gelitten haben konnte; die Werte liegen ferner ganz in dem Bereiche derjenigen, welche sonst um die entsprechende Tageszeit am Boden erhalten wurden, sowie der am Vergleichsinstrumente erhaltenen Zahlen, wenn dieselben auch am Morgen etwas später, am Nachmittage, nach der Landung, etwas früher erhalten wurden, als die mit dem Balloninstrumente gefundenen Werte. Die Zahlen V der letzten Colonne geben den Vergleich der Beobachtungsorte ($V = a$ [Balloninstrument] / a' [Vergleichsinstrument, letzteres reduciert]).

Zeit	Vorzeichen	E	a %	q	a' %	q'	V
München, den 17. Januar, Vormittags. Exerzierplatz der Militär-Luftschifferabteilung.							
$8^h\ 30^m - 45^m$	+	2,33	0,70	0,91	0,67	0,51	1,0
8 48 — 58	—	2,11	0,63		0,39		1,6
Hohenaltheim bei Nördlingen, den 17. Januar, Nachmittags.							
2 30 — 45	+	3,35	1,00	0,86	0,33	1,73	3,0
2 50 — $3^h\ 5^m$	—	2,88	0,86		0,57		1,5

Um $9^h\ 8^m$ fuhren wir mit starkem Auftrieb ab; in einer Minute hatten wir 79 m über dem Boden die obere Schicht des Nebels erreicht. Hier aber wurde der Aufstieg plötzlich gebremst, da wir mit unserer kalten Gasfüllung in eine sehr viel wärmere Luftschicht eingetreten waren. Erst als vier Sack Ballast ausgegeben waren, vermochten wir den Einfluss der erheblichen Temperaturumkehr zu überwinden und weiter zu steigen. Um $9^h\ 18^m$ wurde in 842 m Meereshöhe (318 m über dem Boden) $+ 1{,}2^0$ Temperatur gemessen, so dass wir in ca. 16^0 wärmere Luftschichten einfuhren. Die durch die Bergstationen bereits angezeigte Temperaturumkehr wurde also auch im freien Luftmeer angetroffen und war hier sogar noch stärker ausgeprägt, weil sich das Luftmeer ca. $4^0 - 6^0$ wärmer als die gleich hoch gelegenen Hochstationen erwies. Ueber uns war tiefblauer wolkenloser Himmel, an dem selbst das leichteste Cirrusgewölk fehlte. Die Alpen waren von seltener Klarheit, Bodennebel bedeckte die Hochebene nur zum Teil, besonders dicht über München, so dass nur die runden Kuppen der Frauenthürme aus dem weissen, streifenförmig angeordneten Nebelmeere emporragten. Es konnte keinem Zweifel unterliegen, dass wir uns unter der Einwirkung absteigender Luftströme befanden, die uns die ionenreichere Luft der höheren

Schichten zutrieb und so durften wir ausnehmend grosse Zerstreuungsgeschwindigkeiten von vornherein erwarten.

Auch bei dieser Fahrt waren deutlich drei verschieden geartete Luftschichten zu unterscheiden, die sich durch verschiedene Temperaturen und Temperaturgradienten, verschiedenes Mischungsverhältnis und namentlich durch die verschiedene Richtung und Geschwindigkeit, in der und mit der sie uns bewegten, hinreichend scharf gegen einander abgegrenzt werden konnten.

1. Luftschicht: vom Boden bis ca. 1400 m.

In dieser untersten Schicht wurde zunächst die bereits erwähnte sehr starke Temperaturzunahme mit der Höhe unmittelbar über der Nebelschicht beobachtet. Der Temperaturgradient ging in ca. 1000 m in eine dem adiabatischen Gleichgewichte entsprechende Zunahme von rund 1^0 pro 100 m Anstieg über. Diese Temperaturverteilung war der Ausdruck einer äusserst stabilen Lagerung der dem Boden unmittelbar aufliegenden Schicht. Der relative Feuchtigkeitsgehalt war auf $49^0/_0$ herabgegangen (gegen $89^0/_0$ am Boden), das Mischungsverhältnis war auf 0,00245 gestiegen. In dieser untersten Schicht wurden elektrische Verhältnisse angetroffen, welche denen am Boden insofern glichen, als eine ausgesprochene Unipolarität (durch q gemessen) und ein Ueberwiegen an freien $+$ Jonen angezeigt war; da die Beweglichkeit der Jonen in der klaren reinen Luft eine viel grössere als unten im Nebel sein musste, dürfen wir uns nicht wundern für den negativ geladenen Zerstreuungskörper eine ca. viermal so grosse Entladungsgeschwindigkeit zu finden, als sie gleichzeitig unten beobachtet wurde. Es wurde mit Schutzdach aber ohne Käfig gemessen.

Zeit	Höhe	Temperatur	Relative Feuchtigkeit	Mischungsverhältnis	Spannungen
9h 18m — 33m	995 m	+ 1,6° C.	49 %	0,0024	189—183
9 37 — 52	1275	3,0	49	0,0025	199—172

2. Luftschicht: von 1400—2000 m.

Etwa um 10h traten wir in eine eigentümlich beschaffene Luftschicht ein, die wir erst um 11h 8m etwa in 2000 m Höhe verliessen: eine nahezu vollkommen isotherme Schicht mit dem Temperaturgradienten Null. Bekanntlich bildet es noch ein ungelöstes Problem der Thermodynamik der Atmosphäre, wie solche isotherme Schichten von mehreren Hundert Metern Mächtigkeit im Luftmeere zu Stande kommen und wie sie sich zu erhalten vermögen. Der Uebergang war kein allmählicher, sondern ein plötzlicher mit 44% relativer Feuchtigkeit, + 4,4° Temperatur und 0,0027 kg Mischungsverhältnis, Werte, welche bis zum Austritt aus der Schicht fast die gleichen blieben. Vielleicht hatten wir es sogar mit zwei übereinander liegenden und schwach gegeneinander bewegten isothermen Schichten, die in etwa 1750 m Höhe aneinander grenzten, zu thun.

In dieser Schicht wurde zum ersten Male mit Käfig gearbeitet. Das Schutzdach über dem Zerstreuungskörper wurde dabei weggelassen, da die Laboratoriumversuche gezeigt hatten, dass der Drahtkäfig genügenden elektrostatischen Schutz gewährte.

Zeit	Höhe	Temperatur	Relative Feuchtigkeit	Mischungsverhältnis	Spannungen
10h 2m — 17m	1470 m	+ 4,4° C.	44 %	0,0027	192—141
10 22 — 27	1550	4,5	45	0,0028	180—141
10 29 — 40	1605	4,3	46	0,0028	197—126

Spannungs-abnahme pro 15 Minuten	Vorzeichen	E	a %	q	a' %	q'	V
6 Volt	+	1,38	0,41	4,58	0,51	0,86	0,80
27 „	—	6,32	1,89		0,44		4,3

Wie die vorstehenden Zahlen zeigen, wurden verhältnismässig sehr hohe Werte für die Zerstreuung gefunden. Dabei ist nicht nur die Neutralisationsgeschwindigkeit der negativen Ladungen gesteigert, sondern auch die der positiven, ja die Entladungsgeschwindigkeit der letzteren ist relativ mehr erhöht, als diejenige der negativen Ladungen, so dass das mittlere Verhältnis $q = a_- / a_+$ gegen die vorher mit Schutzdach erhaltenen Werte zurückgeht. Es kann also kein merklicher Hallwachseffekt vorliegen und die intensive Sonnenbestrahlung hat keinen Einfluss auf den vollkommen geschwärzten Zerstreuungskörper mehr, wie dies auch die Herren Elster und Geitel feststellten. Das Zurückgehen des Wertes für q zeigt an, dass sich die Unipolarität der luftelektrischen Leitung mit der Höhe mehr und mehr ausgleicht, während zugleich die absoluten Beträge der Leitfähigkeiten für beide Vorzeichen zunehmen, genau wie dies schon bei den früheren Fahrten gefunden worden war.

3. Luftschicht: über 2000 m.

Erst als wir um 11^h 8^m nach Ballastauswerfen die Höhe von 2000 m überschritten, kamen wir aus der isothermen

Spannungs-abnahme pro 15 Minuten	Vorzeichen	E	a %	q	a' %	q'	V
51 Volt	+	13,39	4,01	2,18	0,96	1,50	4,2
(117)	—	31,81	9,53		1,44		7,1
(97)	—	26,45	7,93				

Schicht heraus und traten in eine neue Luftschicht ein, was sich sofort auch an einer Aenderung der Fahrtrichtung zu erkennen gab; dieselbe ging bis dahin ziemlich genau nach Westen und bog jetzt nach Nordwesten um. In dieser Schicht nahm die Temperatur regelmässig von + 4.0° in der isothermen Schicht auf — 2.5° ab in der höchsten bei dieser Fahrt erreichten Höhe von rund 3200 m mit einem Gradienten von ca. 0,53 auf 100 m Erhebung. Dieser geringe Gradient ist wieder ein Zeichen von der ausserordentlich stabilen Lagerung aller Luftschichten an diesem Tage auch in diesen grösseren

Zeit	Höhe	Temperatur	Relative Feuchtigkeit	Mischungsverhältnis	Spannungen
$10^h\,52^m$ — $11^h\,12^m$	1930 m	+ 3.3° C.	42%	0,0027	189—170
11 17 — 32	2285	2,1	42	0.0025	198—168
11 42 — 47	2375	1,7	43	0,0024	174—122
11 49 — 59	2560	1,7	42	0,0024	183—104
12 4 — 9	2880	0,3	42	0,0023	142—104
12 11 — 17	2930	— 1,0	42	0,0023	178—104
12 19 — 24	3005	1,9	46	0,0023	179—125
12 32 — 47	3105	2,2	47	0,0023	198—183
12 51 — $1^h\,6^m$	3060	2,1	46	0,0024	188—126
1 11 — 1 20	2730	+ 0,6	43	0,0024	188—184

Höhen. Die relative Feuchtigkeit erhielt sich auf 42—47%, das Mischungsverhältnis ging von 0,0027 auf 0,0023 zurück. Noch während des Ueberganges aus einer in die andere Luftschicht wurde die erste der unten folgenden Messungen ohne Käfig aber mit Schutzdach angestellt. Wenn ihr auch wegen der grossen Vertikalbewegung kein allzugrosses Gewicht zukommt, so zeigt sie doch beim Vergleiche mit den in der ersten Schicht viel tiefer unten in gleicher Weise angestellten Messungen durch die Höhe der erhaltenen Zerstreuung für +, dass sich die relative Zahl der — Jonen in diesen höheren

Schichten erheblich vergrössert haben musste. Die — Zerstreuung zeigt dagegen nur eine geringe Zunahme. die durch q ausgedrückte Unipolarität wird kleiner.

In dieser Luftschicht wurden bei Anwendung des Käfigs (Zahlen unterhalb des ersten Striches) die grössten Entladungsgeschwindigkeiten erhalten, die ich je beobachtet habe. Während bei den Messungen am Boden für jede Beobachtung gewöhnlich ein Zeitraum von 20—30 Minuten gewählt wird, um einen deutlichen Rückgang der Blättchen zu beobachten, fielen dieselben hier oben so rasch zusammen, dass die Messung be-

Spannungsabnahme pro 15 Minuten	Vorzeichen	E	$a\,^0/_0$	q	$a'\,^0/_0$	q'	V
(14) Volt	+	3,44	1,03	2,07	0,36	1,11	2,9
30	—	7,12	2,13		0,40		5,2
(156)	+	46,21	13,86		0,60		20,8
(119)	+	36,80	11,04				
(114)	—	40,57	12,16	1,17		2,03	
(185)	—	58,33	17,48				11,9
(162)	—	46,78	14,03		1,22		
15	+	3,40	1,02	5,10	0,31	1,71	3,3
62	—	17,36	5,20		0,54		9,6
(7)	+	1,55	0,46				

reits nach 5 Minuten beendet war, da ein weiteres Warten zu zu kleinen Divergenzen geführt hätte, bei denen die Potentialmessungen ungenau werden. Dieses rasche Verschwinden der Ladungen hat den grossen Vorteil, dass viel mehr Einzelmessungen ausgeführt werden können, was den grossen, namentlich bei Hochfahrten mit Wasserstoffgas nicht zu unterschätzenden Vorzug bietet, dass man für einzelne Luftschichten geltende Werte erhalten kann, auch wenn man bei rascher Vertikalbewegung die Schichten schnell wechseln muss.

Die zwischen $11^h\ 42^m$ und $11^h\ 47^m$ in 2375 m Höhe er-

haltene Zerstreuungsgeschwindigkeit von 13,86% für + Ladung übertrifft diejenige, welche man gleichzeitig unten (nach den Angaben des Vergleichsinstrumentes und der oben angegebenen Reduction) bei demselben Instrumente mit dem Käfig erhalten haben würde um das 23 fache. Noch grösser war die Entladungsgeschwindigkeit der — Ladung zwischen $12^h\ 11^m - 17^m$ in 2930 m mit $a_- = 17{,}48\%$.

Während wir noch auf der grössten Höhe waren, wurde zwischen $12^h\ 32^m$ und $1^h\ 6^m$ nochmals mit Schutzdach beobachtet (Zahlen unter dem zweiten Strich).

Wie man sich die hierbei zu Tage tretende Unipolarität von einer Grösse, wie sie diesen hohen Schichten bei den anderen Fahrten nicht eigen gewesen ist, zu erklären habe, vermag ich vor der Hand noch nicht anzugeben.

Um $1^h\ 13^m$ begann der Ballon sehr rasch zu fallen, ohne dass der Fall weiter aufgehalten werden konnte. Die begonnene Messung mit + Ladung und Schutzdach ohne Käfig wurde indessen noch weiter fortgesetzt (letzte Reihe der Tabelle). Indessen besitzt der erhaltene Wert nicht dieselbe Sicherheit, wie die anderen Zahlen, da wegen allerlei Hantierungen in der Gondel, das Instrument nicht mehr so grosse Ruhe hatte wie zuvor. —

Wie früher, so wurde auch bei dieser Fahrt nicht nur am Anfang und am Ende der in der Tabelle angegebenen Zeiten, sondern auch in Zwischenzeiten, meist in Intervallen von je 5 Minuten abgelesen. Das gesamte im Ballon aus 49 Einzelablesungen erhaltene Zahlenmaterial lässt wieder erkennen, dass im Allgemeinen in gleich lange dauernden Unterabschnitten jeder Beobachtungsreihe etwa die gleichen Elektricitätsmengen unabhängig von der Höhe des Ladungspotentiales entladen werden (vergl. vorige Mitteilung Nr. 529), wenn dieses Mal diese Erscheinung auch nicht so deutlich wie sonst hervorgetreten ist.

Resultate:

1. Die Ergebnisse der früheren Fahrten haben sich vollkommen bestätigt.

2. Bei der sehr regelmässigen Schichtung der Atmosphäre bei dem barometrischen Wintermaximum, in welches diese dritte Fahrt fiel, war die nach oben hin abnehmende Unipolarität, also die Verminderung der Wirkung des negativ geladenen Erdkörpers bei erheblich zunehmender Entladungsgeschwindigkeit für beide Vorzeichen deutlich ausgeprägt.

3. Die Aufstellung des Zerstreuungsapparates auf einem ausserhalb der Gondel befestigten Tischchen hat sich sehr gut bewährt und empfiehlt sich aus verschiedenen Gründen mehr als die Aufhängung im Inneren des Ballonkorbes.

4. Durch Einbauen des Zerstreuungsapparates in einen gleichnamig geladenen Fangkäfig lässt sich die Zerstreuungsgeschwindigkeit für beide Vorzeichen erheblich steigern; so wurde in 2375 m Höhe eine 23 mal so grosse Entladungsgeschwindigkeit für + beobachtet, als dasselbe Instrument am Boden (nach Ausweis eines Vergleichsinstrumentes) mit Käfig ergeben haben würde. Dabei dürfte die Genauigkeit nur unbeträchtlich vermindert sein; dagegen wird der Vorteil erreicht, dass die Zahl der Einzelbestimmungen erheblich gesteigert werden kann.

5. Bei dieser Fahrt haben sich sehr grosse Beträge der Zerstreuung in der Höhe ergeben, offenbar unter der Wirkung einer schon seit vielen Tagen andauernden grossen Luftklarheit und absteigender Luftströme, welche sehr ionenreiche Höhenluft dem Instrumente, namentlich dem vom Schutzdach nicht bedeckten, zuführten.

6. Störungen durch Ballonladungen oder durch lichtelektrische Wirkungen waren nicht nachweisbar.



Ueber ein energetisches Grundgesetz der Mechanik.

Von **A. Voss** in Würzburg.

(*Eingelaufen 16. Februar.*)

Herr C. Neumann[1]) gelangt bei einer kritischen Besprechung des Ostwald'schen Principes des grösstmöglichen Umsatzes der Energie[2]) zu folgendem Satze:

„Ein beliebigen Bedingungen unterworfenes materielles System bewege sich unter Einfluss gegebener Kräfte, die ein Potential haben. Befindet sich dieses System zu Anfang eines unendlich kleinen Zeitelementes τ in Ruhe, so wird unter allen mit jenen Bewegungen und mit der Formel des Principes der lebendigen Kraft verträglichen virtuellen Bewegungen eine vorhanden sein, deren lebendige Kraft zu Ende der gegebenen Zeit τ am grössesten ist. Diese letztere wird alsdann diejenige sein, welche unter dem Einfluss der gegebenen Kräfte während der Zeit τ in Wirklichkeit eintritt."

Wenn es sich darum handelt, diesen Satz, der übrigens mit bekannten Sätzen über die Wirkung momentaner Kräfte zusammenhängt,[3]) auf den Fall auszudehnen, wo das System sich nicht in relativer Ruhe befindet, so wird die unbestimmte

---

[1]) C. Neumann, das Ostwald'sche Axiom des Energieumsatzes, Leipz. Ber., p. 184 (1892).

[2]) W. Ostwald, Lehrbuch d. allg. Chemie, 2. Aufl., Bd. 2, p. 37 (1892).

[3]) Man vergleiche z. B. J. Routh, Dynamik der Systeme schwerer Körper, übers. v. A. Schepp, Bd. 1, p. 335 u. ff., sowie die Noten von J. Bertrand zur Mécanique analytique (Lagrange, Oeuvr. Compl. XI. p. 311).

Form, in welcher in der Mechanik von virtuellen Bewegungen und Verrückungen Gebrauch gemacht wird, hinderlich. Man versteht unter solchen bald fingirte Verschiebungen, dann wieder Geschwindigkeiten oder auch Beschleunigungen, welche den betrachteten Puncten zur Zeit t oder auch für die Lage, welche sie zur Zeit $t + dt$ einnehmen, zugeschrieben werden. Es beruhen darauf auch die Unklarheiten, welche über manche Sätze, wie z. B. über das ebenfalls mit dem obigen Theorem in engem Zusammenhange stehende Princip des kleinsten Zwanges noch gegenwärtig selbst in ausführlicheren Lehrbüchern[1]) enthalten sind.

Versucht man, dem obigen Falle, soweit er sich auf die Vorstellung einer bei einer virtuellen Bewegung erzeugten lebendigen Kraft bezieht, eine vollständig klare mechanische Bedeutung zu geben, so kommt man zu folgender Anschauung.

Werden die Coordinaten der Punkte (x_i), (y_i), (z_i) des Systems zur Zeit $t = 0$ ohne Unterschied mit x_i, ihre Massen durch m_i, die auf sie wirkenden Kraftcomponenten durch X_i bezeichnet, so dass

$$x_1 = (x_1),\quad x_2 = (y_1),\quad x_3 = (z)_1;\; x_4 = (x_2),\ \text{etc.}\ \ldots$$
$$m_1 = m_1,\quad m_2 = m_1,\quad m_3 = m_1\ ;\ \ldots$$
$$X_1 = X_1,\quad X_2 = Y_1,\quad X_3 = Z_1\ ;\ \ldots$$

sind, so sind die Differentialgleichungen der Bewegung[2])

$$1)\qquad m x_i'' = X_i + \sum \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}$$

falls die Bedingungen durch die Gleichungen

$$\varphi_s = 0,\quad s = 1, 2 \ldots k$$

[1]) Vgl. z. B. W. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1880, 2. Aufl., Bd. 2, p. 502.

[2]) Die Differentialquotienten von x_i nach t sind durch nebengesetzte Striche bezeichnet, so dass $x' = \frac{dx}{dt}$, $x'' = \frac{d^2 x}{dt^2}$ u. s. w.

ausgedrückt sind. Die lebendige Kraft T, nach Potenzen der Zeit t entwickelt, ist gegeben durch

$$2\,T = t^2 \sum m_i\, x''^2_i + \ldots$$

Man führe nun das System unter denselben Kräften ebenfalls aus der Ruhelage, aber unter anderen Bedingungen

$$\psi_\sigma = 0, \quad \sigma = 1, 2 \ldots . l,$$

welche mit der Lage der Puncte verträglich sind, und bezeichne die entstehenden Beschleunigungen durch ξ''_i, so ist

$$m_i\, \xi''_i = X_i + \sum \mu_\sigma \frac{\partial \psi'_\sigma}{\partial x_i} \tag{2}$$

und die lebendige Kraft T_1 gegeben durch

$$2\,T_1 = t^2 \sum m_i\, \xi''^2_i + \ldots$$

Danach wird

$$2\,(T - T_1) = t^2 \sum m_i\, (x''_i - \xi''_i)^2 + 2\, t^2 \sum m_i\, \xi''_i\, (x''_i - \xi''_i)$$

oder, wie nach 1) und 2)

$$m_i\, (x''_i - \xi''_i) = \sum \left(\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} - \mu_\sigma \frac{\partial \psi'_\sigma}{\partial x_i} \right)$$

$$2\,(T - T_1) = t^2 \sum m_i\, (x''_i - \xi''_i)^2 + 2\, t^2 \sum \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}\, \xi''_i \text{ [1]}.$$

Der zweite Theil auf der rechten Seite verschwindet sicher dann, wenn die virtuelle Bewegung so festgesetzt wird, dass die Bedingungen $\psi'_\sigma = 0$ die Bedingungen $\varphi_s = 0$ vollständig enthalten, also z. B.[2]) aus letzteren und beliebigen weiteren ebenfalls von t unabhängigen ausgewählt wurden. Unter diesen Voraussetzungen ist daher T in der That ein Maximum.

Diese Betrachtung kommt übrigens vollständig mit der von Herrn Neumann zu Grunde gelegten Vorstellung virtueller Bewegungen überein. Dagegen brauchen die wirkenden

---

[1]) Alle $\sum$ Zeichen erstrecken sich immer auf sämmtliche mehrfach vorkommende Indices.

[2]) Die Bedingungen für ψ sind im folgenden allgemein definirt.

Kräfte keiner Bedingung irgend welcher Art zu unterliegen,[1]) während allerdings die Bedingungen von der Zeit unabhängig sein müssen.[2])

Der angegebene Satz lässt sich indessen noch erweitern. Er bleibt bestehen, wenn die ξ_i'' nur so gewählt sind, dass

$$\sum \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} \xi_i''$$

einen positiven Werth hat. Dazu ist aber erforderlich, dass die virtuelle Arbeit der Reactionen des Systemes

[1]) D. h. bis auf die auch im folgenden festzuhaltende Voraussetzung, dass die Coordinaten der Systempuncte für die wirkliche und jede virtuelle Bewegung in der Form

$$x_i + A_i t + B_i t^2 + R_i t^3$$

wo R_i den Rest bezeichnet, darstellbar sind. Alsdann handelt es sich auch nicht mehr um eine unendlich kleine, sondern um eine hinreichend kleine Zeit, während der die Maximumeigenschaft besteht.

[2]) Um diesen Punct völlig sicher zu stellen, betrachte man etwa die Bewegung eines einzelnen Punctes von der Masse eins auf der Fläche $\varphi = 0$, deren Gleichung t enthält und definire die virtuelle Bewegung durch $\varphi = 0$, $\psi = 0$, wo ψ wieder t enthalten kann. Man findet dann vermöge der Gleichungen

$$x_i'' = X_i + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

$$\xi_i'' = X_i + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

für den Ausdruck

$$\sum m_i \xi_i'' (x_i'' - \xi_i'')$$

den Werth

$$(\lambda - \mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

während die Lagrange'schen Multiplicatoren λ, μ, ν die Gleichung befriedigen

$$(\lambda - \mu) \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 = \nu \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

so dass der angegebene Werth nur dann verschwinden würde, wenn φ und ψ t linear enthalten. Der Satz könnte also nur dann bestehen bleiben, wenn der Begriff der virtuellen Bewegung noch weiter als nothwendig eingeschränkt wird.

bei den ξ_i'' entsprechenden virtuellen Verschiebungen, die sonst völlig beliebig sein können, einen positiven Werth besitzt.

Auf den Fall, wo das System sich bereits in einem beliebigen Bewegungszustande befindet, lässt sich dieser Satz nicht unmittelbar übertragen. Auch kann man mit virtuellen Verschiebungen, welche lebendige Kraft hervorrufen, jetzt keinen klaren Sinn mehr verbinden, und die Benutzung solcher Vorstellungen muss nothwendiger Weise zu Missverständnissen führen. Trotzdem besteht ein dem obigen Maximaltheorem ähnliches aber allgemeineres, wenn man den strengen Begriff virtueller Bewegungen festhält, der im Vorstehenden entwickelt wurde. Dies soll jetzt gezeigt werden.

Wenn die Geschwindigkeiten der Systempuncte x_i zur Zeit $t = 0$ mit a_i bezeichnet werden, so sind dieselben zur Zeit t

$$3)\qquad \frac{d\,x_i}{d\,t} = a_i + t\,x_i'' + \frac{t^2}{2}\,x'''_i + \ldots$$

also ist die lebendige Kraft gegeben durch

$$2\,T = 2\,T_0 + 2\,t \sum X_i\,a_i + t^2 \sum m_i\,(x''^2_i + a_i\,x'''_i) + \ldots$$

wobei $T_0 = \frac{1}{2} \sum m_i\,a_i^2$ und vermöge der Differentialgleichungen der Bewegung

$$\sum m_i\,x'''_i\,a_i = \sum a_i\,\frac{d\,X_i}{d\,t} + \sum \lambda_s\,\frac{\partial^2 \varphi_s\,a_i\,a_k}{\partial\,x_i\,\partial\,x_k}$$

bei festen Verbindungen φ_s wird.

Man kann aber auch von einer relativen lebendigen Kraft τ sprechen, welche den relativen Geschwindigkeitscomponenten $x_i' - a_i$ entspricht; diese hat den Werth

$$4)\qquad \tau = \frac{t^2}{2} \sum m_i\,x''^2_i + \ldots$$

so dass

$$\Omega = 2\,T - \tau = 2\,T_0 + 2\,t \sum X_i\,a_i$$
$$+\, t^2 \sum \left(\frac{m_i\,x''^2_i}{2} + a_i\,\frac{d\,X_i}{d\,t} + \lambda_s\,\frac{\partial^2 \varphi_s\,a_i\,a_k}{\partial\,x_i\,\partial\,x_k}\right)$$

wird. Für eine virtuelle Bewegung, deren Bedingungen $\psi_\sigma = 0$ mit der Lage des Systems und jenen Geschwindigkeiten a_i verträglich sind, deren Beschleunigungen wie vorhin durch ξ''_i bezeichnet werden, kann man daher setzen

$$\Omega' = 2T_0 + 2t\sum X_i a_i + t^2 \sum\left(\frac{m_i \xi''^2_i}{2} + \frac{dX_i}{dt} a_i + \mu_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma a_i a_k}{\partial x_i \partial x_k}\right) + ..$$

Demnach wird

$$\Omega - \Omega' = \frac{t^2}{2} \sum m_i (x''^2_i - \xi''^2_i) + t^2 \sum\left(\lambda_s \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x_i \partial x_k} - \mu_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i \partial x_k}\right) a_i a_k + ..$$

Für die rechte Seite ergiebt sich aber weiter nach den Gleichungen 1) und 2)

$$\frac{t^2}{2} \sum m_i (x''_i - \xi''_i)^2$$

$$+ t^2 \sum \xi''_i \left(\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} - \mu_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i}\right) + \left(\lambda_s \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x_i \partial x_k} - \mu_\sigma \frac{\partial^2 \psi_\sigma}{\partial x_i \partial x_k}\right) a_i a_k$$

oder wegen der bekannten Identitäten

$$\sum \xi''_i \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial^2 \psi_\sigma}{\partial x_i \partial x_k} a_i a_k = 0$$

$$5) \quad \Omega - \Omega' = \frac{t^2}{2} \sum m_i (x''_i - \xi''_i)^2 + t^2 \sum \lambda_s \left(\xi''_i \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_s a_i a_k}{\partial x_i \partial x_k}\right) + ..$$

Unter der Voraussetzung, dass die Bedingungen $\psi_\sigma = 0$ die Bedingungen $\varphi_s = 0$ vollständig unter sich enthalten oder allgemeiner k der Functionen ψ_σ in deren ersten und zweiten Differentialquotienten mit denen der Functionen φ_s beziehlich für die Lage zur Zeit $t = 0$ übereinstimmen, d. h. k der Mannigfaltigkeiten $\psi = 0$ die $\varphi = 0$ beziehlich osculiren, ist aber der zweite Theil auf der rechten Seite von 5) Null, also

$$\Omega - \Omega' = \frac{t^2}{2} \sum m_i (x''_i - \xi''_i)^2 + ..$$

beständig positiv. Es ist mithin der Ueberschuss Ω der doppelten lebendigen Kraft $2T$ über die relative lebendige Kraft τ ein Maximum im Vergleich zu dem

entsprechenden Ueberschuss, der für das System in derselben hinreichend kleinen Zeit bei einer virtuellen Bewegung desselben entsteht.[1])

Für die Differenz $2(\tau - \tau_1)$ findet man nach 3) unter der Voraussetzung, dass die $\psi_\sigma = 0$ die $\varphi_s = 0$ vollständig enthalten,

$$2(\tau-\tau_1) = t^2 \sum m_i (x_i'' - \xi_i'')^2 - 2t^2 \sum \left(\lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i \partial x_k} - \mu_\sigma \frac{\partial \psi_\sigma}{\partial x_i \partial x_k} \right) a_i a_k;$$

dieselbe wird daher nicht, wie Herr Helm[2]) behauptet, der sich zur Ableitung einer Formel für diesen Werth virtueller Verschiebungen bedient hatte, durch den Ausdruck

$$t^2 (\sum m_i (x_i'' - \xi_i'')^2 - 2\, T_0)$$

dargestellt.

Das angegebene Maximaltheorem kann übrigens auch noch unter der Voraussetzung erweitert werden, dass die Bedingungsgleichungen $\psi_\sigma = 0$ nur mit den bereits bestehenden Geschwindigkeiten verträglich sind, d. h. die Mannigfaltigkeiten $\psi = 0$ die $\varphi = 0$ sämmtlich für die Lage bei $t = 0$ berühren. Schreibt man nämlich den zweiten Theil von 5) (rechts) in der Gestalt

$$t^2 \sum (\xi_i'' - x_i'')\, \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}$$

so erkennt man sofort:

Jener Ueberschuss ist auch ein Maximum gegenüber allen virtuellen Bewegungen, bei denen die Arbeit der Reactionen des Systems in Bezug auf die Abweichung $\xi_i'' - x_i''$ der Systempuncte einen positiven Werth hat.

Wir kehren jetzt zu den engeren Voraussetzungen über die $\psi_\sigma = 0$ zurück. Da die Maximumeigenschaft der Function Ω für die wirkliche Bewegung characteristisch ist, so muss

---

[1]) Bezeichnet man die Geschwindigkeiten der Punkte zur Zeit 0 und t durch v_i^0, v_i, den Winkel desselben durch ω_i, so ist

$$\Omega = T + \sum m_i v_i v_i^0 \cos \omega_i - T_0.$$

[2]) G. Helm, die Energetik in ihrer geschichtlichen Entwicklung, Leipz. 1898, p. 252.

man auch umgekehrt die Gleichungen derselben aus dieser Eigenschaft herleiten können. Wir beweisen daher den folgenden Satz:

Die Voraussetzung der Maximum-Minimumeigenschaft der Function Ω führt zu den Gleichungen der Bewegung, falls der allgemeine Satz über die Beziehung zwischen kinetischer Energie und Arbeit als gültig vorausgesetzt wird, d. h. die Bedingungen die Zeit nicht enthalten.

Entwickelt man in der Gleichung

$$T - T_0 = \int_0^t \sum X_i \, d x_i$$

beiderseits nach Potenzen von t, indem man für T seinen Werth aus 3) bildet, so folgt

$$t \sum m_i a_i x_i'' + \frac{t^2}{2} \sum (m_i x''^2_i + a_i m_i x'''_i) + \ldots$$

$$= t \sum X_i a_i + \frac{t^2}{2} \sum \left(x_i'' X_i + a_i \frac{d X_i}{d t} \right) + \ldots .$$

also müssen die Gleichungen

$$6) \quad \begin{aligned} &\sum m_i a_i x_i'' = \sum X_i a_i \\ &\sum (m_i x_i'' + a_i m_i x'''_i) = \sum \left(x_i'' X_i + a_i \frac{d X_i}{d t} \right) \end{aligned}$$

gelten. Der Ausdruck

$$\Omega = 2\, T_0 + 2\, t \sum a_i x_i'' m_i + t^2 \sum \left(\frac{m_i x''^2_i}{2} + m_i a_i x'''_i \right) + \ldots$$

wird daher

$$2\, T_0 + 2\, t \sum X_i a_i + \frac{t^2}{2} \sum \left(x_i'' X_i + a_i \frac{d X_i}{d t} - \frac{m_i x''^2_i}{2} \right) + \ldots$$

und soll ein Max.-Min. werden, falls die Bedingungsgleichungen

$$7) \quad \begin{aligned} &\sum m_i a_i x_i'' = \sum X_i a_i \\ &\sum \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} x_i'' + P_s = 0 \end{aligned}$$

für die x_i'' bestehen. Dies gibt

$$X_i - m_i x_i'' = \mu a_i - \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i};$$

multiplicirt man diese Gleichungen mit den a_i und summirt, so folgt nach 7) wegen

$$\sum a_i \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} = 0,$$

$$\mu \sum a_i^2 = 0.$$

Entweder sind nun alle a_i gleich Null; dann befindet sich das System in relativer Ruhe. Oder das System hat einen beliebigen Bewegungszustand, dann muss $\mu = 0$ sein. In beiden Fällen ergeben sich so die Gleichungen

$$m_i x_i'' = X_i + \sum \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i}$$

wie gezeigt werden sollte.

Wir geben dem bewiesenen Satze schliesslich noch die folgende Form:

Die Bewegung eines beliebigen materiellen Systems unter dem Einflusse irgend welcher Kräfte und unter festen Verbindungen ist in jedem Augenblicke dadurch characterisirt, dass der Ueberschuss der gewöhnlichen Beschleunigung der kinetischen Energie des Systems über die Beschleunigung der halben relativen kinetischen Energie desselben für die wirklich eintretende Bewegung einen grösseren Werth hat, als für irgend eine mit den Bedingungen verträgliche virtuelle Bewegung.

Mit allgemeinen Gesichtspuncten teleologischer Art dürfte sich derselbe in ungezwungener Weise nicht in Verbindung bringen lassen.

Der Satz kann wegen seiner Beschränkung auf feste Verbindungen weder das d'Alembert'sche noch das mit letzterem für Bedingungs-Gleichungen äquivalente Gauss'sche Princip ersetzen. Für das letztere erhält man übrigens im Anschluss an die entwickelten Anschauungen eine Ausdrucksweise, die

gewisse Vortheile bieten dürfte. Bewegt sich ein Punct des Systems, der zur Zeit $t = 0$ die Coordinaten x_i^0, die Geschwindigkeitscomponenten a_i hat, unter Einfluss der Kräfte X_i und der Bedingungen $\varphi_s = 0$, so sind seine Coordinaten zur Zeit t

$$x_i = x_i^0 + a_i t + x_i'' \frac{t^2}{2} + \ldots$$

und für eine virtuelle Bewegung

$$\xi_i = x_i^0 + a_i t + \xi_i'' \frac{t^2}{2} + \ldots$$

Bezeichnet man als Grösse des Zwanges den mit Hülfe der freien Bewegung jedes Punctes

$$(x_i) = x_i^0 + a_i t + \frac{X_i}{2 m_i} t^2 + \ldots$$

gebildeten Ausdruck

$$Z = \sum m_i [(x_i) - x_i]^2$$

so ist der Zwang für die virtuelle Bewegung

$$Z_1 = \sum m_i [(x_i) - \xi_i]^2.$$

Alsdann ist, ohne dass der Begriff der virtuellen Bewegung weiter eingeschränkt zu werden braucht, als dass die ersten und zweiten Differentialquotienten nach den x_i und t von k der Functionen $\psi_\sigma = 0$ beziehlich mit denen der Functionen $\varphi_s = 0$ für $t = 0$ übereinstimmen, die Differenz $Z - Z_1$ für eine hinreichend kleine Zeit stets negativ oder die Beschleunigung dritten Grades von Z ist für die wirkliche Bewegung stets kleiner als für jede virtuelle.

Sitzung vom 2. März 1901.

1. Herr C. v. Kupffer hält einen Vortrag: „Ueber einen bis jetzt unbekannten Gehirnnerven". Die Resultate werden anderweit veröffentlicht.

2. Herr J. Rückert berichtet über eine im Anatomischen Institut München von Herrn A. Hasselwander ausgeführte Untersuchung: „Ueber die Ossification des menschlichen Fussskelets".

3. Herr Ad. v. Baeyer spricht über „Aethyl Hydroperoxyd". Die Abhandlung wird an anderer Stelle zur Veröffentlichung gelangen.



Herr J. Rückert berichtet über eine im Anatomischen Institut München von Herrn A. Hasselwander[1]) ausgeführte Untersuchung:

Ueber die Ossification des menschlichen Fussskelets.

(Eingelaufen 2. März.)

Das Untersuchungsmaterial bestand in den Füssen von 277 Föten, Kinderleichen und lebenden Kindern. Sämmtliche Objekte, gleichviel ob lebende oder todte, wurden zuerst mittelst der Röntgenphotographie untersucht. Daran schloss sich für den grösseren Theil des Materials, nämlich die Füsse von 188 Föten und Kinderleichen, die anatomische Untersuchung, die theils durch makroskopische und mikroskopische Präparation, theils durch einfache Aufhellung mittelst der von O. Schultze empfohlenen Kaliglycerinbehandlung vorgenommen wurde. Die Kombination des röntgographischen mit dem rein anatomischen Untersuchungsverfahren hat den grossen Vortheil, dass sie Mängel, welche jeder dieser beiden Methoden bei alleiniger Anwendung anhaften, beseitigt.

Die Ergebnisse der Untersuchung sind folgende:

Calcaneus.

In mehr als der Hälfte der Fälle tritt bei $4^1/_2$—5-monatlichen Föten eine dünne periostale Knochenscheibe auf, die der

[1]) Herr Hasselwander wird später eine ausführliche mit Abbildungen versehene Darstellung seiner Untersuchungen an anderer Stelle publiciren.

hinteren Hälfte des Processus trochlearis aufsitzt. Dazu kommt im 6. Fötalmonat der enchondrale Kern. Vom Ende des 6. Monats sind die beiden Kerne verschmolzen, doch weist die kräftige periostale Schale am fibularen Umfang des späteren Calcaneus-Kernes noch beim Neugebornen und in den ersten Lebensmonaten auf die geschilderte Entstehung hin.

In der weiteren Entwicklung bilden der Calcaneus und ebenso der Talus sehr frühzeitig, nachdem der centrale Kern das Perichondrium erreicht hat, eine periostale Rinde. Hierdurch stehen diese Knochen in einem Gegensatz zu den übrigen Fusswurzelknochen, die erst nach Jahre langem Wachstum ihren Periostknochenüberzug erhalten.

Talus.

Die Ossification fand sich durchschnittlich im 7. Fötalmonat, ausnahmsweise schon im 6. An einem Teil der Füsse tritt die erste Ossification in Gestalt zweier kleiner Knochenkerne auf. Da diese offenbar sehr schnell verschmelzen, ist es möglich, dass die Anlage des Talus aus 2 Kernen ein häufiges Vorkommnis ist, obwohl die beiden Kerne nur ab und zu getrennt angetroffen werden.

Die Ossification im Processus posterior beginnt nicht vor dem 7. Jahr.

Naviculare.

Die Verknöcherung tritt meist mit $3^1/_2$ Jahren auf, ausnahmsweise schon mit 1 Jahr 8 Monaten, oder fehlte noch mit 4 Jahren. Nicht selten entsteht sie in Form zweier Knochenkerne.

Cuneiforme I.

Die Ossification erscheint gewöhnlich mit 3 Jahren. Ausnahmsweise war sie schon mit 1 Jahr 8 Monaten vorhanden und fehlte noch bei einem 3 Jahre 2 Monate alten Kinde.

Der Knochen legt sich zuweilen aus 2 Kernen an. Diese

liegen über einander, ein Verhalten, welches dem am fertigen Fuss beschriebenen Cuneiforme I. bipartitum entspricht.

Cuneiforme II.

Der Kern erscheint mit 3 Jahren, fast gleichzeitig mit dem Cun. I, wahrscheinlich ein wenig später. Er war stets einheitlich.

Cuneiforme III.

Die Ossification beginnt gewöhnlich im 5—6. postfötalen Monat, ausnahmsweise wurde sie schon im 2. Monat nach der Geburt gefunden und im 7. noch vermisst.

Cuboideum

verknöchert nicht vor dem 9., meist im 10. Fötalmonat. Nur einmal unter 36 Kindern des 1. Lebensjahres fand sich erst im 6. Monat die Vorbereitung zur Ossification. Beim Neugebornen ist der Kern in etwa 50% der Fälle vorhanden.

Im Cuboideum entsteht zuerst ein rundlicher, zuweilen doppelter Kern, dann ein zweiter lateral gelegener, der den ersten schalenförmig deckt und später mit ihm verschmilzt. Aus der Hakenform des vereinigten Kerns kann man nachträglich noch eine Zeit lang die Entstehung aus 2 Stücken erkennen.

Metatarsus.

Die Ossification der Diaphyse findet von der 9. Woche ab statt, wenigstens für einen Teil der Zehen: von der 10. Woche ab sind die Ossificationspunkte in sämtlichen Zehen vorhanden. Die Reihenfolge des Entstehens ist II. III. IV. V. I., wie schon einige frühere Autoren richtig angegeben haben.

Der Knochenkern der Epiphysen ist durchschnittlich mit 3 Jahren vorhanden, ausnahmsweise schon mit 2 Jahr 4 Monaten. Das älteste Kind, welches ausnahmsweise noch keine Epiphysenkerne besass, zählte 5 Jahre.

An der grossen Zehe, deren Metatarsus bekanntlich im Gegensatz zu dem der übrigen Zehen einen basalen Epiphysenkern

besitzt, erscheint der Ossificationspunkt zuerst, dann folgen die Köpfchen-Epiphysen II, III, IV und V.

An allen denjenigen Knorpelepiphysen, die einen Knochenkern bekommen, tritt an der Grenze zwischen Epiphyse und Diaphyse besonders intensive Säulenknorpelbildung auf. Dieser histologische Befund harmoniert mit den schon von anderen Autoren durch Messung konstatierten lebhafteren Wachstum an den betreffenden Epiphysen.

Nach den bisherigen Angaben in der Litteratur kommt am Metatarsus nur in der Köpfchenepiphyse der grossen Zehe eine Pseudoepiphysenbildung vor, in Wirklichkeit finden wir aber diesen Vorgang, der eine Uebergangsstufe zwischen der typischen Epiphysenbildung und dem gänzlichen Ausfall derselben vorstellt, ab und zu auch an den Basalepiphysen der Metatarsen, jedoch in etwas schwächerem Masse als an der Köpfchenepiphyse des Hallux.

Phalanx I.

Diaphyse. Die Ossification beginnt durchschnittlich in der 14. Fötalwoche, was mit der kürzlich gemachten Angabe von Lambertz übereinstimmt. Die Schwankungsbreite erstreckt sich von der 12. zur 16. Woche.

Die von dem eben genannten Autor statuierte Reihenfolge, nach welcher die Ossification der Basalphalangen zuerst an der ersten Zehe auftreten und von da fibularwärts bis zur V. Zehe fortschreiten soll, wurde nicht immer gefunden.

Der Kern der (proximalen) Epiphyse tritt gewöhnlich im Verlauf des 3. Jahres auf und zwar zuerst an den mittleren Zehen, zuletzt an den randständigen, mit einer Schwankungsbreite von 1 Jahr 5 Monat bis 3 Jahren.

Phalanx II.

Dass der Diaphysenkern an der Mittelphalanx später auftritt, als an den übrigen Phalangen, ist eine bekannte Thatsache, aber die Grösse des Unterschiedes ist in der Litte-

ratur für alle Zehen, namentlich für die V., viel zu gering angegeben, und ferner sind die Differenzen, welche zwischen den einzelnen Zehen in dieser Richtung sich ergeben, ungenügend berücksichtigt.

Es zeigt sich in dieser Hinsicht folgendes:

An der II. Zehe erscheint die Ossification der Mittelphalanx gewöhnlich im 6. Monat des Fötallebens, ausnahmsweise schon im 4., an Zehe III im 7. Fötalmonat, hie und da schon im 5., während sie im 9. noch fehlen kann, an Zehe IV ebenfalls schon im 7. Fötalmonat, jedoch mit einer Schwankungsbreite vom 5. Fötal- bis 7. Lebensmonat.

Eine besondere Stellung nimmt die Mittelphalanx der V. Zehe ein, insoferne der zeitliche Eintritt von deren Ossification in evidenter Weise davon abhängig ist, ob die knorplige Anlage dieses Skeletstücks von dem Knorpel der Endphalange getrennt oder mit ihm verschmolzen ist. Ist das erstere der Fall, was in etwa 50% der daraufhin untersuchten Kinder und Föten gefunden wurde, so erscheint der Knochenkern in der Diaphyse der Mittelphalanx durchschnittlich im 10. Fötalmonat, ausnahmsweise wurde er schon im 7. Monat des intranterinen Lebens konstatiert, und im 7. Monat nach der Geburt noch vermisst.

In der anderen Hälfte der Fälle dagegen, in welcher die oben genannte, von Pfitzner zuerst beschriebene Knorpelverschmelzung vorlag, trat der Kern mit grossen zeitlichen Schwankungen bei den einzelnen Individuen auf und erheblich später als bei der ersteren Kategorie.

Unter 61 untersuchten Individuen vom 7. Fötalmonat bis zum Ende des 2. Jahres fand er sich nur bei 6 Individuen vor, darunter einmal schon im 9. Fötalmonat, während die übrigen 5 Fälle dem 1. und 2. Lebensjahr angehörten. Konstant vorhanden ist er erst vom Ende des 3. Lebensjahres an. Dieses verspätete und für die einzelnen Zehen sehr ungleichmässige Auftreten der Ossification in den Mittelphalangen weist auf eine im Gang befindliche Rückbildung dieses Skeletstücks hin,

die vom fibularen Fussrand aus gegen den tibialen zu fortschreitet. Am fertigen Fussskelet existiert, wie Pfitzner eingehend gezeigt hat, eine allgemeine Neigung der Mittelphalangen zur Verkürzung.

Was den feineren Vorgang bei der Ossification der Mittelphalangen anlangt, so kann man hier drei auf die einzelnen Zehen folgendermassen sich verteilende Typen unterscheiden:

1) an der II. Zehe und bei einem Teil der Füsse an der III. Zehe, ausnahmsweise an der IV. tritt der normale Typus der Röhrenknochenbildung auf.

2) An der III. Zehe in einem Teil der Fälle, an der IV. Zehe in den meisten Fällen erscheint zuerst ein periostales Knochenplättchen am dorsalen Umfang der Diaphyse, und geht von dieser Stelle aus die enchondrale Ossification zapfenartig in die Tiefe,

3) an der IV. Zehe in einigen Fällen, und stets an der V. Zehe ist nur ein enchondraler Knochenkern vorhanden, wie Pfitzner schon beschrieben hat. Auch in dem histologischen Verhalten des Ossificationsvorganges macht sich somit eine Abstufung von den tibialen zu den fibularen Zehen bemerkbar.

Die Epiphyse der Mittelphalanx fehlt wie Pfitzner gezeigt hat stets an der V. Zehe, nur in einem Fall fand sich eine Pseudoepiphyse, an der II.—IV. ist immer eine Epiphyse oder Pseudoepiphyse vorhanden. Sie treten auf zwischen $2^1/_2$ und 3 Jahren, verfrüht schon mit 2 Jahren, während sie ausnahmsweise mit 4 Jahren 9 Monaten noch fehlen.

Auch in Bezug auf den Untergang der echten Epiphysen existiert eine Stufenreihe, die vom tibialen zum fibularen Fussrand führt: an der II. Zehe ist die Entwicklung einer echten Epiphyse die Regel, an der III. Zehe ist bei einem kleineren Teil der Fälle die Epiphyse durch eine Pseudoepiphyse ersetzt, an der IV. Zehe ist dies meist der Fall und an der V. ist überhaupt von einer Epiphysenbildung nichts mehr erhalten, abgesehen von dem seltenen Fall einer Pseudoepiphysenbildung daselbst.

Phalanx III.

Die Diaphyse der Endphalanx an der I.—IV. Zehe erscheint zwischen der 9. und 11. Fötalwoche. Ein grösserer Unterschied zwischen diesen 4 Zehen in Bezug auf das zeitliche Auftreten des Kernes besteht nicht; doch kann man sagen, dass die fibularen im Allgemeinen etwas später ossificieren als die tibialen und dass speciell die erste Zehe den übrigen stets vorangeht, so dass ihre Endphalanx der zuerst verknöchernde Röhrenknochen des Fusses ist.

In der Endphalanx der V. Zehe wurde erst vom 4. Fötalmonat an ein Knochenkern gefunden, doch wurde er öfters noch an erheblich älteren Füssen vermisst und zwar dann immer an solchen, die eine Verschmelzung mit der Mittelphalange besassen. Es macht sich also an der kleinen Zehe auch für die Endphalanx eine gewisse Inconstanz bemerkbar, wenn auch in viel geringerem Grade als für die Mittelphalange. Auch in Bezug auf den histologischen Vorgang der Ossification zeigt die Endphalange Schwankungen.

Pfitzner hat angegeben, dass an derselben im Gegensatz zu den übrigen Zehen die Knochenbildung auf die periostale Ossification der Endkappe beschränkt sei. Dies kann aber höchstens für einen Teil der Füsse Geltung haben, an denen sich in der That nur die periostale Endkappe vorfand, an anderen, vielleicht der Mehrzahl der Füsse, schliesst sich an diese Ossification eine enchondrale wie bei Zehe I—IV an.

Unter den Epiphysen der Endphalanx nehmen die der I und V eine besondere Stellung ein; es sollen daher zuerst die Epiphysen der Zehen II—IV besprochen werden. Hier tritt der Kern durchschnittlich im fünften Jahr auf, also ein wenig später als an den übrigen Phalangen. Ausnahmsweise wurde er schon bei 3 Jahren 1 Monat gesehen und in einem vereinzelten Fall noch mit 7 Jahren 4 Monaten an einer Zehe vermisst.

Bei Zehe V besteht ein durchgehender Unterschied, je nachdem eine Verschmelzung der Endphalanx mit der Mittelphalanx existiert oder nicht. Im letzteren Fall tritt der Epi-

physenkern zur gleichen Zeit auf, wie an den Zehen II—IV, eher noch etwas früher. Im ersteren Fall dagegen fehlt der Epiphysenkern vollständig. Es steht dies in Widerspruch zu den Angaben Pfitzner's, nach welchen der Epiphysenkern der V. Zehe, ohne dass eine Unterscheidung zwischen beiden Fällen gemacht wird, stets erhalten bleiben und gross werden soll. Es zeigt sich also an Zehe V bei Verschmelzung der beiden Phalangen auch an der Epiphyse der Endphalange eine entschiedene Rückbildungserscheinung.

Die Epiphyse der Endphalange an Zehe I steht zu denen der übrigen Zehen durch eine auffallend frühzeitige Ossification in einem unvermittelten Gegensatz. Der Kern tritt gewöhnlich im 3. Lebensjahr auf, wiederholt wurde er bei Kindern des zweiten Jahres konstatiert. Bei einem polydactylen Kind von $3^1/_2$ Monaten fand sich im Röntgenbild an beiden Füssen zwischen End- und Grundphalange der grossen Zehe ein kleiner Kern, der kaum anders denn als früh aufgetretener Epiphysenkern der Endphalange gedeutet werden konnte. Durch dieses frühe Auftreten der Epiphyse unterscheidet sich die Endphalange des Hallux nicht nur von den Endphalangen der übrigen Zehen, sondern von sämtlichen Röhrenknochen des Fusses.

In diesem Befund können diejenigen Forscher, welche am Daumen und der Grosszehe einen Ausfall der Mittelphalange annehmen, eine ontogenetische Unterlage für ihre Ansicht erblicken, indem sie sich vorstellen, dass die früh entstehende Epiphyse der Endphalanx einer Diaphyse der vermissten Mittelphalanx entspricht. Die Mittelphalanx des Hallux würde alsdann nicht verloren gegangen sein, sondern würde, nachdem sie sich mit der Endphalanx vereinigt — eine Vereinigung wie sie an den fibularen Zehen, besonders der V. (vgl. Pfitzner's Untersuchungen) jetzt noch im Gange ist — zur Bedeutung einer Epiphyse der Endphalange herabgesunken sein. Es erscheinen aber solche Schlussfolgerungen deshalb zum mindesten verfrüht, weil für die Vorfrage, ob überhaupt an Pollex und Hallux ein Glied verloren gegangen ist, die vergleichend anatomische Unterlage fehlt.

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 80. Geburtstages Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

sowie des 142. Stiftungstages der Akademie

am 13. März 1901.

Die Sitzung eröffnet der Präsident der Akademie, Geheimrath Dr. K. A. v. Zittel, mit folgender Ansprache:

Königliche Hoheiten!
Hochgeehrte Festversammlung!

Noch ist der Jubel, welcher gestern ganz Bayern durchbraust hat, nicht völlig verklungen; noch herrscht in allen Theilen der Wittelsbach'schen Lande eine gehobene Feststimmung, gilt es doch den 80. Geburtstag unseres ehrwürdigen und geliebten Regenten zu feiern.

Auch die Königl. bayer. Akademie der Wissenschaften, diese ureigenste Schöpfung der Wittelsbacher, wollte nicht zurückbleiben, wenn es sich darum handelte, ihrem erlauchten Protektor die Gefühle der Dankbarkeit und Ergebenheit zu Füssen zu legen. Eine Deputation, bestehend aus dem Präsidenten und den Classensekretären, welcher sich ein Vertreter der historischen Commission anschloss, haben Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten Luitpold ihre Glückwünsche dargebracht, die auch in huldvollster Weise entgegen genommen wurden.

*

Und in der That, wenn wir zurückblicken auf die Entwickelung unserer Akademie und der im General-Conservatorium der wissenschaftlichen Sammlungen vereinigten Museen und Institute während der weisen und erleuchteten Regierung unseres jetzigen Protektors, so haben wir alle Ursache dankbar zu sein.

Getreu den ruhmreichen Ueberlieferungen seiner Königlichen Vorgänger hat auch Seine Königliche Hoheit Prinz Luitpold unserer Akademie in reichem Masse die Unterstützung und Förderung zu Theil werden lassen, ohne welche sie ihre wissenschaftlichen Aufgaben nicht hätte erfüllen können.

In den Jahren 1887—89 fand der Umbau des Wilhelminschen Gebäudes statt, durch welchen die Akademie diesen würdigen Festsaal, günstig gelegene und helle Sitzungszimmer und grössere Geschäftsräume erhielt. Eine durchgreifende Aenderung in der Vertheilung der Localitäten des Wilhelminum gestattete eine Neuaufstellung und bessere Anordnung der Museen, wodurch manche schwere Missstände beseitigt oder doch gemindert wurden. Gleichzeitig erhielten die naturhistorischen Sammlungen den modernen Anforderungen der Forschung und des Unterrichts entsprechende Lehr-Institute.

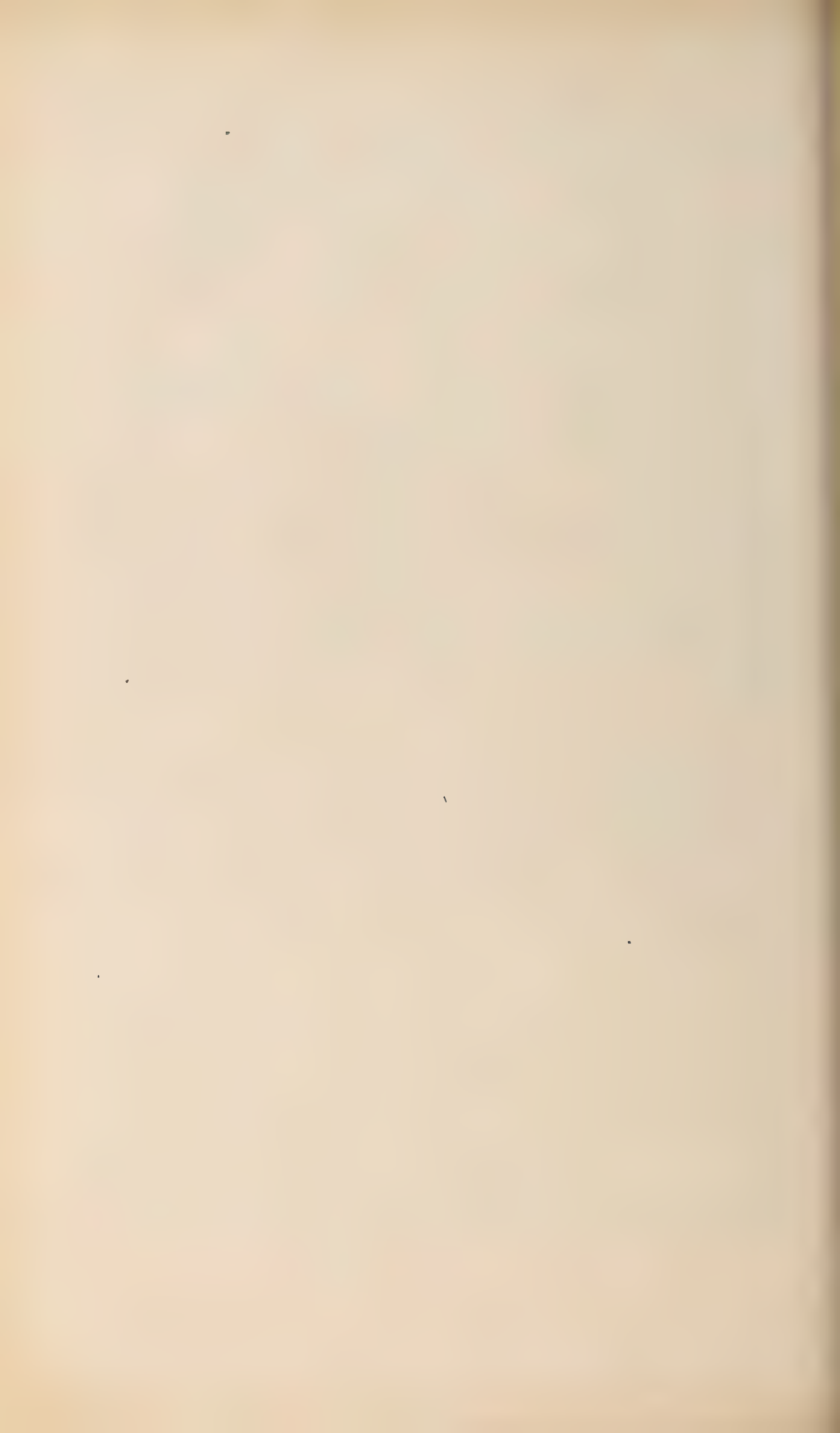
Diese Einrichtung bedeutet wohl die einschneidendste Umgestaltung, welche unsere wissenschaftlichen Staatssammlungen erfahren haben. Bis dahin war ihre Benützung eigentlich nur den Beamten der betreffenden Conservatorien und einzelnen begünstigten Specialisten gestattet; mit der Errichtung der Lehr-Institute aber wurden sie auch vorgeschritteneren Studierenden zugänglich und welchen Aufschwung die naturhistorischen Disciplinen in München seitdem genommen haben, geht aus der stattlichen Anzahl von wissenschaftlichen Arbeiten hervor, welche in den neuen Instituten alljährlich ausgeführt werden.

Mit warmem Interesse hat unser hoher Protektor das Gedeihen der Akademie und der wissenschaftlichen Sammlungen des Staates verfolgt und so oft sich Gelegenheit bot, dasselbe durch allerhöchstes Eingreifen zu fördern, durften wir auf das huldvollste Wohlwollen rechnen. Auch den mancherlei Stiftungen und Zuwendungen, durch welche die Akademie in den

letzten Jahren finanziell gekräftigt und zu grösseren wissenschaftlichen Unternehmungen befähigt wurde, hat Seine Königliche Hoheit stets die lebhafteste Anerkennung gezollt.

Unbehelligt von äusseren Angriffen und inneren Dissidien war es der Akademie vergönnt unter der schirmenden Hand ihres allerhöchsten Protektors ihre Thätigkeit auszuüben. Sind auch keine besonderen Ereignisse in den letzten zwei Jahrzehnten zu verzeichnen, so war doch der Fortschritt in ihrer ganzen Entwickelung ein durchaus befriedigender. Entsprechend ihrer Bestimmung ist sie eine Freistätte der Forschung geblieben und wie unter ihrem erlauchten Stifter und den bisherigen Königen von Bayern, so erfreut sie sich auch heute der unumschränkten geistigen Freiheit. Und dies ist die werthvollste Gabe, welche wir unserem gütigen Schirmherrn verdanken, denn nur da, wo dem Suchen nach Wahrheit keine Hindernisse im Wege stehen, kann ächte Wissenschaft gedeihen. Möge sich unsere Akademie noch lange des Schutzes und der Huld Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten Luitpold erfreuen!

Um die festliche Stimmung der heutigen Freudenfeier nicht zu stören, sollen die Nekrologe unserer verstorbenen Mitglieder, sowie die Erinnerungsrede auf unseren unvergesslichen früheren Präsidenten Geh. Rath von Pettenkofer auf die nächste Festsitzung im Herbst verschoben werden.



Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 4. Mai 1901.

1. Herr W. Dyck legt zwei Abhandlungen des correspondirenden Mitgliedes der Classe, Rektor Dr. Georg Recknagel in Augsburg, vor

a) über Abkühlung geschlossener Lufträume durch Wärmeleitung,

b) über Erwärmung geschlossener Lufträume.

2. Herr H. Seeliger überreicht eine Abhandlung des Herrn Prof. Dr. M. Wolf, Direktor der Sternwarte in Heidelberg: „Die Entdeckung und Catalogisirung von kleinen Nebelflecken durch die Photographie.“

3. Herr Aug. Rothpletz hält einen Vortrag „Ueber die Jodquellen in Tölz.“

4. Herr F. Lindemann legt eine Arbeit des auswärtigen Mitgliedes der Classe, Prof. Dr. Aurel Voss in Würzburg vor: „Bemerkungen über die Prinzipien der Mechanik, I. Ueber die energetische Begründung der Mechanik.“



Ueber Abkühlung geschlossener Lufträume durch Wärmeleitung.

Von **G. Recknagel.**

(*Eingelaufen 20. März.*)

1. Voraussetzungen. Ein mit Luft von konstanter Masse (L) und überall gleich hoher Temperatur (J) erfüllter Raum ist durch seine Begrenzung von der übrigen Luft vollkommen abgeschlossen. Er kehrt der äusseren freien Luft, deren Temperatur (A) konstant angenommen wird, nur eine homogene Wand (Mauer) von gegebener Fläche (F) und gleichmässiger Dicke (δ) zu. Die ganze übrige Begrenzung wird als wärmedicht angenommen, d. h. sie gibt weder Wärme an die Luft des Raumes ab, noch nimmt sie solche von ihr auf.

Denkt man sich die Mauer, auf deren beiden Grenzflächen die Abscissenaxe senkrecht stehen soll, durch Schnitte, die den Grenzflächen parallel geführt sind, in Schichten von der Dicke dx geteilt, so wird angenommen, dass jede einzelne Schicht von Anfang an durchaus die gleiche Temperatur hat, und dass die Temperaturen der Schichten von innen nach aussen stetig abnehmen. Bezeichnet man die Anfangstemperaturen 1) der inneren Luft mit J_0, 2) der Innenwand mit $\mathfrak{T}_{i0}$, 3) der Aussenwand mit $\mathfrak{T}_{a0}$, 4) der Aussenluft mit A und 5) der Mauerschicht, die sich in der Entfernung x von der Innenwand befindet, mit U_0, so wird demnach vorausgesetzt

$$J_0 > \mathfrak{T}_{i0} > U_0 > \mathfrak{T}_{a0} > A.$$

Ferner $U_0 = f(x)$ und $\frac{dU_0}{dx}$ durchaus negativ.

Es soll untersucht werden, wie sich von diesem „Anfangszustande" aus im Laufe der Zeit (Z) die Temperaturen J der Innenluft, $\mathfrak{T}_i$ der Innenwand, U der Mauerschicht im Abstande x, $\mathfrak{T}_a$ der Aussenwand verändern, und wieviel Wärme in gegebener Zeit an die Aussenluft verloren geht. Die genannten vier Temperaturen sind somit als Funktionen der Zeit zu denken, und diese Funktionen sollen ermittelt werden.[1])

2. Die Grundlage der folgenden Rechnung gibt der Satz: die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit aus der Schicht (x, U) in die Schicht ($x + dx$, $U - dU$) übergeht, ist dem Temperaturgefälle

$$-\frac{dU}{dx}$$

proportional.

Die Wärmemenge, die man dem Temperaturgefälle als Faktor beizugeben hat, um die in der Zeiteinheit übergehenden Kalorien zu erhalten, hängt von der Grösse der gewählten Zeiteinheit, von der Grösse der Wandfläche und vom Material der Mauer ab. Nimmt man als Zeiteinheit die Stunde, als Wandfläche ein Quadratmeter, so heisst der dem Temperaturgefälle beizugebende Faktor λ das innere Leitungsvermögen des betreffenden Materials.

Demnach ist die bei dem Gefälle $\left(-\frac{dU}{dx}\right)$ in der Stunde

[1]) Es werden dabei die Hilfsmittel benützt, welche Fourier in der Theorie analytique de la Chaleur gibt. Doch darf bemerkt werden, dass Fourier den Fall einer veriablen Lufttemperatur überhaupt nicht behandelt hat, und dass das von ihm Gebotene für diesen Fall nicht ausreicht. Von späteren Arbeiten in dieser Richtung ist mir durch Byerly, An Elem. treatise on Fourier's Series etc. S. 123 bekannt, dass E. W. Hobson das Problem behandelt hat: die Wärmebewegung in einem unendlich langen festen Körper von der Anfangstemperatur Null zu ermitteln, wenn eine ebene Grenzfläche derselben an Luft grenzt, deren Temperatur eine gegebene Funktion der Zeit ist. Der von Byerly gegebenen Probe nach zu urteilen, erfolgt die Behandlung durch das ebenfalls von Fourier eingeführte $\int e^{-z^2} dz$, dessen Grenzen den Bedingungen des Problems angepasst werden.

durch 1 Quadratmeter des Querschnittes (x, U) einer Mauer vom inneren Leitungsvermögen λ gehende Wärmemenge

$$-\lambda \frac{dU}{dx} \text{ Kalorien.}$$[1]

3. Indem man von der Wärmemenge, welche in der Zeit dz in die Schicht (x, U) von der Dicke dx eintritt, die gleichzeitig austretende Wärmemenge subtrahiert, bleibt die zur Temperaturerhöhung $\frac{dU}{dz} dz$ der Schicht verwendete Wärme übrig, für welche man mittelst eben dieser Temperaturerhöhung noch einen zweiten Ausdruck gewinnt. Durch Vergleichung beider erhält man die Differenzialgleichung

$$\frac{dU}{dz} = \frac{\lambda}{s w} \frac{d^2 U}{d x^2}, \tag{I}$$

in welcher S das Gewicht eines Kubikmeters Mauer, w die Wärmekapazität des Materials bezeichnet.[2] Statt $\frac{\lambda}{s w}$ wird künftig $\varkappa$ geschrieben.

4. Dieser Differenzialgleichung genügt die Funktion

$$U = A + (a \cos m x + b \sin m x)\, e^{-\varkappa m^2 Z}. \tag{II}$$

Dieselbe enthält die drei Konstanten m, a, b, mittelst deren man den Eigentümlichkeiten des Problems gerecht werden kann, und überdies die Annahme, dass sich mit unendlich wachsender Zeit die Temperatur der Mauer überall der konstanten Temperatur der äusseren Luft nähert.[3])

5. Einführung der Eigentümlichkeiten des Problems. Die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit von der Aussenwand (F) der Mauer abgeht, nämlich

$$F(\mathfrak{T}_a - A)\, h_2$$

[1]) Fourier, Chap. I Nr, 72 und an anderen Orten.
[2]) Fourier, Chap. II Nr. 142.
[3]) Fourier, Chap. IV Nr. 239 und ff.

(wobei h_2 den äusseren Leitungskoeffizienten der Aussenwand bezeichnet), ist der Wärmemenge gleich, welche in derselben Zeit durch die äusserste Schicht der Mauer geht, nämlich

$$-F\lambda \left|\frac{dU}{dx}\right|_\delta,$$

wobei durch den Index δ angedeutet werden soll, dass in $\frac{dU}{dx}$ der Grenzwert δ an die Stelle von x gesetzt werden soll.[1])

Die Gleichung

$$(\mathfrak{T}_a - A)\, h_2 = -\lambda \left|\frac{dU}{dx}\right|_\delta \tag{III}$$

geht durch Substitution aus II ($U = \mathfrak{T}_a$ für $x = \delta$) über in

$$h_2 (a \cos m\,\delta + b \sin m\,\delta) = \lambda\, m\, (a \sin m\,\delta - b \cos m\,\delta). \tag{IV}$$

Man erhält so die erste Beziehung zwischen den eingeführten Konstanten a, b, m, den Leitungsvermögen λ, h_2 und der Mauerstärke δ.

Dividiert man durch $\lambda\, a \cos m\,\delta$, schreibt p_2 für $\frac{h_2}{\lambda}$, β für $\frac{b}{a}$ und löst nach $\operatorname{tang} m\,\delta$ auf, so erhält man

$$\operatorname{tang} m\,\delta = \frac{p_2 + \beta m}{m - \beta p_2} \tag{IVa}$$

Denkt man sich β bestimmt, so ergeben sich hieraus unendlich viele Werte von m von der Form

$$m_n = [2(n-1) + \gamma_n] \frac{\pi}{2\,\delta},$$

worin nach und nach für n alle ganzen positiven Zahlen von 1 bis ∞ zu setzen sind, während γ_n als ächter Bruch gedacht ist.

Es ist demnach eine Erweiterung der Gleichung II vorzunehmen, so dass rechts eine unendliche Reihe von Gliedern auftritt, die dem ersten konform gebildet sind.

---

[1]) Fourier, Chap. II Nr. 146—154.

$$
\begin{aligned}
U = A &+ (a_1 \cos m_1 x + b_1 \sin m_1 x)\, e^{-\varkappa m_1^2 z} \\
&+ (a_2 \cos m_2 x + b_2 \sin m_2 x)\, e^{-\varkappa m_2^2 z} \\
&+ \ldots\ldots\ldots \\
&+ (a_n \cos m_n x + b_n \sin m_n x)\, e^{-\varkappa m_n^2 z} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\qquad \text{(II a)}
$$

Zur Abkürzung soll im Folgenden e_1 für $e^{-\varkappa m_1^2 z}$, e_2 für $e^{-\varkappa m_2^2 z}$, e_n für $e^{-\varkappa m_n^2 z}$ geschrieben werden.

6. Fortsetzung. Wie für die Aussenwand so gilt analog auch für die Innenwand die Gleichung

$$(J - \mathfrak{T}_i)\, h_1 = -\lambda \left|\frac{dU}{dx}\right|_0 \qquad \text{(V)}$$

welche aussagt, dass die in der Zeiteinheit vom Quadratmeter aufgenommene Wärme $(J - \mathfrak{T}_i)\, h_1$, derjenigen gleich ist, die gleichzeitig durch die innerste Mauerschicht, ihrem Temperaturgefälle und ihrer Leitungsfähigkeit gemäss, in die Mauer eindringt.

Setzt man in Gl. (II a) $x = 0$, so geht U in $\mathfrak{T}_i$ über, und es wird

$$\mathfrak{T}_i - A = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \ldots = \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n e_n).$$

Ferner ist

$$\left|\frac{dU}{dx}\right|_0 = \sum_{n=1}^{n=\infty} (b_n m_n e_n).$$

Durch Substitution dieser Werte in Gl. V erhält man einen Ausdruck für die Temperatur J der Innenluft, nämlich $\left(\frac{h_1}{\lambda} = p, \text{ gesetzt}\right)$

$$J = A + (a_1 - \frac{1}{p_1} b_1 m_1)\, e_1 + (a_2 - \frac{1}{p_1} b_2 m_2)\, e_2 + \ldots$$

oder

$$J = A + \sum \left[(a_n - \frac{1}{p_1} b_n m_n)\, e_n\right] \qquad \text{(V a)}$$

Ein zweiter Ausdruck für die Temperatur J wird auf folgende Weise gefunden.

Bezeichnet man mit $(-dJ)$ die Aenderung, welche die Temperatur J in der Zeit dz dadurch erfährt, dass der Luft die Wärmemenge

$$-\lambda \left|\frac{dU}{dx}\right|_0 F\,dz$$

entzogen wird, mit L die (konstant angenommene) Masse der eingeschlossenen Luft, mit c ihre Wärmekapazität, so ist

$$-dJ\,L\,c = -\lambda \left|\frac{dU}{dx}\right|_0 F\,dz,$$

was sich, da $\left|\frac{dU}{dx}\right|_0$ eine Funktion der Zeit Z allein ist, sofort integrieren lässt.

Da für $Z = 0$, $J = J_0$, erhält man

$$(J_0 - J)\,L\,c = \frac{\lambda F}{\varkappa} \Sigma \left[\frac{b_n}{m_n}(e_n - 1)\right].$$

Erinnert man sich an den Wert von $\varkappa = \frac{\lambda}{s\,w}$, dividiert beiderseits durch $F\,s\,w$ und setzt den im allgemeinen kleinen Bruch $\frac{L\,c}{F\,s\,w} = \varrho$, so erhält man die Form

$$(J_0 - J)\,\varrho = \Sigma \left[\frac{b_n}{m_n}(e_n - 1)\right] \tag{VI}$$

Nach Gl. (Va) geht J für $Z = \infty$ oder $e_n = 0$ in A über. Somit gilt auch

$$(J_0 - A)\,\varrho = -\Sigma \left(\frac{b_n}{m_n}\right) \tag{6}$$

Zieht man Gl. VI von Gl. (6) ab, so bleibt

$$J = A - \frac{1}{\varrho} \Sigma \left[\frac{b_n}{m_n} e_n\right]. \tag{VI a}$$

Da nun die beiden Ausdrücke für die Temperatur J, welche die Innenluft zur Zeit Z hat, identisch sein müssen, so

folgt aus (Va) und (VIa) die Gleichheit der Koeffizienten beider Reihen:

$$a_n - \frac{1}{p_1} b_n m_n = - \frac{b_n}{\varrho m_n}$$

und somit eine zweite Beziehung zwischen den eingeführten Konstanten a, b, m, welche alsbald in der Form $\left(\frac{b_n}{a_n} = \beta_n\right)$

$$\beta_n = - p_1 \frac{\varrho m_n}{p_1 - \varrho m_n^2} \tag{VII}$$

Verwendung finden wird.

7. Berechnung der m. Indem man aus (VII) in (VIa) substituiert, erhält man

$$m \operatorname{tang} m \delta = p_2 - \frac{\varrho (m^2 + p_2^2)}{1 - \varrho \left(\frac{m^2}{p_1} - p_2\right)},$$

wo m die einzige Unbekannte ist.

Da

$$m = (2(n-1) + \gamma) \frac{\pi}{2 \delta},$$

so wird allgemein

$$\operatorname{tang} m \delta = \operatorname{tang} \left(\gamma \frac{\pi}{2}\right).$$

Da δ bekannt und n die gewählte Ordnungszahl der m ist, so ist auch im Werte von m der Bruch γ die Unbekannte, und z. B. für $\delta = \frac{1}{4}$ Meter das dritte m von der Form

$$m_3 = (4 + \gamma_3) 2 \pi.$$

Diese Einführung des γ bietet den Vorteil, dass bei Versuchen mit nahe liegenden Werten von γ die rechte Seite nur geringen Aenderungen unterliegt, während die linke Seite sehr empfindlich reagiert.

8. Berechnung der a. In der Reihe

$$U - A = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[a_n (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x) e^{-\varkappa m_n^2 z}\right]$$

können nun die m und β aus den Konstanten des Problems (h_1, h_2, λ, δ, ϱ) berechnet werden. Es erübrigt noch, die Koeffizienten a zu bestimmen, was dadurch geschieht, dass man den „Anfangszustand", d. h. die Funktion von x, durch welche der Ueberschuss der Anfangstemperatur U_0 der Mauer über A gegeben ist, durch die Reihe

$$U_0 - A = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[a_n \left(\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x \right) \right] \qquad \text{(VIII)}$$

darstellt. Hiefür stehen noch die Koeffizienten a zur Verfügung.[1])

---

[1]) Fourier hat für solche Darstellungen eine Methode angegeben, die ich am ausführlichsten Chap. VI Nr. 315 und 316 beschrieben finde, wo sie verwendet wird, um den Anfangszustand eines unendlich langen Cylinders darzustellen. Auf den vorliegenden Fall übertragen, würde die Vorschrift etwa so lauten: Es sei $U_0 - A = f(x)$ und $\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x$ mit u_n bezeichnet, so soll durch geeignete Bestimmung der a werden

$$f(x) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \ldots . a_n u_n + \ldots$$

„Um den ersten Koeffizienten (a_1) zu bestimmen, multipliziere man jedes Glied der Gleichung mit $\sigma_1 \, d\,x$, wobei σ_1 eine Funktion von x ist, und integriere dann von $x = 0$ bis $x = \delta$. Die Funktion σ_1 ist so zu bestimmen, dass nach Ausführung der Integrationen die rechte Seite der Gleichung sich auf das erste Glied reduziert, d. h. dass alle übrigen Integrale Null werden. Um den zweiten Koeffizienten a_2 zu bestimmen, multipliziert man mit $\sigma_2 \, d\,x$ etc." ..... „Es handelt sich jetzt darum, die Funktionen $\sigma_1, \sigma_2 \ldots$ zu finden." Fourier gibt hiefür in Nr. 316 eine Anleitung, die sich zwar auf das spezielle Problem des Cylinders bezieht, aber leicht auf andere Fälle übertragen werden kann.

Ein übersichtliches Beispiel hiezu findet man Chap. V Nr. 291, wo der Anfangszustand $F(x)$ einer Kugel durch die Reihe

$$F(x) = \frac{1}{x} \left(a_1 \sin n_1 x + a_2 \sin n_2 x + a_3 \sin n_3 x \ldots \right)$$

dargestellt werden soll, und die n ebenso wie meine m die Wurzeln einer transscendenten Gleichung $\left| \frac{n\,X}{\operatorname{tang} n\,X} = 1 - h\,X \right|$ sind, die ähnlich wie Gl. (IVa) durch Vergleichung der von der Oberfläche abgehenden mit der aus der äussersten Kugelschicht heraus dringenden Wärme gefunden ist. (X ist der Kugelradius.) Fourier multipliziert, um a_1 zu bestimmen, mit $x \sin n_1 x$, integriert zwischen den Grenzen 0 und X, und kann mit-

Um den Koeffizienten a_r zu bestimmen, multipliziert man beide Seiten der Gl. VIII mit

$$(\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x)\, d x$$

und integriert zwischen den Grenzen 0 und δ.

Links erhält man eine Funktion von $m_r, \delta \ldots$, die mit $\varphi(m_r)$ bezeichnet werden soll:

$$\varphi(m_r) = \int_0^\delta (U_0 - A)(\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x)\, d x.$$

Rechts erhält man eine unendliche Reihe, deren allgemeines (n^{tes}) Glied:

$$t_n = a_n \int_0^\delta (\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x)(\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)\, d x$$

untersucht werden soll.

Das unbestimmte Integral bringt man leicht auf die Form:

$$\frac{a_n}{m_r^2 - m_n^2} \left\{ m_r \sin m_r x \cos m_n x - m_n \cos m_r x \sin m_n x \right.$$
$$- \beta_r (m_r \cos m_r x \cos m_n x + m_n \sin m_r x \sin m_n x)$$
$$+ \beta_n (m_r \sin m_r x \sin m_n x + m_n \cos m_r x \cos m_n x)$$
$$\left. - \beta_r \beta_n (m_r \cos m_r x \sin m_n x - m_n \sin m_r x \cos m_n x) \right\}$$

---

telst der transscendenten Gleichung nachweisen, dass rechts alle Integrale verschwinden bis auf das erste.

In ganz analoger Weise führt die Methode Fouriers zum Ziel, wenn man sich im vorliegenden Probleme auf die Annäherung beschränkt, die man unter Ausserachtlassung des Einflusses der Luft ($\beta = 0$) gewinnt.

Die Schwierigkeit der hier behandelten Aufgabe fand ich darin, dass für $u_1 = \cos m_1 x + \beta_1 \sin m_1 x$ eine Funktion, welche die Rolle des obigen σ_1 oder des beispielsweisen $x \sin n_1 x$ übernehmen konnte, nicht zu ermitteln war. Am günstigsten gestaltete sich die Rechnung für $\sigma_1 = u_1$. Zwar verschwanden die Integrale auf der rechten Seite nicht, sondern bildeten jedesmal eine unendliche Reihe bestimmter mit den Koeffizienten a multiplizierter Grössen. Die Lösung gelang aber dadurch, dass die Summe dieser Reihe angegeben werden konnte. Der Text gibt die detaillierten Nachweise.

daraus folgt:

$$t_n = \frac{a_n}{m_r^2 - m_n^2} \Big\{ m_r \sin m_r \delta \cos m_n \delta - m_n \cos m_r \delta \sin m_n \delta$$
$$- \beta_r (m_r \cos m_r \delta \cos m_n \delta + m_n \sin m_r \delta \sin m_n \delta)$$
$$+ \beta_n (m_r \sin m_r \delta \sin m_n \delta + m_n \cos m_r \delta \cos m_n \delta)$$
$$- \beta_r \beta_n (m_r \cos m_r \delta \sin m_n \delta - m_n \sin m_r \delta \cos m_n \delta) \Big\}$$
$$+ a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2}.$$

Es lässt sich nachweisen, dass der Ausdruck in {} Null ist. Gemäss Gl. (IV) ist für jedes m und das zugehörige β

$$\frac{m(\sin m\delta - \beta \cos m\delta)}{\cos m\delta + \beta \sin m\delta} = \frac{h_2}{\lambda}.$$

Somit

$$\frac{m_r(\sin m_r \delta - \beta_r \cos m_r \delta)}{\cos m_r \delta + \beta_r \sin m_r \delta} = \frac{m_n(\sin m_n \delta - \beta_n \cos m_n \delta)}{\cos m_n \delta + \beta_n \sin m_n \delta}.$$

Führt man hier die Multiplikation mit dem Produkte der Nenner aus und ordnet nach den β, so erhält man das Behauptete: $\{\} = 0$.

Es verschwindet somit in jedem Gliede (t_n), in welchem m_n von m_r verschieden ist, der erste Summand, und erhält sich nur in dem einen Gliede t_r, in welchem wegen $n = r$ auch der Nenner $m_r^2 - m_n^2$ zu Null wird, in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, deren wirklicher Wert noch zu bestimmen ist und vorläufig durch $a_r Q$ bezeichnet werden soll.

Der zweite Summand von t_n:

$$a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2}$$

wird von dem Nenner $m_r^2 - m_n^2$ frei, wenn man aus Gl. VII die Werte der β, nämlich

$$\beta_r = - \frac{\varrho p_1 m_r}{p_1 - \varrho m_r^2}, \quad \beta_n = - \frac{\varrho p_1 m_n}{p_1 - \varrho m_n^2}$$

einsetzt, und erhält die Form:

$$- \frac{a_n \varrho p_1^2}{(\varrho m_r^2 - p_1)(\varrho m_n^2 - p_1)}$$

$$= \frac{p_1}{p_1 - \varrho m_r^2} \cdot \left(- \frac{a_n p_1 \varrho}{p_1 - \varrho m_n^2} \right)$$

$$= \frac{\beta_r}{\varrho m_r} \cdot \left(- \frac{a_n \beta_n}{m_n} \right) \text{ oder } \frac{\beta_r}{\varrho m_r} \left(- \frac{b_n}{m_n} \right).$$

Somit gilt die Gleichung

$$\varphi(m_r) = a_r Q + \frac{\beta_r}{\varrho m_r} \left(- \frac{b_1}{m_1} - \frac{b_2}{m_2} - \ldots \frac{b_r}{m_r} \ldots - \frac{b_n}{m_n} \ldots \right)$$

oder

$$\varphi(m_r) = a_r Q + \frac{\beta_r}{\varrho m_r} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(- \frac{b_n}{m_n} \right).$$

Nun ist aber nach Gl. (6)

$$(J_0 - A) \varrho$$

die Summe der Reihe $\sum \left(- \frac{b_n}{m_n} \right)$. Folglich wird

$$\varphi(m_r) = a_r Q + \frac{\beta_r}{m_r} (J_0 - A). \tag{IX}$$

Es ist noch Q zu bestimmen.

In der Reihe $\frac{\beta_r}{\varrho m_r} \sum \left(- \frac{b_n}{m_n} \right)$ ist auch der zweite Summand des Gliedes t_r enthalten, nämlich

$$\frac{\beta_r}{\varrho m_r} \left(- \frac{b_r}{m_r} \right) = - \frac{a_r}{\varrho} \frac{\beta_r^2}{m_r^2},$$

so dass der volle Wert desselben ist

$$t_r = a_r Q - \frac{a_r}{\varrho} \left(\frac{\beta_r}{m_r} \right)^2.$$

Andererseits ist (unter Benützung von Gl. IV)

$$t_r = a_r \int_0^\delta (\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x)^2 \, d x$$

$$= a_r \left[\delta \frac{1 + \beta_r^2}{2} + \left(1 + \frac{\beta_r}{m_r} p_2\right) \cdot \frac{\sin m_r \delta}{2 m_r} \cdot \frac{\cos (m_r \delta - \varphi_r)}{\cos \varphi_r} \right] \quad \text{(X)}$$

wobei $\beta_r = \operatorname{tang} \varphi_r$ gesetzt ist.

Schreibt man zur Abkürzung für das mit a_r multiplizierte Integral das Zeichen B_r, so dass

$$t_r = a_r B_r,$$

so folgt nun Q aus

$$a_r B_r = a_r Q - \frac{a_r}{\varrho} \left(\frac{\beta_r}{m_r}\right)^2$$

$$Q = B_r + \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\beta_r}{m_r}\right)^2.$$

Nach Substitution dieses Ausdruckes in IX wird der gesuchte Koeffizient

$$a_r = \frac{q\,(m_r) - \frac{\beta_r}{m_r} (J_0 - A)}{B_r + \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\beta_r}{m_r}\right)^2}. \quad \text{(XI)}$$

---

9. Zusammenstellung der Resultate.

1) Für die Temperatur U, welche die im Abstande x von der Innenwand befindliche Schicht der Mauer zur Zeit Z besitzt, gilt

$$U - A = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[a_n (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x) \, e^{-\varkappa m_n^2 Z} \right].$$

Zunächst sind die m nach dem in Nr. 7 angegebenen Verfahren zu berechnen, worauf die β aus Nr. 6, Gl. VII erhalten werden.

Schliesslich erhält man die a, wenn der Anfangszustand $(U_0 - A)$ der Mauer und die anfängliche Temperatur (J_0) der eingeschlossenen Luft bekannt sind, aus Nr. 8 Gl. X

$$a_n = \frac{\varphi(m_n) - \frac{\beta_n}{m_n}(J_0 - A)}{B_n + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\beta_n}{m_n}\right)^2},$$

wobei

$$\varphi(m_n) = \int_0^\delta (U_0 - A)(\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)\, d x$$

$$B_n = \int_0^\delta (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)^2\, d x.$$

2) Daran reihen sich als besondere Fälle: die Temperatur $\mathfrak{T}_a$ der **Aussenwand** $(x = \delta)$:

$$\mathfrak{T}_a = A + \sum \left[a_n (\cos m_n \delta + \beta_n \sin m_n \delta)\, e^{-\varkappa m_n^2 z}\right]$$

und die Temperatur $\mathfrak{T}_i$ der **Innenwand** $(x = 0)$:

$$\mathfrak{T}_i = A + \sum \left[a_n\, e^{-\varkappa m_n^2 Z}\right].$$

3) Die Temperatur (J) der **Innenluft** ist nach Gl. VIa:

$$J = A - \frac{1}{\varrho} \sum \left[\frac{\beta_n}{m_n} a_n\, e^{-\varkappa m_n^2 Z}\right]$$

4) Die in der Zeit Z an die äussere Luft abgegebene Wärme V (der Wärmeverlust) ist gegeben durch

$$V = \int_0^Z (\mathfrak{T}_a - A)\, h_2 F\, d z.$$

Durch Ausführung der Integration wird

$$V = \frac{h_2 F}{\varkappa} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{a_n}{m_n^2}(\cos m_n \delta + \beta_n \sin m_n \delta)\right]$$

$$- \frac{h_2 F}{\varkappa} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{a_n}{m_n^2}(\cos m_n \delta + \beta_n \sin m_n \delta)\, e^{-\varkappa m_n^2 Z}\right].$$

und es stellt der Minuend die ursprünglich in dem Objekte (Innenluft und Aussenmauer) über dem **Temperaturniveau**

A enthaltene Wärme dar, während der Subtrahend aussagt, wieviel von dieser Wärme zur Zeit Z noch vorhanden ist.

10. Anwendungen. Als Anfangszustand des Abkühlungsprozesses bietet das grösste Interesse der Dauerzustand, in welchem sich ein vollkommen durchgeheiztes Zimmer befindet.

Im Dauerzustande $\left(\frac{d^2 U}{d x^2} = 0\right)$ gelten die Beziehungen

$$h_1 (J_0 - \mathfrak{T}_{i0}) = \lambda \frac{\mathfrak{T}_{i0} - \mathfrak{T}_{a0}}{\delta} = h_2 (\mathfrak{T}_{a0} - A)$$

und, insofern er als Anfangszustand des Abkühlungsprozesses angenommen wird

$$U_0 = \mathfrak{T}_{i0} - \frac{\mathfrak{T}_{i0} - \mathfrak{T}_{a0}}{\delta} x$$

oder

$$U_0 - A = (\mathfrak{T}_{i0} - A) - \frac{\mathfrak{T}_{i0} - \mathfrak{T}_{a0}}{\delta} x .$$

Dabei ist

$$\mathfrak{T}_{i0} - A = (J_0 - A) \frac{\frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2}}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2}},$$

$$\frac{\mathfrak{T}_{i0} - \mathfrak{T}_{a0}}{\delta} = (J_0 - A) \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2}} .$$

Führt man die einfachere Bezeichnung ein

$$U_0 - A = C - D x,$$

so wird in Nr. 9. 1)

$$q(m_n) = \int_0^\delta (C - D x)(\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)\, d x .$$

$$= \frac{C}{m_n} (\beta_n + \sin m_n \delta - \beta_n \cos m_n \delta)$$

$$- \frac{D}{m_n^2} [- 1 + m_n \delta (\sin m_n \delta - \beta_n \cos m_n \delta)$$

$$+ (\cos m_n \delta + \beta_n \sin m_n \delta)],$$

was mit Hilfe der Gl. IV auf

$$\frac{D + m_n \beta_n C}{m_n^2}$$

zurückgeführt werden kann.

11. Als Beispiel für numerische Rechnung sei ein Zimmer gewählt von 5 m Länge, 5 m Breite, 4 m Höhe, welches eine Wand von $5 \cdot 4 = 20$ qm Fläche und 0,25 m Dicke der freien Luft zukehrt. Die Wand ist von Backsteinmauerwerk, so dass $\lambda = 0{,}7$, $h_1 = 6$ und unter der Annahme von Windstille auch $h_2 = 6$ angenommen werden darf. Ferner ist $S = 1800$ kg, $w = 0{,}2$, also $\varkappa = \frac{7}{3600}$. $\varrho = \frac{cL}{Fsw}$ wurde zu 0,004 angenommen.

Wenn man kleinere Werte als 1 (1 Stunde) für Z nicht heranziehen will, genügen 6 Glieder der Reihe in Nr. 9. 1), um die Temperaturen auf 0,1° Cels. genau zu berechnen. Die bezüglichen Koeffizienten sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	m	$\sphericalangle m\delta$	β	a	
(1)	4,38	62° 9′	− 0,01751	0,63894	$(J_0 - A)$
(2)	14,45	180° + 27° 0′	− 0,06407	0,07651	„
(3)	25,82	360° + 9° 50′	− 0,1499	0,03235	„
(4)	37,04	540° − 9° 20′	− 0,4120	0,02395	„
(5)	45,48	720° − 68° 32′	− 5,213	+ 0,00407	„
(6)	53,24	720° + 42° 34′	+ 0,6636	− 0,01000	„

12. Nimmt man $J_0 = +20°$, $A = -20°$, so berechnen sich die Temperaturen, welche die Innenluft, die Innenwand, einzelne Mauerschichten und die Aussenwand nach Verlauf von 1, 2, 10 Stunden besitzen, wie folgt:

Abstand von der Innenwand	Ursprüngl. Temperatur	Temperatur nach 1 Stunde	Temperatur nach 2 Stunden	Temperatur nach 10 Stunden	
	(J_0)	(J_1)	(J_2)	(J_{10})	
Innenluft	+ 20	7,8	5,6	— 2,1	
x	U_0	U_1	U_2	U_{10}	
0	10,35	7,1	5,2	— 2,2	(Innenwand)
0,2 δ	6,2	5,4	4,1	— 2,7	
0,4 δ	2,1	1,9	0,9	— 4,0	
0,7 δ	— 4,1	- 4,1	— 4,2	— 7,4	
δ	— 10,35	— 10,35	— 10,5	— 12,2	(Aussenwand)

Es ist bemerkenswert, dass die Temperaturen der Innenluft und der Innenwand, die für die Bewohner von unmittelbarem Interesse sind, nach Abstellung der Heizung sehr rasch abnehmen, während die Temperatur der Aussenwand eine zähe Ausdauer zeigt. Sie sinkt in 10 Stunden um nicht ganz 2°, während die Zimmerluft um mehr als 22°, die Innenwand um 12½° kälter wird.

Der auch nach Abstellung der Heizung in der früheren Richtung fortfliessende Wärmestrom verhält sich demnach wie ein Wasserlauf, der in seinem Oberlaufe durch eine Schleusse abgesperrt wird. Während hier alsbald Ebbe eintritt, erleidet die Stromstärke im Unterlaufe noch längere Zeit hindurch keine erhebliche Aenderung.

Damit in Zusammenhang steht das Rechnungsergebnis Nr. 9. 4), welches für den gesamten Wärmeverlust in 10 Stunden

10888 Kalorien

gibt, nicht viel weniger als die Wärmemenge von

11600 Kalorien,

welche man hätte aufwenden müssen, um den Dauerzustand in diesen 10 Stunden aufrecht zu halten.

Will man nach zehnstündiger Unterbrechung der Heizung das Zimmer zunächst wieder bewohnbar machen, und dann vollständig durchheizen, so hat man in der folgenden Heizperiode nicht nur die gleichzeitigen Wärmeverluste zu decken, die nicht viel geringer sind als die im Dauerzustand stattfindenden, sondern auch jene verlorenen 10888 Kalorien allmählich wieder zuzuführen. Welche Mittel und wieviel Zeit hiezu nötig sind, soll in der Folge dargelegt werden.

Ueber Erwärmung geschlossener Lufträume.

Von **G. Recknagel.**

(*Eingelaufen 4. Mai.*)

1. Es soll ermittelt werden, wie die Erwärmung eines geschlossenen mit Luft erfüllten Raumes vor sich geht, dem eine konstante Wärmequelle von bekannter Leistung Wärme zuführt, während eine homogene Wand von bestimmter Fläche (F), gegebener Dicke (δ) und bekanntem Material (s Gewicht des Kubikmeters, w Wärmekapazität des Kilogramms, λ innere Leitungsfähigkeit, h_1 äussere Leitungsfähigkeit der Innenseite, h_2 äussere Leitungsfähigkeit der Aussenseite) der äusseren Luft zugekehrt ist, deren Temperatur A durchaus konstant ist. An den übrigen Wandflächen wird Wärme weder aufgenommen noch abgegeben.

Ueber den Anfangszustand wird die Annahme gemacht, dass er durch irgend einen Abkühlungsprozess entstanden ist, durch welchen die Innenluft die Temperatur J_0, die Mauerschicht in der Entfernung x die Temperatur $U_0 = f_0(x)$ erhalten hat. Besondere Werte sind $f_0(0) = \mathfrak{T}_{i0}$, $f_0(\delta) = \mathfrak{T}_{a0}$.

Nach Verlauf von z Stunden sind diese Temperaturen J, $U = f(x, z)$, $\mathfrak{T}_i$, $\mathfrak{T}_a$.

2. Von der Wärmezufuhr gewinnt man am leichtesten eine deutliche Vorstellung, wenn man an eine Luftheizung denkt, die durch eine Oeffnung vom Querschnitt q Luft von der Temperatur R^0 Celsius mit der Geschwindigkeit v zuführt. Man erhält dann stündlich $3600\, v\, q$ Kubikmeter Luft, vom Gewichte

$3600\, v\, q \frac{1{,}293}{1 + a\, R} \cdot \frac{B}{760}$ Kilogramm, die bei jedem Grad, um den sie sich abkühlt, die Wärmemenge

$$3600 \cdot v\, q \frac{1{,}293}{1 + a\, R} \cdot \frac{B}{760}\, c = Q\, c$$

abgibt, wenn c die Wärmekapazität bei konstantem Druck bezeichnet. In dem an die Zeit Z anschliessenden Zeitelemente $d\, z$ dringt die Luftmenge $Q\, d\, z$ ein, welche sich mit der Zimmerluft von der Masse L und der Temperatur J mischt und eine Erhöhung dieser Temperatur um $d\, J$ hervorbringt, während sie sich selbst von R auf $(J + d\, J)$ Grade abkühlt. Zugleich muss, damit diese Temperaturerhöhung eintritt, von der zugeführten Wärme der Verlust gedeckt werden, den die Innenluft durch Wärmeabgabe an die Innenwand erleidet, nämlich $(J - \mathfrak{T}_i)\, F\, h_1\, d\, z$. Man erhält demnach (von unendlich Kleinem zweiter Ordnung abgesehen) die Gleichung:

$$c\, Q\, d\, z\, (R - J) = c\, L\, d\, J + (J - \mathfrak{T}_i)\, F\, h_1\, d\, z. \qquad \text{(I)}$$

Hier sind J und $\mathfrak{T}_i$ Funktionen der Zeit (Z). Die Masse L der Innenluft ist nicht völlig konstant. Denn da durch Abzüge und Poren fortgesetzt soviel Luft entweicht, als zum Ausgleich des innern Luftdruckes mit dem äusseren dient, so vermindert sich die Dichtigkeit der inneren Luft infolge der stetigen Temperatursteigerung in dem Maße, dass $L = \frac{L_0}{1 + a\, J}$, wenn L_0 die bei 0° C. den Raum ausfüllende Luftmasse und a den Ausdehnungskoeffizienten der Luft bezeichnet. Da durch Berücksichtigung dieser Dichtigkeitsänderung auch L als Funktion der Zeit und damit eine Komplikation in die Rechnung eingeführt würde, die zur erreichbaren Genauigkeit ausser Verhältnis stünde, wird L konstant angenommen.[1])

[1]) Die Ungenauigkeit, welche dadurch in die Rechnung kommt, dass man für L einen konstanten Mittelwert annimmt, z. B. den für 10° C. geltenden $\frac{L_0}{1{,}037}$ beträgt demnach bei Heizung von 0° auf 20° C.

3. Eine zweite Gleichung erhält man, wenn man das Schicksal der durch die Innenfläche in die Wand eindringenden Wärme weiter verfolgt. Sie kann teils zur Temperaturerhöhung der Mauerschichten verwendet werden und teils von der Aussenwand ins Freie entweichen.

$$(J - \mathfrak{T}_i)\, F h_1\, d z = d z \int_0^\delta F s w \frac{d U}{d z} d x + (\mathfrak{T}_a - A)\, F h_2\, d z. \quad \text{(II)}$$

Bedenkt man, dass (vgl. „Abkühlung" Nr. 5 und 6)

$$(J - \mathfrak{T}_i)\, h_1 = -\lambda \left|\frac{d U}{d x}\right|_0 ; \quad (\mathfrak{T}_a - A)\, h_2 = -\lambda \left|\frac{d U}{d x}\right|_\delta$$

und

$$\left|\frac{d U}{d x}\right|_\delta - \left|\frac{d U}{d x}\right|_0 = \int_0^\delta \frac{d^2 U}{d x^2} d x,$$

so erhält man aus II:

$$\lambda \int_0^\delta \frac{d^2 U}{d x^2} d x = \int_0^\delta s w \frac{d U}{d z} d x$$

woraus man die Beziehung zwischen der Temperatur U und den beiden unabhängigen Variabeln x und z ableiten kann:

$$\lambda \frac{d^2 U}{d x^2} = s w \frac{d U}{d z}. \quad \text{(III)}$$

4. Die weitere Entwicklung muss sich an den Grenzfall anschliessen, in welchem die variablen Temperaturen J und U die höchsten durch die gegebene Wärmequelle erreichbaren Werte angenommen haben und auf diesen konstant erhalten werden. Diese Grenzmaxima sollen durch den Index m kenntlich gemacht werden.

Da in diesem Falle $d J$ und $\frac{d U}{d z} d z$ Null sind, so folgt aus I

$$c\, Q\, (R - J_m) = (J_m - \mathfrak{T}_{i\,m})\, F h_1 \quad \text{(I a)}$$

d. h. alle zugeführte Wärme dringt in die Wand ein.

weniger als 4 Prozent der Luftmasse und ist bei dem geringen Einfluss, den die Grösse dieser Masse überhaupt auf den Vorgang ausübt, ohne Bedeutung.

Aus II erhält man:

$$(J_m - \mathfrak{T}_{im})\, h_1 = (\mathfrak{T}_{am} - A)\, h_2 \qquad \text{(II a)}$$

d. h. ebensoviel Wärme, als durch die Innenwand eindringt, wird an der Aussenwand abgegeben.

Für die Temperaturverteilung innerhalb der Mauer hat man aus (III)

$$\frac{d^2 U_m}{d x^2} = 0$$

woraus

$$U_m = C_m - D_m x. \qquad \text{(IV)}$$

Dabei ist $C_m = \mathfrak{T}_{im}$ die Maximaltemperatur der Innenwand, und aus $\mathfrak{T}_{am} = C_m - D_m \delta$ folgt:

$$D_m = \frac{\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}}{\delta}.$$

Aus IV folgt auch:

$$\frac{d U_m}{d x} = - D_m$$

und da

$$-\lambda \left.\frac{d U_m}{d x}\right|_0 = (J_m - \mathfrak{T}_{im})\, h_1$$

und

$$\left.\frac{d U_m}{d x}\right|_0 = \frac{d U_m}{d x} = - D_m,$$

so ergibt sich

$$\lambda D_m = (J_m - \mathfrak{T}_{im})\, h_1$$

oder

$$\lambda \frac{\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}}{\delta} = (J_m - \mathfrak{T}_{im})\, h_1. \qquad \text{(III a)}$$

Es werden nun aus den Gleichungen I a, II a, III a die Zwischentemperaturen $\mathfrak{T}_{am}$ und $\mathfrak{T}_{im}$ eliminiert. Aus

$$\mathfrak{T}_{am} - A \quad = \frac{h_1}{h_2} (J_m - \mathfrak{T}_{im})$$

$$\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am} = \frac{h_1 \delta}{\lambda} (J_m - \mathfrak{T}_{im})$$

erhält man

$$\mathfrak{T}_{im} - A = (J_m - \mathfrak{T}_{im}) \left(\frac{h_1}{h_2} + \frac{h_1 \delta}{\lambda}\right)$$

oder

$$\mathfrak{T}_{im} \left(1 + \frac{h_1}{h_2} + \frac{h_1 \delta}{\lambda}\right) = J_m \left(\frac{h_1}{h_2} + \frac{h_1 \delta}{\lambda}\right) + A.$$

Führt man hier den Transmissionskoeffizienten p ein mit der Definition:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{\delta}{\lambda},$$

so ergibt sich:

$$J_m - \mathfrak{T}_{im} = (J_m - A) \frac{p}{h_1}$$

oder

$$\mathfrak{T}_{im} - A = (J_m - A) \left(1 - \frac{p}{h_1}\right)$$

und

$$\mathfrak{T}_{am} - A = (J_m - A) \frac{p}{h_2}.$$

Durch Substitution in Ia erhält man zunächst

$$c\, Q\, (R - J_m) = (J_m - A)\, p\, F, \tag{I b}$$

woraus sich eine der drei Grössen Q, R, J_m berechnen lässt.

Für den grössten erreichbaren Ueberschuss der Lufttemperatur J_m über die Temperatur A der Aussenluft ergibt sich daraus

$$J_m - A = (R - A) \frac{c\, Q}{c\, Q + p\, F},$$

was mit der von Fourier (Chap. I Sect. VI) gegebenen Formel im wesentlichen übereinstimmt. Ferner erhält man:

$$D_m = (J_m - A) \frac{p}{\lambda}$$

$$C_m = A + (J_m - A) \left(1 - \frac{p}{h_1}\right).$$

5. Es soll nun die Temperatur U aufgefasst werden als Differenz zwischen der Maximaltemperatur

$$U_m = C_m - D_m x$$

und einer niedrigeren Temperatur U', welche angibt, wieweit die an der Stelle x bestehende Temperatur U zur Zeit Z noch von der Maximaltemperatur entfernt ist:

$$U = C_m - D_m x - U'.$$

Bewirkt man nun durch geeignete Wahl der Funktion U', dass

$$\frac{d\,U'}{d\,z} = \varkappa \frac{d^2\,U'}{d\,x^2},$$

so ist auch Gleichung III erfüllt, d. h.

$$\frac{d\,U}{d\,z} = \varkappa \frac{d^2\,U}{d\,x^2} \left(\text{wenn } \varkappa = \frac{\lambda}{s\,w}\right).$$

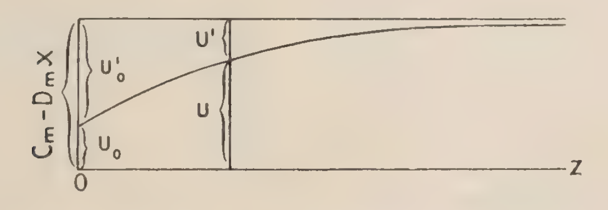
Da nun U' eine mit fortschreitender Zeit abnehmende Funktion von z ist, so hindert nichts

$$U' = (a \cos m\,x + b \sin m\,x)\, e^{-\varkappa m^2 Z}$$

zu setzen. Denn die damit eingeführte Annahme, dass die Maximalwerte erst in unendlich langer Zeit vollständig erreicht werden, ist durchaus sachgemäss.

Stellt man den Gang der Temperatur U an der Stelle x als Funktion der Zeit Z dar, so erhält man eine Kurve, wie Fig. 1, in welcher die Parallele $U_m = C_m - D_m x$ als Asymptote erscheint.

Fig. 1.



Da sich für m in U' unendlich viele Werte ergeben und sowohl a als b von m abhängig werden, erhält man für die Funktion U die unendliche Reihe:

$$U = C - D x - \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[(a_n \cos m_n x + b_n \sin m_n x) e^{-\varkappa m_n^2 z}\right] \quad \text{(VI)}$$

wobei nun an C und D zur Vereinfachung der Schreibweise der Index m weggelassen ist.

Ferner wird das Temperaturgefälle in der Wand im allgemeinen

$$-\frac{dU}{dx} = D - \sum \left[m_n (a_n \sin m_n x - b_n \cos m_n x) e^{-\varkappa m_n^2 z}\right] \quad \text{(VII)}$$

und die beiden besonderen Werte desselben

$$-\left|\frac{dU}{dx}\right|_0 = D + \sum (m_n b_n e^{-\varkappa m_n^2 z}) \quad \text{(VII a)}$$

$$-\left|\frac{dU}{dx}\right|_\delta = D - \sum \left[m_n (a_n \sin m_n \delta - b_n \cos m_n \delta) e^{-\varkappa m_n^2 z}\right] \quad \text{(VII b)}$$

Für die Temperaturen an den Grenzflächen erhält man

$$(x=0)\, \mathfrak{T}_i = C - \sum (a_n e^{-\varkappa m_n^2 z}) \quad \text{(VI a)}$$

$$(x=\delta)\, \mathfrak{T}_a = C - D\delta - \sum \left[(a_n \cos m_n \delta + b_n \sin m_n \delta) e^{-\varkappa m_n^2 z}\right] \quad \text{(VI b)}$$

Im Anfangszustande, wenn das Heizen beginnt, ist

$$(z = 0)\; U_0 = C - D x - \sum (a_n \cos m_n x + b_n \sin m_n x)$$

$$(z = 0, x = 0)\; \mathfrak{T}_{i0} = C - \sum (a_n)$$

$$(z = 0, x = \delta)\; \mathfrak{T}_{a0} = C - D\delta - \sum (a_n \cos m_n \delta + b_n \sin m_n \delta).$$

U_0 muss mit dem Problem zugleich als Funktion von x gegeben sein, da nur auf Grund einer vollständigen Beschreibung des Anfangszustandes etwas bestimmtes über die Wirkung der Heizung ausgesagt werden kann.

6. Bestimmung der Konstanten m, a, b.

1) Substituiert man aus VIb und VIIb in

$$(\mathfrak{T}_a - A) h_2 = -\left|\frac{dU}{dx}\right|_\delta \lambda,$$

so erhält man

$$(C - D\,\delta - A)\frac{h_2}{\lambda} - \frac{h_2}{\lambda}\sum\left[(a_n \cos m_n\,\delta + b_n \sin m_n\,\delta)\,e^{-\varkappa m_n^2 Z}\right]$$
$$= D - \sum\left[m_n\,(a_n \sin m_n\,\delta - b_n \cos m_n\,\delta)\,e^{-\varkappa m_n^2 Z}\right].$$

Da diese Gleichung für jedes Z gelten soll, müssen die Coeffizienten von $e^{-\varkappa m_n^2 Z}$ einander gleich sein.

Die Forderung $(C - D\,\delta - A)\frac{h_2}{\lambda} = D$ ist erfüllt, weil $C - D\,\delta = \mathfrak{T}_{am}$, $D = \frac{\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}}{\delta}$ und gemäss IIa und IIIa (in Nr. 4) $(\mathfrak{T}_{am} - A)\,h_2 = \lambda\,\frac{\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}}{\delta}$ ist. Es bleibt somit noch zu erfüllen:

$$\frac{h_2}{\lambda}(a_n \cos m_n\,\delta + b_n \sin m_n\,\delta) = m_n\,(a_n \sin m_n\,\delta - b_n \cos m_n\,\delta) \qquad \text{(VIII)}$$

für jedes n. Lässt man zur Vereinfachung der Schreibweise den Index n weg, dividiert durch $a \cos m\,\delta$ und setzt β für $\frac{b}{a}$, so erhält man zunächst

$$\frac{h_2}{\lambda}(1 + \beta \operatorname{tg} m\,\delta) = m\,(\operatorname{tg} m\,\delta - \beta)$$

oder

$$\operatorname{tg} m\,\delta = \frac{p_2 + m\,\beta}{m - \beta\,p_2}, \qquad \text{(VIII a)}$$

wobei p_2 für $\frac{h_2}{\lambda}$ geschrieben ist. Durch diese Gleichung sind die Koeffizienten m und β mit einander verbunden.

7. Fortsetzung. Substituiert man in die Gleichung

$$-\left|\frac{d\,U}{d\,x}\right|_0 \lambda = (J - \mathfrak{T}_i)\,h_1$$

die aus VIIa und VIa entnommenen Werte von $\left|\frac{d\,U}{d\,x}\right|_0$ und $\mathfrak{T}_i$, so erhält man

$$D\,\lambda + \lambda \sum\left[m\,b\,e^{-\varkappa m^2 Z}\right] = \left(J - C + \sum\left[a\,e^{-\varkappa m^2 Z}\right]\right) h_1.$$

Hieraus ergibt sich ein Ausdruck für die Lufttemperatur J als Funktion der Zeit z

$$J = \frac{\lambda}{h_1} D + C + \Sigma \left[\left(\frac{\lambda}{h_1} m b - a \right) e^{-\varkappa m^2 Z} \right],$$

in welchem (nach Nr. 4)

$$C + \frac{\lambda}{h_1} D = \mathfrak{T}_{im} + \frac{\lambda}{h_1} \frac{\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}}{\delta} = J_m$$

die Maximaltemperatur der Luft ist. Man schreibt somit einfacher

$$J = J_m - \Sigma \left[\left(a - \frac{\lambda}{h_1} m b \right) e^{-\varkappa m^2 Z} \right]. \tag{IX}$$

Es wird nun ein zweiter Ausdruck für die Temperatur J hergestellt, indem man die Differentialgleichung I

$$c L \frac{d J}{d z} = c Q (R - J) - F (J - \mathfrak{T}_i) h_1$$

nach Einsetzung der Werte von J (aus IX) und $\mathfrak{T}_i$ (aus VI a) integriert. Die Differentialgleichung wird zunächst:

$$c L \frac{d J}{d z} = c Q R - c Q J_m + c Q \Sigma \left[\left(a - \frac{\lambda}{h_1} m b \right) e^{-\varkappa m^2 Z} \right]$$
$$- F D \lambda - F \lambda \Sigma \left[m b e^{-\varkappa m^2 Z} \right].$$

und es lässt sich nachweisen, dass das Aggregat der Constanten

$$c Q R - c Q J_m - F D \lambda = 0.$$

Denn nach Nr. 4, I a und III a ist

$$c Q (R - J_m) = F (\mathfrak{T}_{im} - \mathfrak{T}_{am}) \frac{\lambda}{\delta} = F D \lambda.$$

Sodann gibt die Ausführung der Integration

$$c L J = - \frac{c Q}{\varkappa} \Sigma \left[\left(\frac{a}{m^2} - \frac{\lambda}{h_1} \frac{b}{m} \right) e^{-\varkappa m^2 Z} \right]$$
$$+ F \frac{\lambda}{\varkappa} \Sigma \left[\frac{b}{m} e^{-\varkappa m^2 Z} \right] + \text{Constante}.$$

Die Integrationskonstante lässt sich aus der Erwägung bestimmen, dass für $z = \infty$ das $J = J_m$ wird. Demnach erhält man:

$$\text{Constante} = c\,L\,J_m.$$

Dividiert man nun die Gleichung durch $c\,L$, den kalorischen Wasserwert der Luft, und erinnert sich, dass

$$\varkappa = \frac{\lambda}{w\,s},$$

wobei $w\,s$ den Wasserwert eines Kubikmeters vom Material der Wand vorstellt, so erhält man

$$J - J_m = -\frac{c\,Q}{\lambda}\left(\frac{w\,s}{c\,L}\right)\sum\left[\left(\frac{a}{m^2} - \frac{\lambda}{h_1}\frac{b}{m}\right)e^{-\varkappa m^2 Z}\right]$$

$$+ F\left(\frac{w\,s}{c\,L}\right)\sum\left[\frac{b}{m}\,e^{-\varkappa m^2 Z}\right].$$

Der Bruch $\frac{c\,L}{F\,w\,s}$ soll mit ϱ bezeichnet werden, ferner die Verhältnisse $\frac{c\,Q}{\lambda F}$ mit p_0, $\frac{h_1}{\lambda}$ mit p_1. Dann ist

$$J = J_m - \frac{p_0}{\varrho}\sum\left[\left(\frac{a}{m^2} - \frac{1}{p_1}\frac{b}{m}\right)e^{-\varkappa m^2 Z}\right] + \frac{1}{\varrho}\sum\left[\frac{b}{m}e^{-\varkappa m^2 Z}\right]. \quad \text{(X)}$$

Man kann nun zunächst die Anfangstemperatur der Luft einführen, indem man zugleich 0 für Z und J_0 für J setzt. Man erhält so:

$$J_m - J_0 = \sum\left(a - \frac{1}{p_1}\,m\,b\right) \quad \text{(IX a)}$$

und

$$J_m - J_0 = \frac{p_0}{\varrho}\sum\left(\frac{a}{m^2} - \frac{1}{p_1}\frac{b}{m}\right) - \frac{1}{\varrho}\sum\left(\frac{b}{m}\right),$$

oder

$$\varrho\,(J_m - J_0) = p_0\sum\left(\frac{a}{m^2}\right) - \left(\frac{p_0}{p_1} + 1\right)\sum\left(\frac{b}{m}\right). \quad \text{(X a)}$$

Ferner müssen die beiden für J erhaltenen Reihen identisch sein, wodurch folgendes zweite System von Gleichungen erhalten wird:

$$a - \frac{m\,b}{p_1} = \frac{p_0}{\varrho}\,\frac{a}{m^2} - \frac{p_0}{\varrho\,p_1}\,\frac{b}{m} - \frac{b}{m\,\varrho}$$

oder, wenn man mit $\frac{\varrho\,p_1\,m^2}{a}$ multipliziert und β für $\frac{b}{a}$ schreibt:

$$\varrho\,p_1\,m^2 - p_0\,p_1 = \beta\,(m^3\,\varrho - p_0\,m - p_1\,m),$$

woraus sich ergibt:

$$\beta = \frac{p_1\,(p_0 - \varrho\,m^2)}{m\,(p_0 + p_1 - \varrho\,m^2)}. \tag{XI}$$

Wird dieser Ausdruck in VIII a substituiert, der Nenner wegmultipliziert und nach steigenden Potenzen von m geordnet, so erhält man:

$$\operatorname{tg} m\,\delta = m\,\frac{p_0\,p_1 + (p_0 + p_1)\,p_2 - \varrho\,(p_1 + p_2)\,m^2}{-p_0\,p_1\,p_2 + (p_0 + p_1 + \varrho\,p_1\,p_2)\,m^2 - \varrho\,m^4}.$$

Für die Auflösung empfiehlt sich die Umformung:

$$m \operatorname{cotg} m\,\delta = -P + \frac{m^2\,[p_0 + p_1 - \varrho\,P\,(p_1 + p_2) + \varrho\,p_1\,p_2] - \varrho\,m^4}{p_1\,p_2 + p_0\,(p_1 + p_2) - \varrho\,(p_1 + p_2)\,m^2}$$

wobei mit P der reciproke Wert von

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{P}$$

bezeichnet ist. Dividiert man nochmals partiell mit dem Bekannten des Nenners in das erste Glied des Zählers, so erhält man:

$$P_1 = \frac{p_0 + p_1 - \varrho\,P\,(p_1 + p_2) + \varrho\,p_1\,p_2}{p_1\,p_2 + p_0\,(p_1 + p_2)}$$

als Koeffizienten von m^2, und demnach

$$m \operatorname{cotg} m\,\delta = -P + P_1\,m^2 + \frac{\varrho\,[P_1\,(p_1 + p_2) - 1]\,m^4}{p_1\,p_2 + p_0\,(p_1 + p_2) - \varrho\,(p_1 + p_2 \cdot m^2}$$

und schliesslich

$$m \operatorname{cotg} m\,\delta = -P + P_1\,m^2 + \frac{\dfrac{\varrho\,[P_1\,(p_1 + p_2) - 1]}{p_1\,p_2 + p_0\,(p_1 + p_2)} \cdot m^4}{1 - \dfrac{\varrho\,(p_1 + p_2)}{p_1\,p_2 + p_0\,(p_1 + p_2)} \cdot m^2}.$$

8. Nachdem so gezeigt ist, wie sich die m und β bestimmen lassen, erübrigt noch die Bestimmung der Koeffizienten a.

Hiezu muss der Anfangszustand dienen, der einerseits durch die Gleichung

$$U_0 = C - D\,x - \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)],$$

andererseits durch bestimmte Werte der inneren Lufttemperatur J_0, der Aussentemperatur A, und für die Wand durch eine Funktion von x gegeben ist, die mit $f_0(x) = U_0$ bezeichnet werden soll. Man hat demnach die Gleichung:

$$C - D\,x - f_0(x) = \sum [a_n (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)], \quad \text{(XIII)}$$

in welcher die Faktoren $(\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)$ bestimmt sind und für jedes x zwischen 0 und δ berechnet werden können.

Um irgend einen der Koeffizienten a_r zu bestimmen, multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit dem zu a_r gehörigen Faktor

$$\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x$$

und integriert beiderseits zwischen den Grenzen 0 und δ. Dadurch erhält man links eine Funktion von δ, m, β, C, D, die mit $\varphi(m_r)$ bezeichnet werden soll, so dass also

$$\varphi(m_r) = \int_0^\delta [C - D\,x - f_0(x)]\,[\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x]\,d\,x. \quad \text{(XIV)}$$

Ist der zu a_r gehörige Wert von m_r bekannt, so lässt sich $\varphi(m_r)$ numerisch berechnen.

Auf der rechten Seite erhält man eine unendliche Reihe, deren allgemeines Glied ist:

$$t_n = a_n \int_0^\delta (\cos m_n x + \beta_n \sin m_n x)(\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x) \cdot d\,x$$

und es ist bereits (Abkühlung Nr. 8) nachgewiesen, dass sich dieses Glied im allgemeinen d. h. so oft n von r verschieden ist, auf

$$a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2}$$

reduziert d. h. auf den Wert, welchen das Integral an der untern Grenze ($x = 0$) annimmt, während es an der obern Grenze ($x = \delta$) vermöge der Gleichung (VIII) verschwindet.

Ist hingegen $n = r$ d. h. handelt es sich um

$$t_r = a_r \int_0^\delta (\cos m_r x + \beta_r \sin m_r x)^2 \, d x,$$

so ergibt die Substitution $n = r$ in das allgemeine Glied sowohl an der obern als an der untern Grenze die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, und es muss somit der Wert von t_r besonders bestimmt werden. Man erhält leicht wie a. a. O. S. 90:

$$t_r = \left[\frac{\delta}{2}(1 + \beta_r^2) + \left(1 + \frac{\beta_r}{m_r} p_2\right) \frac{\sin m_r \delta}{2 m_r} \cdot \frac{\cos(m_r \delta - \varphi_r)}{\cos \varphi_r}\right] a_r = a_r B_r.$$

In diesem Ausdruck ist auch der Wert ζ_r enthalten, den das t_n für $n = r$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ an der untern Grenze besitzt. Folglich besteht die Gleichung:

$$\varphi(m_r) = t_r + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2}\right) - \zeta_r, \qquad \text{(XV)}$$

wobei ζ_r noch zu bestimmen ist. Es geschieht dieses, indem man das allgemeine Glied der Reihe

$$a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2}$$

durch Einführung der Werte von β von dem Nenner $(m_r^2 - m_n^2)$ befreit.

Da (nach XI)

$$\beta = p_1 \frac{p_0 - \varrho m^2}{m(p_0 + p_1 - \varrho m^2)}$$

folgt

$$\beta_r m_r - \beta_n m_n = p_1 \frac{p_1 \varrho (m_n^2 - m_r^2)}{(p_0 + p_1 - \varrho m_r^2)(p_0 + p_1 - \varrho m_n^2)}$$

und somit

$$a_n \frac{\beta_r m_r - \beta_n m_n}{m_r^2 - m_n^2} = - \frac{a_n p_1^2 \varrho}{(p_0 + p_1 - \varrho m_r^2)(p_0 + p_1 - \varrho m_n^2)}$$

$$= - \frac{p_1 \varrho}{p_0 + p_1 - \varrho m_r^2} \cdot \frac{a_n p_1}{p_0 + p_1 - \varrho m_n^2}$$

$$= - \frac{\beta_r m_r \varrho}{p_0 - \varrho m_r^2} \cdot \frac{\beta_n a_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2}.$$

Demnach ist das allgemeine Glied der Reihe das Produkt aus einer Constanten

$$- \frac{\beta_r m_r \varrho}{p_0 - \varrho m_r^2},$$

in welcher β_r und m_r zu dem Koeffizienten a_r gehören, der bestimmt werden soll, und einer von Glied zu Glied Veränderlichen:

$$\frac{a_n \beta_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2},$$

und ζ_r erhält (wegen $m_n = m_r$) den Wert:

$$\zeta_r = - \varrho a_r \left(\frac{\beta_r m_r}{p_0 - \varrho m_r^2} \right)^2.$$

Somit geht die Gleichung XV über in

$$\varphi(m_r) = a_r B_r + \varrho a_r \left(\frac{\beta_r m_r}{p_0 - \varrho m_r^2} \right)^2 - \frac{\beta_r m_r \varrho}{p_0 - \varrho m_r^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\beta_n a_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2} \right) \qquad \text{(XVa)}$$

und es ist noch übrig, die Summe der Reihe zu finden.

Hiezu ist die Gl. X a verwendbar, nämlich:

$$p_0 \sum \left(\frac{a_n}{m_n^2} \right) = \varrho (J_m - J_0) + \left(\frac{p_0}{p_1} + 1 \right) \sum \left(\frac{b_n}{m_n} \right).$$

wenn man $\sum \left(\frac{b_n}{\beta_n m_n^2} \right)$ in folgender Weise entwickelt:

$$\sum \left(\frac{a_n}{m_n^2} \right) = \sum \left(\frac{b_n}{\beta_n m_n^2} \right) = \frac{1}{p_1} \sum \left(\frac{b_n (p_0 + p_1 - \varrho m_n^2)}{m_n (p_0 - \varrho m_n^2)} \right)$$

$$= \frac{p_0 + p_1}{p_1} \sum \left(\frac{b_n}{m_n (p_0 - \varrho m_n^2)} \right) - \frac{\varrho}{p_1} \sum \left(\frac{b_n m_n}{p_0 - \varrho m_n^2} \right). \text{(VI)}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\varrho}{p_1}\sum\left(\frac{b_n m_n}{p_0-\varrho m_n^2}\right)=\frac{p_0+p_1}{p_1}\sum\left(\frac{b_n}{m_n(p_0-\varrho m_n^2)}\right)-\sum\left(\frac{a_n}{m_n^2}\right)$$

und durch Substitution aus Gleichung (X a)

$$\frac{\varrho}{p_1}\sum\left(\frac{b_n m_n}{p_0-\varrho m_n^2}\right)=\frac{p_0+p_1}{p_1}\sum\left(\frac{b_n}{m_n(p_0-\varrho m_n^2)}\right)$$
$$-\frac{p_0+p_1}{p_0 p_1}\sum\left(\frac{b_n}{m_n}\right)-\frac{\varrho}{p_0}(J_m-J_0).$$

Die beiden Summen auf der rechten Seite lassen sich zusammenziehen, da

$$\frac{b_n p_0}{m_n(p_0-\varrho m_n^2)}-\frac{b_n}{m_n}=\frac{\varrho\, b_n m_n}{p_0-\varrho m_n^2}.$$

Somit erhält man

$$\frac{\varrho}{p_1}\sum\left(\frac{b_n m_n}{p_0-\varrho m_n^2}\right)=\varrho\frac{p_0+p_1}{p_0 p_1}\sum\left(\frac{b_n m_n}{p_0-\varrho m_n^2}\right)-\frac{\varrho}{p_0}(J_m-J_0)$$

oder

$$\sum\left(\frac{b_n m_n}{p_0-\varrho m_n^2}\right)=J_m-J_0.$$

Da $b_n=\beta_n a_n$, ist hiemit die gewünschte Summe in XV a als Differenz zweier Lufttemperaturen bestimmt.

Durch Substitution wird

$$q(m_r)=a_r B_r+\varrho a_r\left(\frac{\beta_r m_r}{p_0-\varrho m_r^2}\right)^2-\frac{\varrho\,\beta_r m_r}{p_0-\varrho m_r^2}(J_m-J_0). \quad \text{(XV b)}$$

Daraus bestimmt sich endlich der gesuchte Koeffizient a_r

$$a_r=\frac{q(m_r)+\dfrac{\varrho\,\beta_r m_r}{p_0-\varrho m_r^2}(J_m-J_0)}{B_r+\varrho\left(\dfrac{\beta_r m_r}{p_0-\varrho m_r^2}\right)^2}.$$

Die Entdeckung und Katalogisirung von kleineren Nebelflecken durch die Photographie.

Von **M. Wolf.**

(*Eingelaufen 23. März.*)

Bei der Anwendung der Doppelobjective von grossem Oeffnungsverhältnis auf die Himmelsphotographie zur Aufsuchung schwacher ausgedehnter Nebelmassen am Himmel und der vielen kleinen Planeten zu einer grösseren Anzahl Aufnahmen gelangt, war ich überrascht, wie ungemein zahlreich allenthalben am Himmel die planetarischen und kleinen Nebelflecken zu finden waren. Besonders das vorzügliche Voigtländer'sche Objektiv Nr. 21890 von 16 cm Oeffnung und 81 cm Brennweite, das also ein Oeffnungsverhältnis von 1 : 5 besass, gab manche Gegenden des Himmels als ganz besät mit solchen planetarischen Nebelflecken. Um gleich ein Extrem als Beispiel herauszugreifen, auf einer Platte (A 430 vom 24. März 1892) von 96 Minuten Belichtung fanden sich in einem Kreis, den ich mit einem Radius von 1 Grad um η Virginis als Mittelpunkt schlug, nicht weniger als 130 Nebelflecke.

Aehnliche Zahlen, wenn auch selbstverständlich nur selten so ungeheuer gross, ergaben sich an anderen Stellen des Himmels und es war damit gezeigt, dass die Dublet-Linsen uns den Himmel mit einer ungeheuer viel grösseren Zahl planetarischer und kleiner Nebelflecken erfüllt erscheinen liessen, als seither angenommen worden war.

Gleichzeitig war aus den ersten Versuchen ersichtlich, dass sich diese schwachen Nebel, von denen ja das Auge am

Fernrohr nur verschwindende und vorübergehend erhaschbare Eindrücke erhält, sich auf der Platte mit grosser Sicherheit einstellen und messen liessen. Andererseits war das Wesentliche Ihrer Gestalt unmittelbar zu erkennen und zu beschreiben.

Diese Erfahrungen brachten mich zu dem Entschluss, den „kleinen Nebelflecken" des Himmels eine ganz besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Ich begann sofort mit Aufnahmen von durchschnittlich zwei Stunden Belichtungsdauer zuerst von jenen Gegenden des Himmels, wo bekanntermassen die kleinen Nebelflecken am reichsten und schönsten vertreten sein sollen. Im Laufe der nächsten Jahre wurden so die Gegenden von Virgo, Leo und Coma Berenices zum grössten Teil mehr als dreimal mit Platten bedeckt.

Es handelte sich dann naturgemäss darum die Positionen dieser ungezählten neuen Objekte zu bestimmen. Ich versuchte zuerst mit dem einfachen Bamberg'schen Schraubenmikroskop, mit dem ich die Positionen der kleinen Planeten zu vermessen pflegte, die Platten auszumessen und zwar, in derselben Weise wie dort, dadurch dass ich immer die Distanzen der Nebel von verschiedenen Anhaltsternen aus mass.

Dabei zeigte sich sehr bald, dass zwar die erreichbare Genauigkeit eine sehr grosse war, dass aber die Mühe der Vermessung auch nur eines kleinen Teiles einer Platte so ins Grosse besonders bezüglich der Rechenarbeit wuchs, dass ich gezwungen war, davon abzustehen.

Nach Allem, was ich erfahren hatte, musste sich für diesen Zweck, allerdings unter Aufopferung der grössten Genauigkeit, der von Professor Kapteyn in Groningen ersonnene parallaktische Messapparat ganz besonders eignen. Es musste das richtige Instrument sein, diese Nebelflecken zu katalogisiren.

Daher zögerte ich auch nicht, als sich mir die Gelegenheit darbot,[1]) mit bescheidenen Mitteln einen parallaktischen Messapparat zu beschaffen, diesen Apparat bei einem bekannten

---

[1]) Durch die Liberalität einiger begeisterter Verehrer der Wissenschaft, deren Namen an anderer Stelle genannt werden.

Mechaniker zu bestellen, und er wurde nach seiner Vollendung auf dem neuen Observatorium auf dem Königstuhl aufgestellt. Leider hat sich die mechanische Ausführung der Arbeit des Apparates, — der an anderer Stelle beschrieben werden soll — als ziemlich mangelhaft erwiesen und die Messungen erreichten eine sehr viel geringere Genauigkeit als zu erwarten war.

Trotzdem wurde nach Anbringung einiger unvermeidlicher kleiner Abänderungen in unserer Werkstatt der Apparat sofort in Benützung genommen, einmal weil man die Positionen der Planeten und anderer Objekte dringend benötigte, dann aber auch um ein Urteil über die Methode und den Arbeitsaufwand zu gewinnen und keine Zeit in der doch für fernere Zukunft gewiss sehr wichtigen Katalogisirung und Beschreibung der kleinen Nebel zu verlieren. Nachdem der damalige Assistent Dr. Schwassmann die Fehler der zur Messung der Deklinationen dienenden Mikrometerschraube bestimmt hatte, liess ich denselben sogleich mit der Vermessung einer Anzahl von Nebelplatten beginnen, die dann in den Jahren 1899 und 1900 durchgeführt wurde. Dabei stellte ich die Aufgabe, zu versuchen die Messungs- und Justirungsfehler genau zu bestimmen, sodass man ein Urteil darüber gewinnen konnte, wie weit die mit dem parallaktischen Messapparat gewonnenen Coordinaten Vertrauen verdienen. Diese Arbeit soll, sobald vollendet, im Druck erscheinen und wird gleichzeitig die Positionen von mehreren Hundert Nebelflecken enthalten.

In der Zwischenzeit wurde es mir ermöglicht[1]) ein neues bedeutend grösseres Fernrohr zu erbauen. Die Aufnahmen mit den Sechszöllern mit der kurzen Brennweite gaben zwar alle Nebel ebenso gut und kräftig als sie jedes grössere Instrument geben konnte; allein es war oft sehr schwierig zu entscheiden bei den kleinsten Nebelflecken, ob man es mit ganz schwachen Sternchen oder mit kleinsten planetarischen Nebeln zu thun hatte. Mit dem neuen Teleskop, dessen zwei je 40 cm Oeffnung besitzende Dublets von Brashear eine Brenn-

---

[1]) Durch die Hochherzigkeit der unvergesslichen Kath. Wolfe-Bruce.

weite von 2 Meter haben, sind in Folge dieser längeren Brennweite die kleinsten Nebel viel sicherer als solche zu erkennen, und deshalb wird das Arbeiten sicherer und leichter. Da zwei gleiche Linsen vorhanden sind, so können stets zwei Aufnahmen gleichzeitig gemacht und die Zweifel wegen der stets vorhandenen vielen störenden Plattenunreinlichkeiten beseitigt werden. Es sei mir erlaubt hier einzuflechten, dass die Lichtkraft trotz mehrfacher Warnungen und Befürchtungen seitens befreundeter Astronomen ganz entschieden nicht geringer geworden ist gegenüber den kleineren Linsen; das Oeffnungsverhältnis zwar ist das gleiche wie bei jenen und die Absorption musste mit den grösseren Glasdicken stark zunehmen, nichts destoweniger blieb die Lichtkraft praktisch mindestens die gleiche, sie ist vielmehr eher etwas grösser geworden. Die Ursache liegt unter Anderem vielleicht darin, dass die bei den meisten seitherigen Absorptionsuntersuchungen ganz übersehene Helligkeit des Himmelsgrundes, die eine wesentliche Rolle in der Praxis spielt, bei den grösseren Linsen viel günstiger für die Platte wird. Als Beispiel sei angeführt, dass die feinen Ausläufer des ζ-Orion-Nebels mit dem grossen Teleskop bei gleicher Belichtung kräftiger herauskommen, als mit dem kleinen.

Seit seiner Aufstellung im August musste das grosse Instrument fast ausschliesslich zur Verfolgung von kleinen Planeten benutzt werden. Ebenso wurden fast ausschliesslich Positionen solcher Himmelskörper auf den erhaltenen Platten ausgemessen. Doch wurde, wenn Zeit war, die Gelegenheit benutzt, die von den verwandten Anhaltsternen eingeschlossenen kleinen Nebel mit zu vermessen. Dies wird gegenwärtig weitergeführt.

Es ist aber meine Absicht die Katalogisirung der kleinen Nebelflecken zur Hauptaufgabe unseres Observatoriums zu machen.

Um eine Vorstellung davon zu ermöglichen, wie zahlreich diese unbekannten kleinen, planetarischen Nebelflecken sind, und wie sich ihre Katalogisirung mit Hülfe des parallaktischen

Messapparates ausführen lässt, möchte ich im Folgenden einige ausgemessene Gruppen mitteilen. Zuvor einige Bemerkungen über die Anordnung der Vermessung.

Dem parallaktischen Messapparat steht das auf einem Steinpfeiler befindliche schwere Plattenstativ besonderer Konstruktion[1]) auf gemeinsamem Betongrund gegenüber. Beide Apparate sind mit den nötigen Bewegungen versehen, um sie in ihrem Abstand und ihrer Einstellung beliebig auf einander richten und justiren zu können. Beide Apparate werden auf einander durch Autocollimation und durch Ausmessung einer Anzahl über die Platte verteilter Anhaltsterne mit dem Rectascensionskreise des Messapparates möglichst genau auf den richtigen Abstand, d. i. die Brennweite des Teleskopes, mit der die Aufnahme gemacht ist, und ein bestimmtes Aequinoctium orientirt, sodass direkt Rectascension und Deklination dieses Aequinoctiums auf der Platte gemessen werden können.

Die zu vermessende Nebelgruppe wird von bekannten Anhaltsternen, die den Katalogen entnommen werden, eingeschlossen und diese Sterne werden zugleich mit den Nebeln nach Rectascension und Deklination ausgemessen.

Aus den Sternen wird dann ein Mittelort gebildet und die vermessenen Objekte an diesen angeschlossen. Es handelt sich also um Differenzenmessung wie beim Fadenmikrometer am Fernrohr, nur dass die Gruppe ausgedehnter und die Anzahl der Vergleichsterne grösser genommen werden kann. Sowohl der Wert einer Revolution der Mikrometerschraube in Deklination, als der Wert einer Minute des Rectascensionskreises wird für jede Gruppe aus den Anhaltsternen abgeleitet. Die übrige Orientirung wird so genau ausgeführt, dass die Orientirungsfehler kleiner werden, als die durch die Mängel des Apparates verursachte Unsicherheit beträgt.

Aus diesem Grunde und um eine einigermassen rasch fortschreitende Katalogisirungsarbeit überhaupt zu ermöglichen, wurde beschlossen, auf genauere Ausgleichung und Verbesse-

---

[1]) Die Beschreibung erfolgt an anderer Stelle.

rungen der kleinen Fehler zu verzichten. Ein Urteil darüber, welche Genauigkeit auf diese Weise erreicht werden kann, erhält man, wenn man die Positionen der Anhaltsterne aus den Messungen mit berechnet und sie mit den Katalogspositionen vergleicht (s. u.).

Zur Sicherung richtiger Berechnung wird jedes Objekt sowohl von dem gemeinsamen Mittelort aus, als von einem möglichst central gelegenen Stern aus unabhängig gerechnet, wodurch sich eine Controle, wenigstens was die Berechnung betrifft, ergibt.

Da der Kreis leider stellenweise zufällige Fehler bis zu 1ˢ34 besitzt, und noch nicht genügend untersucht war, so mussten die Rectascensionen öfters unsicherer ausfallen, als die Deklinationen, welche mit der Schraube gemessen werden, deren periodische Fehler bekannt sind. Dieselben sind übrigens auch recht beträchtlich, denn sie erreichen 1″54 oder 0.007 einer Revolution. Diese Fehler machen sich besonders beim Orientiren der Platte unangenehm fühlbar.

Aus Einfachheitsgründen und um Irrtümer zu vermeiden wurde beschlossen, das m. Aequinoctium von 1875.0 für alle Positionen zu wählen, sich also direkt an den Sternkatalog der Astronomischen Gesellschaft anzuschliessen.

Es ist noch eine Schwierigkeit zu erwähnen, die ungünstig auf die Genauigkeit der Positionen wirkt. Es sind das die Helligkeitsverhältnisse der Vergleichsterne. Es müssen meistens Sterne der 6., 7. und 8. Grösse als Anschlusssterne gewählt werden. Diese werden aber bei der für Nebelaufnahmen (bezw. Planetenaufnahmen) nötigen Belichtungsdauer schon sehr gross auf der Platte, und die Einstellung darauf — besonders am Rand der Platte — ist wegen einer gewissen optischen Verzeichnung unsicherer als auf die meisten der kleineren planetarischen Nebel. Leider ist schwer etwas zu ändern, weil die Sternkataloge keine schwächeren Sterne enthalten. Es wäre notwendig, erst von jeder Gegend eine Aufnahme mit kurzer Belichtungsdauer (vielleicht auf dieselbe Platte) zu machen und schwächere Vergleichsterne an die dann noch kleinen Scheiben der hellen Katalogsterne anzuschliessen,

um die so erhaltenen Sterne dann als Anhaltsterne zur Vermessung der Nebelflecken zu benutzen. Dadurch würde aber die Arbeit sehr vergrössert, sodass ihr Fortschreiten und damit ihr Nutzen in Frage gestellt würde.

Ich gehe nun zur Mitteilung einiger Beispiele.

Die erste im Folgenden aufgeführte Gruppe von Nebelflecken findet sich auf der Platte B 137. Sie ist aufgenommen mit dem Bruce-Teleskop *a* am 13. Februar 1901 von $12^h\ 42.9^m$ M.Z. Königstuhl bis $14^h\ 15.0^m$. Das Ende ist eine Spur unsicher, weil der Schluss durch ziemlich plötzlich aufziehende Wolken bedingt wurde. Das ist hier ohne Belang und kommt nur für die mitaufgenommenen kleinen Planeten in Betracht. Die Mitte der Platte liegt in

$$\alpha = 8^h\ 20.9^m \qquad \delta = +19^\circ\ 30'.4\ (1875.0)$$

während die Mitte der folgenden Nebelgruppe in

$$\alpha = 8^h\ 12.1^m \qquad \delta = +19^\circ\ 20'.0$$

zu suchen ist.

Gruppe 1.

Nr.	α			δ			
1	8^h	10^m	$11^s.71$	18°	$50'$	$17''.3$	*p B, S, R, b M, *B D* 18°1904 *n f.*
2		10	27.52	18	47	43.0	*v S, p B N, l l,* ○, sends arc in the M. of * *B D* 18°1905.
3		10	48.24	19	28	52.5	*p B, S, g b M,* * *n p* $0^s.22$.
4		10	55.23	19	7	13.5	*v F, v S, g b M, v* nr * 68°, connected by a neb arc.
5		11	2.22	18	47	13.3	*S, p B, b M,* nr *s p* of Nr. 6.
6		11	3.07	18	47	50.3	*S, p B,* larger then 5, *g b M.*
7		11	2.83	19	3	5.2	*p B,* nebulous *, 2 Spiral arms 135°.
8		11	18.18	18	51	51.4 [1])	*i F!*
9		11	21.35	19	2	14.3	*p F, v S, i F.*
10		11	23.32	18	50	54.0 [1])	*i F!*
11		11	24.69	18	57	18.4	*F, S,* ○, *h,* pr. edge sharper.
12		11	27.67	18	50	16.4 [1])	*i F!*

[1]) 8, 10 u. 12 liegen in einem Nebel; derselbe ist draperieartig und wird durch vier Bögen im S W. begränzt, wie eine Bogenbrücke mit drei Pfeilern. Die Fusspunkte der drei Pfeiler sind gemessen. 10 hat die

Nr.	h	m	s	°	'	"	
13	8h	11m	17s.83	18°	59'	10".2	*F, S,* dif, stell *N, v* near * *s f.*
14		11	51.35	19	18	6.2	*p F, S* semicircle, *N,* connected by an arc with * 13.
15 *		11	42.27	19	17	45.0 [1]	* app Nr. 14.
16		11	51.89	19	20	36.1	*p B, v S, l* 50°.
17		11	56.73	18	53	11.2	*p F, S, i F,* sharp edges.
18		12	7.13	18	53	45.6	*v F, S,* dif, *g b M, l l* 125°.
19		12	13.76	19	22	27.5	*p F, v S, i F, l* 135°.
20		12	16.20	18	48	10.9	*F, v S, l* 90°, *v F* stell *N, B* * *s f.*
21		12	16.49	19	17	14.2	*p F, v S, i F, v l b M.*
22		12	54.53	18	46	25.0	*p B, S,* ○, sev. similar quite near.
23		12	56.61	18	47	38.4	*p F, S, i F, N* exc *s, v* nr * *n f.*
24		13	2.23	18	48	38.9	*F, p S,* sends two rectangular arms *n* & *p.*
25		13	3.34	18	49	32.3	*v F, l l, p B* exc *N* (meas.), * *s f.*
26		13	6.58	19	48	30.6	*F, v S, l* 0°.
27		13	27.19	19	30	9.0	*p F, v S, i F, g b M.*
28		13	33.05	18	47	22.6	*v F, l* 165°, sev *F N,* the brightest meas.
29		13	35.69	18	51	23.1	*p B, l* 40°, curved, *v* nw, *N M.*
30		13	42.38	18	54	3.4	*v F, l* 45°, dif, *v l b M.*
31		13	43.78	18	54	27.9	*v F,* in the Axis of 30, *v S* stell *N M.*
32		13	51.85	19	9	21.2	*F, S,* S-shaped, *v F N M.*
33		13	58.88	19	18	28.7	*F, v S, R,* dif, *N.*
34		14	9.90	19	14	13.1	*F, v S,* dif, *v F* stell *N.*
35		14	12.28	19	32	28.0	*p B, l* 155°, br, 2 parall. Lines, *i F.*
36		14	21.96	19	0	58.6	*F, v S,* ○, *N M.*
37		14	22.48	18	52	12.3	*F, R, S,* ○.
38		14	24.11	19	3	50.7	*F, v S,* ○, *N M.*
39		14	28.56	18	51	49.9	*p B, R, v S,* ○.
40		14	28.83	18	52	40.4	*F, S,* dif.
41		14	30.24	19	0	27.3	*p F, S, R,* ○.

---

schärfste Spitze. 12 hat zwei Verdichtungen an der Spitze, wovon die SW. gemessen ist. Die drei gemessenen Fusspunkte liegen fast auf einer Geraden im PW. 120°.

[1] Dieser Stern ist nachträglich in δ an Nr. 14 angeschlossen, daher das absolute δ etwas unsicher, $\Delta\delta = 21''.17$.

42	8^h	14^m	$46^s.44$	19^0	$35'$	$21''.7$	*v F, l,* sev *F N,* (south. N meas.).
43		14	56.94	19	18	28.2 [1]	*v F, l,* br, dif, curved, ends *f* in *a F**.
44		15	0.00	19	24	28.1	*v F,* dif, *l* 90°, sev *N,* (*M* meas.).
45		15	11.86	19	14	59.2	*B, R, v S,* stell, two Spiral arms.
46		15	48.74	19	28	44.0	*F, S, R, N.*
47		15	49.24	19	0	43.0	*p F, S, R,* ○.
48		16	8.62	18	56	4.4	*v F, R,* ○, *v S* (sev ○ neb. quite nr).
49		16	9.94	18	55	58.8	*F, R,* ○, *v S.*
50		16	19.05	19	8	52.8	*p L,* ∾, *N* ○ *p B.*
51		16	21.75	18	58	43.1	*p B, R, S,* ○, *v F* arm connects with * 112°.
52		16	42.41	19	25	27.9	*F,* dif, *p S, l b M.*
53		16	44.27	19	3	30.5	*p F, R,* ○, *l b M,* arm 45°.
54		17	3.25	19	10	28.4	*v F,* dif, *i F, S.*
55		17	5.27	19	24	23.7	*p F, L,* dif, *l b M.*
56		17	15.11	19	57	12.0	*v F, S, g b M,* stell *N, B * S.*
57		17	19.53	18	59	20.6 [2]	similar 58, sm, att 58.
58		17	20.63	18	59	49.6 [3]	*p L, p B,* dif, *i F, F* stell *N.*
59		17	27.24	19	3	27.0	*p B, S, R,* ○, Spiral arms.
60		17	29.87	19	4	3.4	*v F,* dif, *v S, v F N.*

Für die obige Nebelgruppe sind die folgenden Vergleichsterne benutzt worden:

H = BD.	18°1904 = AG. Berlin	*A* 3265
G	18.1905	*A* 3268
J	20.2045	*B* 3330
F	19.1982	*A* 3281
L	18.1925	*A* 3306
K	19.1991	*A* 3296
Q	19.1963	*A* 3257

Diese Anhaltsterne stellen sich aus den Messungen auf der Platte mit folgender Genauigkeit dar:

---

[1]) Draperieartig, brückenförmig, die Fusspunkte der Brückenpfeiler im Süden.

[2]) Hier ist Alles voll von kleinen Nebeln.

[3]) 58 = NGC. 2581: $8^h\ 17^m\ 21^s + 19^0\ 0'.1$.

	α Katalog-Messung:	δ Katalog-Messung:
H	$+ 0^s04$	$- 1''0$
G	+ 0.25	— 1.4
J	— 0.11	— 1.3
F	— 0.05	+ 1.1
L	— 0.05	+ 1.1
K	— 0.16	+ 1.6
Q	— 0.11	— 0.6

Daraus ergibt sich der durchschnittliche Fehler einer Position in

$$\alpha \quad \pm 0^s11 \qquad \delta \quad \pm 1''2$$

Da die Nebelflecken meistens viel sicherer eingestellt werden können, als die grossen Scheiben der Vergleichsterne, so dürfte die Darstellung der Oerter der Nebelflecken selbst kaum mit grösseren Fehlern behaftet sein. Dafür tritt aber ein durch die zu grossen Scheiben der hellen Vergleichsterne verursachter systematischer Fehler ein.

Bei der Vermessung der obigen Gruppe betrug der Wert einer Revolution der Mikrometerschraube, mit der die Deklinationen gemessen werden

$$R = 210''43 + 0''015 \text{ w. F.}$$

Der Kopf der Mikrometerschraube ist in 300 Teile geteilt. Der Wert einer Minute des Rectascensionskreises ergab sich aus den gemessenen Rectascensionsdifferenzen zu

$$M = 0^m\ 59^s98 + 0^s009 \text{ w. F.}$$

d. h. der Messapparat stand von der Platte etwas zu weit weg; gleichzeitig sieht man aber aus der Zahl, dass die Distanz doch schon sehr genau getroffen war. Das ist übrigens ziemlich belanglos, weil ja doch nicht mit den Ablesungen, sondern mit ihrem so bestimmten wahren Wert gerechnet wird.

Ganz analog wurde die folgende Gruppe vermessen. Sie findet sich auf derselben Platte, wie die erste Gruppe. Die Mitte der Platte war in

$$\alpha = 8^h\ 20.9^m \qquad \delta = +\ 19^\circ\ 30'.4,$$

die Mitte der folgenden Nebelgruppe ist in

$$8^h\ 17.7^m \qquad 20^\circ\ 5'.9$$

zu suchen.

Gruppe 2.

Nr.	α			δ			
Nr. 1	8^h	11^m	$54^s.64$	19°	$47'$	$15''.2$	*v F, p S,* dif, *l b M.*
2		12	2.85	19	42	6.9	*p F, p S,* dif, *l N* 135° (sev. dif. neb. v. nr).
3		12	8.38	19	57	9.1	*v S, l* 135°, Axis *b*, spindle shaped.
4		12	57.26	19	43	43.3	*F, v l* 60°, nw.
5		13	4.41	19	44	53.4	*v S, F, R, v l b M.*
6		13	22.10	19	49	56.9	*B*, stell, *v S.*
7		13	26.93	19	50	42.9	*v F, S, l N.*
8		13	27.03	19	30	7.7	*v S, F, R, b M.*
9		13	30.78	19	49	58.9	*p B,* dif, *p S, l* 0°.
10		13	32.01	19	45	18.9	*p B, R, i F f, v S, b M.*
11		14	1.74	20	9	5.2	*p B, S, R,* stell *N* exc, *i F f.*
12[1])		14	12.17	19	32	31.8	*p B,* dif, *l* 155°, * 13 *s* att.
13		14	46.11	19	35	24.9	*p F,* nw, *l* 155°, sev *N*, (*s b N* meas.).
14		15	3.62	20	0	45.1	*p B, l* 65°, traillike, *h.*
15		15	7.70	19	48	41.8	*p F, p l* 110°, *v* nw, spindle shaped, *f* curved, * *M.*
16		15	21.91	20	4	40.0	*vF, pL, R,* dif (sev. similar quite nr).
17		15	25.42	20	19	10.9	*p B, R, v S,* stell *N, F * s* att.
18		15	54.34	19	48	28.8	*p S, F,* dif, *v l b* bi *N*, (*n N* meas.).
19		16	47.54	20	3	54.0	*p L,* dif, *p B, h, N!*
20		16	54.11	20	21	13.1	*F, S, l* 90°, *B * p* att.
21		16	57.18	20	6	25.7	*v F, S, R, b M,* ∾ (*s f v* nr *a* similar).
22		17	4.27	20	56	3.9	*F,* nw, *l* 45°, torpedoshaped, *b* Axis.
23		17	26.66	20	0	17.1	*S, F,* dif, *l b M,* cont sm *f.*
24		17	36.51	20	51	57.5	*p B, S, R,* stell *N,* dif *i f* and *p.*
25		17	48.05	19	53	58.9	*F, v S, l,* traillike *N.*
26		17	51.35	19	54	40.0	*p F, S,* stell *N, R,* ∾.
27		17	52.22	19	53	51.7	*F, l l* 135°, *F N,* curved (*v* nr *f a v S* Neb).

---

1) NGC. 2572: $8^h\ 14^m\ 12^s + 19^\circ\ 32'.5$.

28[1]	8^h	17^m	$56^s.89$	20^0	$41'$	$14''.1$	*F*, *v S*, *l* 160⁰, stell *N*, exc *n f*, (*M* meas.).
29		18	2.31	19	51	40.7	*F*, *S*, dif, *v F N*, exc.
30		18	27.25	20	20	44.7	*p L*, *p F*, dif, *b M*, bet 4 *B* st.
31		18	32.51	19	51	11.5	*p L*, *p F*, *h M*, outside dif.
32		18	37.87	20	9	50.1	*p L*, *S*, *R*, *b M*.
33		18	47.40	20	17	24.0	*p F*, *v S*, *b M*, *l N* 170⁰.
34		19	1.60	20	38	16.2	*p B*, *S*, *R*, stell, *i* dif *f*.
35		19	9.69	20	2	38.8	*p B*, *v S*, *N*, *i*.
36		19	23.62	20	12	18.7	*p B*, *S*, *R*, *l l* 90⁰.
37		19	26.83	20	17	23.4	*F*, *S*, *R*, *l l* 135⁰, *B* * *s f*.
38		19	34.03	20	46	21.4	*F*, *S*, dif, exc *N*.
39		21	8.54	20	12	7.6	*p F*, *S*, *R*, dif, *b M*.

Die Vergleichsterne zu dieser Nebelgruppe waren:

D = BD.	20°.2095 = AG. Berlin	*B* 3396
B	19.2014	*A* 3338
A	19.2012	*A* 3336
C	20.2082	*B* 3380
K	19.1991	*A* 3296
E	20.2066	*B* 3354
F	19.1982	*A* 3281

Die Darstellung der Sterne aus der Platte ergibt:

	α	δ
D	— $0^s.28$	+ $1''.1$
B	— 0.21	+ 0.5
A	+ 0.24	+ 1.8
C	— 0.31	— 1.5
K	+ 0.03	— 1.5
E	— 0.34	+ 0.3
F	+ 0.22	— 1.1

und damit der durchschnittliche Fehler einer Position

$$\pm 0^s.23 \qquad \pm 1''.1$$

[1]) NGC. 2582: $8^h\ 17^m\ 55^s + 20^0\ 43'.8$.

Die Darstellung in Rectascension ist hier schlechter. Ich vermute, dass der Stern *E* die Schuld daran trägt.

Es folgt eine weitere Nebelgruppe. Sie findet sich auf Platte B 104, aufgenommen mit dem Bruce-Teleskop *α*: am 9. Januar 1901 von 7^h 55.7^m bis 9^h 40.7^m M.Z.K. Die Mitte der Platte lag auf

$$a = 8^h\,19.2^m \qquad \delta = +\,24^0\,56'.6$$

während sich die Mitte der vermessenen Gruppe in

$$8^h\,8.8^m \qquad +\,24^0\,42'.5$$

befindet.

Gruppe 3.

Nr.							
Nr. 1	8^h	6^m	$6^s.78$	$+24^0$	27′	5″.0	*p B, S,* dif, *l* 135⁰ ∾.
2		6	10.10	24	25	20.9	*p B, l* 0⁰, dif ∾.
3		6	38.54	25	3	14.1	○, *v F, p S, p* dif.
4		6	39.28	25	2	12.9	○, *p F, S.*
5		6	39.68	24	14	29.8	*p B, S, R,* stell *N,* ∾.
6		7	18.98	24	50	35.8	*v F,* dif, *S, l* 155⁰.
7		7	41.26	24	30	27.0	*p F,* ○, dif, *S,* ∾.
8		7	44.11	24	30	38.6	*p F,* ○, dif, *S,* fainter then 7.
9		7	51.40	24	20	27.5	*F,* dif, *S,* bi *N.*
10		7	53.85	24	55	24.4	*S, v F, i, l* 0⁰.
11		8	0.23	24	54	52.9	*v F, S, i.*
12		8	34.45	24	13	46.5	*p B, S, p* dif, *b f.*
13		9	6.15	24	52	31.7	*F, v S,* dif, *i F,* app * *s p.*
14		9	12.26	24	19	49.2	○, *p F, p S, h*
15		9	13.09	25	4	32.9	*p F, R,* ○, *S.*
16		9	27.40	24	33	36.2	*B, p S, l* 205⁰.
17		9	58.97	25	3	23.5	*p F, S, R,* ○.
18		10	23.14	24	34	42.7	*p F, v S, R,* ○, *s i F.*
19		10	32.93	25	7	18.9	*p B, v l* 135⁰, nw !
20		10	37.95	25	10	52.1	*p B, R, S,* ○.
21		10	52.02	24	54	42.6	*p B,* dif, *S, b M.*
22		11	19.67	24	55	29.4	*p F, S, l l* 0⁰, dif, *b M.*
23		11	47.06	25	10	47.1	*p F, L,* dif, * 135⁰.
24	8	11	48.84	+25	10	27.5	*p B, S, b M, v* nr *B* *, nr 23.

Vergleichsterne:

F = BD. 25°1888 =	AG. Berlin B	3315
E = 25.1891 =		3323
M = 25.1878 =		3291
C = 24.1889 =		3306
D = 24.1907 =		3339

Die Darstellung der Vergleichsterne durch die Messung auf der Platte ergibt sich:

Durchschnittl. Fehler	in Rectascension	in Declination
	± 0ˢ04	± 0″6

Der Stern E wurde in Rectascension nicht verwandt, nur in Declination.

Die folgende 4. Gruppe befindet sich auf derselben Platte B 104. Mitte der Platte: 8^h 19.2^m + 24^0 56′6. Mitte der Gruppe: 8^h 9.7^m + 23^0 39′5.

Gruppe 4.

Nr.							
Nr. 1	8ʰ	8ᵐ	34ˢ55	+ 23°	34′	45″1	*p F*, *l* 135°, in Axis *b*, bi *N*, (northern measured).
2		8	40.60	23	30	51.0	*p B*, *p L*, *E* 90°, *N* north of Axis.
3		9	6.38	24	0	48.6	*S*, *F*, ○.
4		9	17.60	23	50	10.7	*p L*, *v F*, *l b S N*.
5		9	44.55	24	1	54.5	*S*, *F*, dif, *l* concentrated *M*.
6		9	50.57	23	57	37.7	*S*, *p F*, dif, *l l* 0°, bi *N*, (north. meas.).
7		9	52.53	23	56	46.1	*v F*, *S*, dif, diffic.
8		10	8.15	23	53	52.2	*v F*, *l* 45°, nw, nr * Nr. 8 *.
8*		10	12.37	23	53	42.1	nr Nr. 8, *B* *.
9		10	15.22	23	57	50.9	*v F*, *S*, dif ∾, *v l b M*, *l* 0°.
10		10	19.12	24	5	59.2	*p B*, *S*, dif ∾, stell *N*.
11		10	28.60	23	51	24.8 [1]	*v B*, *L*, dif, *b N* with 2 spiral arms!
12		10	45.20	23	26	59.5	*p F*, *S*, *l* 25°.
13		11	56.57	24	7	57.3	*F*, *S*, dif, *l* 90°, *b* Axis.

[1]) Nr. 11 im NGC. 2554: 8^h 11^m 30^s + 23^0 51′4, am Katalogort ist kein Nebel, während die Beschreibung auf Nr. 11 passt. Es ist daher ein Irrtum im NGC. anzunehmen.

Die Anhaltsterne für diese Gruppe sind:

C =	BD. 24°1889	= AG. Berlin B	3306
D =	24.1907		3339
B =	23.1922		3317
A =	23.1925		3321

Sie werden in folgender Weise aus den Messungen auf der Platte dargestellt:

Durchschnittl. Fehler in Rectascension: $\pm$ 0ˢ06
in Declination: $\pm$ 1ʺ2

Zu der Beschreibung der Nebel ist zu bemerken, dass die Bezeichnungsweise des Herschel'schen Generalkataloges benutzt ist, wie sie sich im Dreyerschen N. G. C. befindet. Ausserdem mussten aber noch folgende Begriffe eingeführt werden:

breit = br
schmal = nw
homogen = h
nach aussen allmählich verlaufend = ∞

Die Positionswinkel sind in Ermangelung einer Messvorrichtung nur roh geschätzt und zwar so, dass ein Strich im Beobachtungsheft bezüglich der Lage der Fäden gezogen und dessen Lage mit dem Transporteur abgelesen wurde.

Ueber einige interessante Eigentümlichkeiten einzelner von den gemessenen Nebelflecken soll an anderer Stelle berichtet werden. Ueberhaupt sollen später auch die interessantesten Objekte möglichst genau mit einem bei Repsold in Arbeit befindlichen Messapparat anderer Konstruktion untersucht werden. Hier war der Zweck der Mitteilung, zu zeigen, wie es möglich wäre, auf photographischem Wege und mit einfachen Messwerkzeugen die vielen unbekannten Nebel zu katalogisiren und sie kurz zu beschreiben. In dieser oder ganz ähnlicher Weise soll nach und nach eine Grundlage für einen photographischen Nebelkatalog und damit für eine für die Erkenntnis unseres Weltsystems so wichtige Statistik geschaffen werden.

Wie wichtig diese Katalogisirung ist, geht auch aus den angeführten Beispielen so recht anschaulich hervor. Es war absichtlich in den behandelten vier Gegenden eine Stelle des Himmels nicht gar weit von der Milchstrasse gewählt worden, die bisher als nebelarm betrachtet worden war. Die von den vier angeführten Gruppen bestrichene Fläche am Himmel beträgt 4.7 Quadratgrade. Es wurden auf ihr 135 Nebelflecke vermessen, von welchen, wie oben ersichtlich, nur 3 als bekannt im Dreyer'schen Generalkatalog angegeben sind. In den mir zugänglichen Listen Swift's befindet sich kein Nebel, der die betreffenden Gegenden berührt.[1]) In diesen vier Gegenden, — sie liegen alle zwischen Praesepe und Milchstrasse —, nämlich

$$\alpha = 8^h\ 12.1^m \qquad \delta = +\ 19^0\ 20'\ (1875.0)$$
$$8\ \ 17.7 \qquad\qquad 20\ \ \ 6$$
$$8\ \ \ 8.8 \qquad\qquad 24\ \ 43$$
$$8\ \ \ 9.7 \qquad\qquad 23\ \ 40$$

stellt sich daher das Verhältnis von neuentdeckten zu bekannten Nebelflecken wie 132 zu 3. Mit anderen Worten, es wären bisher — vor Anwendung der Photographie mit den kurzbrennweitigen Linsen — nur zwei Prozent der leicht zu photographirenden Nebelflecken katalogisirt.

Aus den wenigen Schätzungen, die ich an anderen als nebelreich bekannten Orten anstellen konnte, scheint hervorzugehen, dass dort die Zahl der Nebel durch die Photographie nicht in wesentlich grösserem Maasse zunimmt. Es sind dort im Durchschnitt die Nebel nur grösser und heller und daher mehr bekannt.

Sollte sich diese Erfahrung bei der Weiterführung der Katalogisirung bestätigen, so würde daraus ein merkwürdiger Schluss auf die Konstitution des Weltsystems zu ziehen sein.

---

[1]) Listen Nr. 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12 in M. Notices, sowie Catalogues 1, 2, 3, 4, 4a in „History and Work of Warner Observatory.

Ueber die Jodquellen bei Tölz.

Von **A. Rothpletz.**

(*Eingelaufen 20. Mai.*)

Am Nordrand der bayerischen Alpen entspringen mehrere jodhaltige Quellen, die zu Heilzwecken benutzt werden und unter denen diejenigen bei Tölz gegenwärtig die grösste Berühmtheit erlangt haben. Ueber den Ursprung dieser Quellen und ihres Jodgehaltes wissen wir jedoch trotz der theoretischen und praktischen Bedeutung, welche diesem Gegenstande zukommt, sehr wenig. Nur das eine steht vollkommen fest, dass diese Quellen nicht etwa aus ein und derselben Gesteinsschicht oder aus gleicher Formation entspringen. Die Quellen von Sulzberg bei Kempten und von Heilbrunn bei Penzberg treten aus der oberoligocänen Molasse zu Tage, die bei Tölz aus dem Eocän und die des Kainzenbades bei Partenkirchen aus der Trias auf der Grenze zwischen Partnach- und Raibler Schichten, die hier durch eine Gebirgsstörung neben einander gerückt worden sind.[1])

Im vorigen Jahre wurde bei Tölz durch planmässige Anlage eines Stollens eine neue verhältnissmässig starke Quelle aufgeschlossen und diese Arbeiten, welche nach meinen Vorschlägen ausgeführt worden waren, haben neues Licht auf den Ursprung der Krankenheiler Jodquellen und auf den geologischen Bau der dortigen Gegend geworfen, so dass es geboten erscheint, darüber einen Bericht zu geben. Doch will ich zum

---

[1]) Siehe A. Rothpletz, ein Querschnitt durch die Ostalpen, 1894, S. 127.

leichteren Verständnisse für Fernerstehende, kurz über die Vorgeschichte der dortigen Jodquellen einiges vorausschicken.

Die Entdeckung der ersten Krankenheiler Jodquelle fällt ins Jahr 1846. Der Jaudbauer war am Blomberg in etwa 800 Meter Meereshöhe beim Graben nach Mergel auf eine schwache Quelle gestossen, in der Otto Sendtner, damals Privatdozent, später Professor der Botanik in München, Jod nachwies. Doch ging die Quelle durch Verschüttung wieder verloren und der Bergingenieur Rohatzsch, der das Quellgebiet dem Bauer abkaufte, musste mehrere Stollen in das Berggehänge treiben, wobei er zwar nicht die verschüttete, aber mehrere andere Quelladern antraf. Er hat darüber einen Bericht 1851 im Neuen Jahrbuch für Mineralogie (S. 164) veröffentlicht und darin zwei Quellen in Erinnerung an sein sächsisches Heimathland Bernhard- und Johann Georgen-Quelle getauft.

Analysen des Quellwassers wurden gemacht und ebenso Versuche eine Kuranstalt zu gründen, die aber erst von Erfolg begleitet waren, als Karl Herder aus Freiburg i. B. die Quellen 1856 durch Kauf erworben hatte. In diesem Jahre wurde auch die Jodquelle an der Bockleiten (Annaquelle) entdeckt und später kamen bei Krankenheil noch die Maximiliansquelle (1868) und die zwei Marienquellen (1870) hinzu. Seit 1861 sind die Quellen im Besitz einer Actiengesellschaft.

Einen kurzen Bericht über die geologischen Verhältnisse der Karls-[1]) und Annaquelle, bei deren Fassung er zugegen war, gab Gümbel 1861 in seiner Geognost. Beschreibung des bayer. Alpengebirges S. 634. Dieser und der frühere Bericht von Rohatzsch sind die einzigen literarischen Quellen, aus denen die zahlreichen Badebrochüren der Doctoren Gsell-Fels, Höfler und Streber bei Darstellung der Quellverhältnisse geschöpft haben.

Es ist mir unbekannt, wen Herder bei Fassung der Quellen als technischen Berather zur Seite hatte, aber sicher ist es,

---

[1]) Diese Quellen waren schon theilweise von Rohatzsch erschürft gewesen, aber erst später und nach ihrer Fassung durch Herder wurde die hinterste von den 3 Quellen 1872 erschlossen.

dass bei dieser Fassung Fehler begangen wurden. Zwar ging man durch Schürfungen den einzelnen Quellen so lange nach, bis man an die Stelle kam, wo sie aus dem festen Felsen heraustreten, aber dann umschloss man bei den wichtigeren Quellen diese Stelle mit einer festen Cementhülle domartig und zwang das Wasser aus diesem kleinen Sammelkessel durch eine Röhre zu entweichen, die fest in dem Cementmantel eingefügt war und die bei der Bernhard- und Maximilianquelle 1½ bezw. 3 Meter lang und senkrecht aufgestellt war, so dass es nur bei entsprechendem Auftrieb oben zum Ueberlaufen des Wassers kam. Die Folge war, dass später niemand die Ursache feststellen konnte, als die Quellen geringere Wassermengen gaben, und da auch weder Pläne noch Beschreibungen der Quellfassungen existirten, so blieb selbst der eingehenden im Jahre 1892 vom kgl. Bezirksamte vorgenommenen Untersuchung der eigentliche Ursprung der meisten dieser Quellen verborgen. Als dann im Februar 1900 die Cementverschlüsse der Krankenheiler Quellen gänzlich entfernt wurden, sah man, dass sich in den künstlichen Sammelkesseln im Laufe der Zeit ein feiner grauer Schlamm angehäuft hatte, der auch die Abflussröhren zum Theil verstopfte und wahrscheinlich die Ursache geworden war, dass das Quellwasser tiefer unten im Gestein auf dessen feinen Spalten andere Auswege gesucht und gefunden hatte.

Schon 1890 und 1892, als die Bernhard- und die Johann-Georgenquelle neuen quantitativen Analysen unterworfen wurden, ergab sich, dass gegenüber den früheren 1852 von Fresenius und Wittstein vorgenommenen Untersuchungen der Jodgehalt abgenommen hatte. Man musste daraus erkennen, dass die vorhandenen Quellen den steigenden Ansprüchen des immer mehr aufblühenden Badeortes nicht mehr genügen konnten, und so entschloss sich die Verwaltung der Actiengesellschaft endlich 1899 energische Nachforschungen nach neuen Quellen zu unternehmen.

Es war nicht leicht hierfür einen bestimmten Arbeitsplan zu entwerfen, denn nachdem schon die Natur durch eine mächtige und weit ausgedehnte Decke von Moränen, Gehängeschutt

und Alluvionen Lage und Ausdehnung der Schichten des Untergrundes fast ganz verhüllt hatte, waren durch die schon erwähnte Verkleisterung der Quellfassungen auch die künstlich geschaffenen Aufschlüsse fast gänzlich der Beobachtung wieder entzogen worden. Die Schilderung derselben in den eingangs erwähnten zwei Berichten von Rohatzsch und Gümbel gab ebenfalls keine verlässigen Anhaltspunkte, da mehreres in denselben unklar und widerspruchsvoll blieb. Rohatzsch, der seiner Beschreibung leider weder Grundrisse noch Profile beigegeben hat, scheint bei Angabe des Einfallens der Schichten Nord und Süd mit einander verwechselt zu haben. Ebenso Gümbel, der zwar eine Profilzeichnung gab, darin aber ein nördliches Einfallen einzeichnete, obschon im erläuternden Text in Uebereinstimmung mit Rohatzsch ausdrücklich ein südliches Einfallen erwähnt wird. Gleiches Einfallen zeigen Text und Profil für den Steinbruch an der Bocksleiten, in dem auch heute noch deutlich das Entgegengesetzte beobachtet wird. Den breiten Streifen von Eocän, den die geologische Karte am Eierbach aufweist, habe ich vergeblich gesucht, dahingegen fehlt auf derselben der Bühel von glaukonitischer senoner Kreide, der nordöstlich der Blomberger Quellen im Walde aufragt und in dem schon vor langem der Jaudbauer einen kleinen Schleifsteinbruch angelegt hatte.

Eine mehrtägige Untersuchung des Tölzer Quellengebietes im October 1899 führte mich zu folgenden Ergebnissen: Alle Jodquellen am Blomberg entspringen einem rothen Kalklager, das beiderseits von thonigen Mergeln eingefasst ist. Dieses Lager entspricht dem mitteleocänen Enzenauer Marmor. Es streicht von SO. nach NW. und die Mergel auf seiner SW.-Seite haben das Aussehen der jüngeren Stockletten. Die Mergel auf der Nordostseite sind anders beschaffen und schliessen kleine Bänke eines glaukonitischen Quarzsandsteines ein. Ob sie ebenfalls wie die Stockletten dem Kalklager concordant angelagert sind, blieb zweifelhaft, weil es sich nicht sicher entscheiden liess, ob die Auflagerungsfläche, welche mit 40—60° nach NNO. einfällt und stellenweise deutliche Schrammen auf

dem rothen Kalkstein zeigt, eine Schicht- oder eine Verwerfungsfläche sei. Der im Süden davon auftretende Flysch zeigt ein so verschiedenes Streichen und Fallen, dass ein normaler Verband desselben mit den eocänen Schichten nicht bestehen kann. Beide stossen wahrscheinlich auf einer grossen Verwerfungsspalte aneinander. Jodhaltig hatte sich bisher keine der vielen Quellen erwiesen, die dem Flysch entspringen, die Jodquellen sind vielmehr auf das Kalklager beschränkt und sie entspringen alle mit Ausnahme der Karlsquellen am Nordrande des rothen Kalkes. Anscheinend bilden die Spalten dieses Kalklagers die Wege, auf denen die Quellen aufsteigen, die von seitlichem Ausweichen durch die Mergel im Hangenden und Liegenden abgehalten werden.

Daraus ergab sich von selbst, wie man es zu machen habe, um, ohne die gefassten Quellen zu stören und ohne allzugrosse Kosten, etwa vorhandene neue Quellen aufzuschliessen. Ein Stollen von N. her mit südöstlicher Richtung in den Berg getrieben, musste bei einer verhältnissmässig geringen Länge, weiter westlich das rothe Kalklager erreichen und dabei höchst wahrscheinlich auf aufsteigende Quellen stossen.

Im Januar 1900 wurde mit der Anlage eines solchen Stollens begonnen, der bei einer Länge von 35 Metern wirklich auf das Kalklager stiess und zwar etwa 9 Meter nordwestlich von der Bernhardsquelle. Schon am 10. März traf man eine jodhaltige Quelle, die aus einer Spalte jenes Kalklagers empordrang und viel wasserreicher als die benachbarte Johann Georgen- und Bernhardsquelle war. Indem man im Streichen des Marmorlagers den Stollen nach NW. noch eine kurze Strecke weit trieb, erreichte man alsbald noch eine zweite aber schwächere Jodquelle und es kann kaum einem Zweifel unterliegen, dass in dieser Richtung noch weitere Quellen anzutreffen sind. Da aber die gefundene Wassermenge vorerst genügend erschien, wurde die Arbeit eingestellt. Nach einigen Tagen zeigte es sich, dass zwischen den neuen und den zwei benachbarten alten Quellen ein Zusammenhang besteht, denn letztere begannen bedeutend schwächer zu laufen und

haben bis heute ihren ehemaligen Wasserreichtum nicht wieder erlangt. Dahingegen machte sich bei den anderen Krankenheiler Quellen keinerlei Abnahme bemerkbar. Die neue Quelle lieferte ungefähr soviel Wasser als sämmtliche alten Krankenheilerquellen zusammen (also mit Ausschluss der Annaquelle an der Isar). Jetzt erst ging man daran, die Fassung jener alten Quellen aufzudecken, wobei die bereits erwähnten Mängel derselben, zugleich aber auch eine Anzahl sehr wichtiger geologischer Thatsachen zu Tage kamen, die in Verbindung mit den Aufschlüssen im neuen Stollen es gestatten eine bestimmtere Vorstellung von den Beziehungen der Jodquellen zum Gebirgsbau zu gewinnen.

1. Die geologischen Verhältnisse bei Krankenheil am Blomberg.

Die beistehende Kartenskizze zeigt alle Aufschlüsse des tertiären Gesteins, welche von Natur oder Menschenhand im Fassungsgebiete der Krankenheiler Quellen geschaffen worden sind. Alles, was weiss gelassen ist, gehört zu der grossen Moränendecke, welche das Gehänge des Blomberges an dieser Stelle bedeckt und die selbst wieder zum Theil durch jüngere Gehängebildungen und künstliche Aufschüttungen verhüllt ist.

Mit *c* ist der rothe Kalkstein bezeichnet, der dem Enzenauer mitteleocänen Marmor entspricht. Rohatzsch hat seinerzeit bei seinen Schurfarbeiten viel Versteinerungen darin gefunden, die aber nie einer genauen Bestimmung unterworfen worden sind. Nummuliten kommen darin sicher vor und auch sonst weist die petrographische Beschaffenheit auf den Enzenauer Marmor hin, der ungefähr in 700 Meter westnordwestlicher Entfernung auf dem Nordgehänge des Blomberges in einem grossen Steinbruch des Tölzer Magistrates ansteht. Gegenwärtig ist der Bruch auflässig, aber über den mehrere Meter hohen Wänden des rothen Marmors sieht man noch recht deutlich mit schwacher südlicher Schichtneigung die jüngeren foraminiferenführenden Stockletten oben aufliegen.

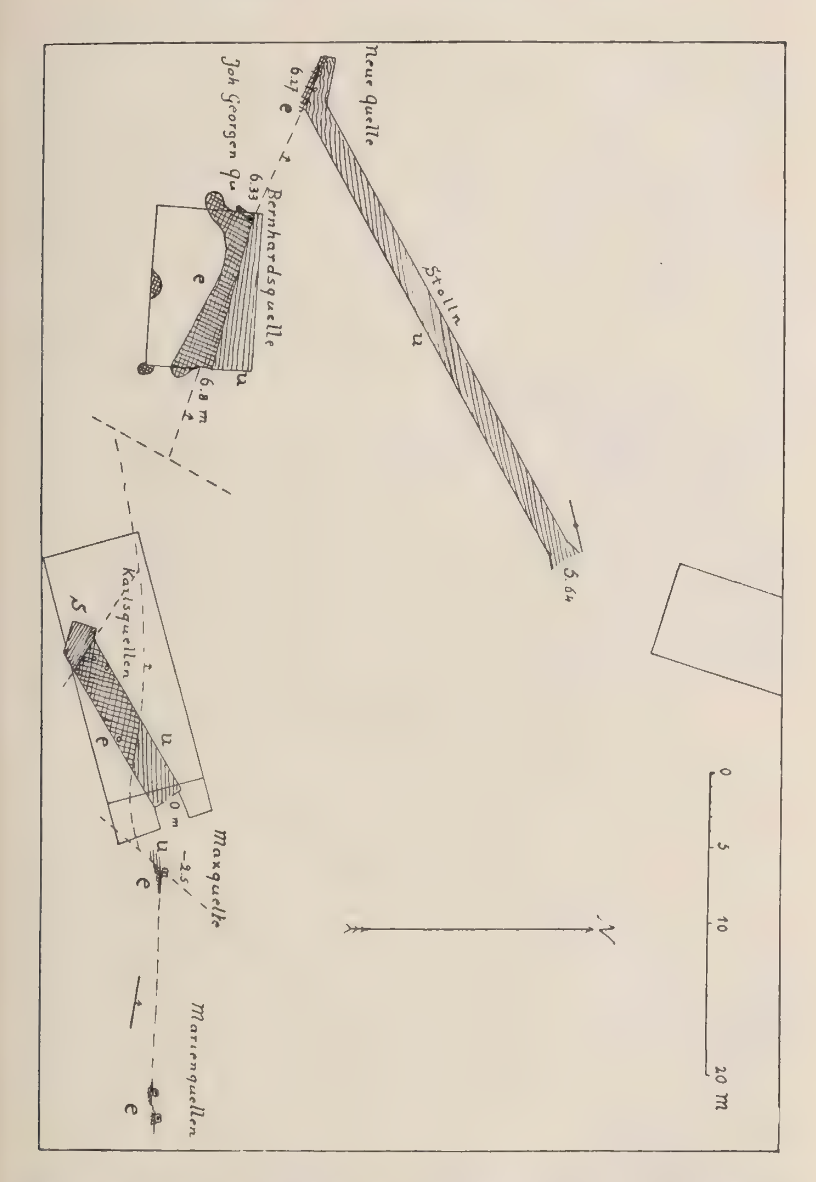


Fig. 1. Kartenskizze der Blomberger Quellenfassungen. 1:500. *u* Untereocäne Mergel, *e* Mitteleocäner Enzenauer Marmor, *s* Obereocäne Stockletten. Die Zahlen bedeuten die Höhe in Metern über und unter der Thürschwelle des Karlstollens.

Letten von gleicher Beschaffenheit sind auch im Karlsstollen auf der Südseite des Marmors aufgeschlossen (s. die Skizze) und scheinen ebenso wie letzterer senkrecht aufgerichtet zu sein.

Von anderer Beschaffenheit sind die Mergel auf der Nordseite des Marmorzuges. Sie sind schwärzlich und enthalten sehr viel silberglänzende Schüppchen von Kaliglimmer. Vereinzelt kommen Einlagerungen von festem etwas glaukonitischem Kalkstein und kalkigem Sandstein in schmalen Bänken in diesem dünnschieferigen Mergel vor. Versteinerungen sind selten und dann meist schlecht erhalten. Theils sind es unbestimmbare kohlige Pflanzenreste, theils weisschimmernde Schalen von Mollusken. Doch sind die meisten Schalen verdrückt, von mehliger Beschaffenheit und zum Theil schon aufgelöst. Nur in den harten Kalkbänken sind sie gut erhalten, dann aber schwer freizulegen. Solche Versteinerungen wurden durch den 30 Meter langen Stollen mehrfach zu Tage gefördert. Soweit sie sich bestimmen liessen, verweisen sie auf untereocänes Alter der Ablagerung. Ich fand:

Gryphaea Gümbeli M.-E.
Anomia tenuistriata Desh.
Cardium sp.
Cytherea sp.
Turritella sp.
Nautilus sp.

Es haben diese Funde deshalb eine weiterreichende Bedeutung, weil bisher aus der Tölzer Gegend untereocäne Ablagerungen noch nicht bekannt geworden sind. Auch diese Mergel sind senkrecht aufgerichtet und wir haben mithin scheinbar eine ganz regelmässige Aufeinanderfolge von Nord nach Süd: untereocäne Mergel, mitteleocäner Marmor und obereocäne Stockletten.

Gleichwohl besteht keine concordante Lagerung zwischen den untereocänen Mergeln und dem Marmorlager. Erstere streichen von Ost nach West mit localer Ablenkung nach

WSW (am Eingang des neuen Stollens N 105° W). Die Grenze aber gegen den Marmor streicht bei der Neuen Quelle und im Bernhardstollen, von kleinen Verbiegungen abgesehen, N 70° W, im Karlsstollen N 80° W. Diese Fläche und die Mergelschichten bilden also im Streichen einen Winkel abwechselnd von 10 bis 35°. Dazu kommt noch, dass die Mergel in der Regel senkrecht oder doch fast senkrecht stehen, während die Grenzfläche mit 40°—60° nach NNO. einfällt. Besonders deutlich war dies während der Wegnahme der alten Quellenfassung im Bernhardsstollen zu beobachten (s. Fig. 2). Anders verhält sich die Grenze zwischen dem Marmor und den Stockletten, die allerdings nur im Karlstollen sichtbar ist. Sie streicht N 65° W und scheint vertikal gestellt wie die Stockletten selbst, so dass sie also eine wirkliche Schichtfläche ist, die zugleich die Richtung des Marmorlagers bezeichnet, die sonst mangels Bankung nicht erkannt werden kann.

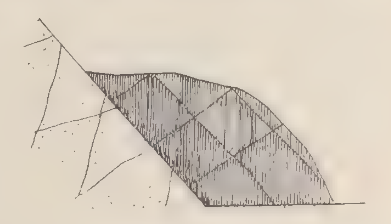


Fig. 2. Aufschluss am Eingang des Bernhardstollens. Grüne untereocäne Mergel auf den Enzenauer Marmor heraufgeschoben.

Wir haben also zwei verschiedene Schichtcomplexe vor uns: der eine im Süden besteht aus oberem und mittlerem Eocän, seine Schichten stehen saiger und streichen N 65° W; der andere besteht nur aus unterem Eocän mit ebenfalls saigeren Schichten, die jedoch O—W bis N 75° O streichen, mit denen des anderen Complexes also Winkel von 25—40° bilden.

Dieser ältere nördliche Complex liegt dem südlichen und jüngeren auf einer mit 40—60° nach Norden geneigten Fläche auf. Diese Auflagerungsfläche kann nur als eine Verwerfungsfläche aufgefasst werden, und da das Aeltere im Hangenden derselben liegt, muss sie eine Ueberschiebungsfläche sein. Die Richtung der Ueberschiebung wird im Bernhardstollen an den kräftigen Parallelschrammen erkannt, welche die Oberfläche des Marmorlagers im vorderen Theile des Stollens bedecken.

Dieselben liegen jedoch nicht genau in der Richtung der

Falllinie dieser Fläche, sondern steigen von NW. her schräg zur Falllinie gegen SO. auf. Die Schubbewegung fand also auf einer gegen NNO. geneigten Fläche, aber ziemlich genau von N. nach S. statt.

Im hinteren Theile des Stollens ist diese Schubfläche nicht geschrammt, auch nicht mehr so glatt, sondern rauh und brecciös, als wenn die härteren Einlagerungen des darüber geschobenen untereocänen Mergels auf dem Marmor eine Reibungsbreccie erzeugt hätten. Im neuen Stollen ist hingegen das Bild wieder etwas anders. Die Schubfläche ist nicht glatt und eben, sondern sanft gewellt, als ob sie vom Wasser corrodirt wäre. Es ist das vielleicht das Werk der gerade dort entspringenden kohlensäurehaltigen neuen Quelle, aus der Zeit, wo sie noch weiter aufwärts steigen musste, um die Oberfläche zu erreichen.

Auch die Mergel im Hangenden zeigen durchweg nahe der Schubfläche merkliche Veränderungen. Im neuen Stollen sind sie vor Ort ganz verdrückt und gestaucht, wie das auf Verwerfungsspalten gewöhnlich beobachtet wird. Aber bei der Quelle selbst und in noch höherem Maasse im Bernhardstollen ist der sonst grau-schwarze Mergel grünlich gefärbt, fest an die Marmorfläche angeschmiegt, in deren Unebenheiten hineingepresst und von spiegelnden welligen Druckflächen dicht durchsetzt. Es sind das nur die gewöhnlichen untereocänen Mergel, die jedoch längs der Ueberschiebung stark umgewandelt wurden. Da sie aber zugleich die Verschlussmauer für die schwefelwasserstoffhaltigen, im Kalkstein emporsteigenden Wasser bilden, so sind sie bis zu einem gewissen Grade damit getränkt und unterscheiden sich auch dadurch von dem gewöhnlichen Mergel.

Beim Ausräumen der Maxquelle hat sich ergeben, dass diese Quelle ebenfalls aus einer Spalte des Marmorlagers entspringt, dass letzteres jedoch daneben im Streichen gegen Westen von den grauen untereocänen Mergeln abgeschnitten wird, nach Art einer Querverschiebung, wie dieselbe in der Skizze eingetragen ist. Ich konnte das Streichen dieser saigern Trennungsspalte mit N 40° O bestimmen.

In Uebereinstimmung damit findet man die Nordgrenze des Marmors zwischen den Marienquellen und der Maxquelle gegenüber der im Karlstollen etwa um 2 Meter nach Norden vorgeschoben, so dass ein entsprechender horizontaler Vorschub des östlichen Theiles angenommen werden darf.

Etwas ähnliches muss zwischen der Karlsquelle und der Bernhardsquelle eingetreten sein, denn wenn man die Ueberschiebungsfläche beider Theile gegeneinander fortsetzt, wie das in der Skizze mit Berücksichtigung der Höhenlagen des Terrains durchgeführt ist, so treffen sie nicht genau aufeinander. Hier ist es das westliche Gebirgsstück, welches nach Norden und zwar um etwa 4 Meter vorgeschoben ist. Wenn man ferner die Grenzlinie zwischen Marmor und Stockletten vom Karlstollen nach West verlängert, so schneidet sie alsbald an der Ueberschiebungslinie ab und so ist es wahrscheinlich, dass das Marmorlager des Karlstollens von demjenigen des Bernhardstollens auf eine kurze Erstreckung durch Mergel getrennt ist. Für die aufsteigenden Quellen ist dies gewiss von grosser Bedeutung.

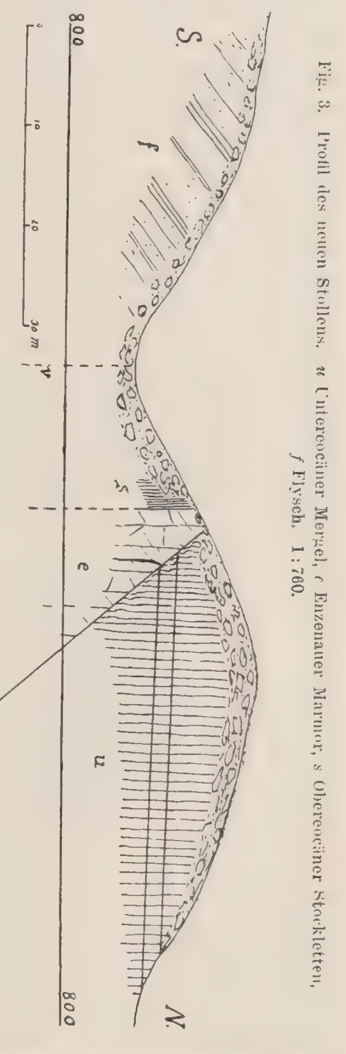


Fig. 3. Profil des neuen Stollens. *u* Untereocäner Mergel, *e* Enzenauer Marmor, *s* Obereocäner Stockletten, *f* Flysch. 1 : 760.

Aus alledem geht hervor, dass der Gebirgsbau im Quellgebiet ein recht verwickelter ist. Das beigegebene Profil versucht die Verhältnisse für die neue Quelle zu geben, wobei

auch das diluviale Deckgebirge eingetragen wurde, dessen wirkliche Mächtigkeit jedoch nicht genau bekannt ist. Ob die saigere Stellung des Marmorlagers hier so wie bei den Karlsquellen zutrifft, wissen wir ebenfalls nicht, es ist also diese und das Vorhandensein der sich südlich anlagernden Stockletten nur Vermuthung.

Dahingegen ist die Existenz des Flysches auf der anderen Seite des Wasserrisses sicher. Ein Schurf und ein alter Stollen haben denselben angefahren. In ersterem besteht er vorwiegend aus typischem, weichem, glimmerreichem Flyschsandstein mit kleinen verkohlten Pflanzenresten. Die Schichten fallen mit schwacher Neigung nach SW. ein, und es ist deshalb sehr wahrscheinlich, dass sie von dem Eocän durch eine Verwerfungsspalte getrennt sind, wie dies weiter im Westen bei Enzenau sicher nachgewiesen worden ist. Es gehört dieser Flysch einer breiten Zone an, die sich zwischen Isar und Loisach in einer Breite von 6 Kilometer überall südlich an den Eocänzug des Blomberges und von Enzenau anlegt. Von bestimmbaren Versteinerungen kommen fast nur die bekannten Flyschfucoiden darin vor, die im nördlichen Eocän jedoch gänzlich fehlen. Foraminiferen sind zwar auch sehr häufig darin, aber sie haben noch zu keiner specifischen Bestimmung geführt. Glücklicher Weise fand Herr Quass auf einer geologischen Excursion, welche ich im Sommer 1900 hierher führte, in einem Flyschblock der vom Blomberg stammt und in einem Wassergraben unmittelbar im Norden dieses Quellgebietes lag, den deutlichen Abdruck eines Inoceramus Cripsi, so dass wenigstens ein Theil dieses Flysches jedenfalls noch zur oberen Kreide gehören muss.

Geht man von den Krankenheiler Quellen über Wiesen und durch Wald, deren Boden durchweg aus Moränen und Gehängeschutt besteht, ungefähr 200 Meter nach NW., so gelangt man an einen etwas steil ansteigenden Waldhang, auf dessen halber Höhe ein längst verlassener kleiner Schleifsteinbruch liegt. Herumliegende Blöcke von grünem glaukonitreichem Kalkstein machen uns darauf aufmerksam. Er schliesst wenig gut erhaltene Schalen der Gryphaea vesicularis ein und gleicht auch sonst so vollkommen dem senonen „Grünsandstein“ von Enzenau,

dass kein Zweifel über sein Alter bestehen kann. Wenn wir diesen Aufschluss mit unserem Quellprofil (Fig. 3) in Verbindung setzen, so ergibt sich als das Wahrscheinlichste, dass diese Kreide die Unterlage des untereocänen Mergels bildet, und dass in dem aufschlusslosen zwischenliegenden Gebiete von 200 Meter Breite noch die obersten senonen Mergel zu suchen sind.

Der Kreidebruch liegt danach in der Mitte eines Gewölbes, dessen Nordflügel nicht erhalten oder wenigstens nicht sichtbar ist, dessen Südflügel aber aus den Schichten besteht, denen die Jodquellen entspringen. Es endet dieser Flügel an dem Flysch auf der bereits erwähnten Verwerfungsspalte. Ob letztere so saiger steht, wie ich sie gezeichnet habe, weiss ich nicht — an manchen Stellen der Nachbarschaft erscheint es so, an den meisten aber lässt es sich nicht feststellen. In dem eocänen Theil des genannten Südflügels hat eine nach Süd gerichtete Ueberschiebung stattgefunden, und die Jodquellen entspringen gerade da, wo die Ueberschiebungsfläche zu Tage geht.

In Figur 4 habe ich versucht nach den Aufschlüssen der Oberfläche den Bau des Gebirges bis herab zu einer Tiefe von fünfhundert Meter darzustellen. Ich habe in der Tiefe eine muldenartige Umbiegung des zu Tage saiger gestellten Flügels angenommen. Es entspricht das den Lagerungsverhältnissen von Kreide und Eocän, wie sie weiter im Westen durch die Arbeiten insbesondere von Dr. H. Imkeller[1]) klargelegt

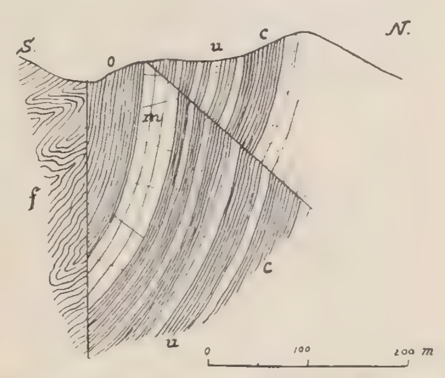


Fig. 4. Muthmasslicher Schichtbau bei den Blomberger Jodquellen. 1 : 7600. *f* Flysch, *c* obere Kreide, *u* unteres, *m* mittleres, *o* oberes Eocän.

[1]) Die Kreide- und Eocänbildungen am Stellauer Eck und Enzenauer Kopf bei Tölz. Programm zum Jahresbericht 1895/96 der städtischen Handelsschule München. Neuerdings auch Palaeontographica 1901 Bd. 48.

worden sind. Es soll damit jedoch keineswegs die Möglichkeit ausgeschlossen werden, dass die Schichten auch noch in grössere Tiefe senkrecht hinabsetzen oder dass noch andere Complicationen in der Lagerung hinzutreten.

Die geologischen Verhältnisse bei der Annaquelle an der Bocksleiten.

Dieselben sind von denen am Blomberg recht verschieden. Flysch, senone Kreide, untereocäne Mergel und Enzenauer Marmor sind nirgends sichtbar, aber an mehreren Stellen schauen unter der mächtigen diluvialen Ablagerung, welche hauptsächlich den langen und breiten Höhenzug des Wackersberges aufbaut, kleine Partien von Stockletten hervor, die wenig mächtige Einlagerungen von Granitmarmor enthalten.

Den besten Aufschluss gewährt der gegenwärtig auflässige Kirchmayer'sche Steinbruch etwa 100 Meter südlich der Häuser von Bocksleiten dicht neben der Fahrstrasse. Das eigentliche Lager von Lithotamnien-reichem Granitmarmor ist nur noch in einer Mächtigkeit von 2 Metern aufgeschlossen, darüber liegt 3 m stark ein feinkörniger Sandstein, dann 3 m Stockletten (ein grauer globigerinenreicher Mergel) und zu oberst nochmals Sandstein, der aber stark verwittert und bröckelig geworden ist. Alle diese Schichten streichen N 75° W und fallen mit 25° nach N ein. Zwei ältere Steinbrüche liegen je 50 m weiter im Süden, sind aber bereits ganz verwachsen und zum Theil bewaldet. Auch in ihnen stösst man nur auf Stockletten und Granitmarmor. Noch 100 m weiter südwärts im Fuchsgraben trifft man abermals einen Stocklettenartigen Mergel anstehend.

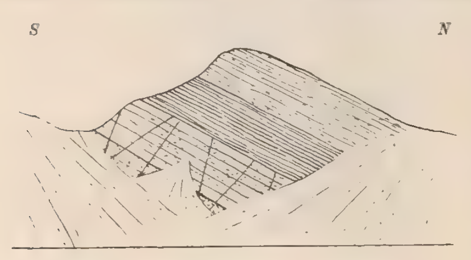


Fig. 5. Steinbruch an der Bocksleiten.

Zwischen dem Kirchmayr'schen Steinbruch und der 200 m

nordwestlich davon gelegenen Annaquelle fand ich in einem kleinen Wassergraben mitten im Wald einen grösseren Block von Granitmarmor, der wohl auf das Ausgehen einer solchen Gesteinsbank hinweist. Im nahen Gründelgraben steht wieder ein stocklettenartiger Mergel an, wie er auch im Annastollenhaus aufgeschlossen ist und vor dem Stollen auf einer kleinen Halde liegt.

Ob dieses 4 malige Vorkommen von Granitmarmor vier verschiedenen Lagern entspricht, oder ob es nur in Folge von Verwerfungen oder Faltung die Wiederholung ein und desselben Lagers darstellt, lässt sich bei der Geringfügigkeit der Aufschlüsse nicht entscheiden. In ersterem Falle müsste man den Stockletten eine Mächtigkeit von etwa 300 m zusprechen. Wenn ich die Stockletten hier kurzweg als Obereocän bezeichne, so soll das zunächst nur andeuten, dass sie jedenfalls jünger als der Enzenauer Marmor sind. Erst durch charakteristische Fossilfunde, die einstweilen von hier fehlen, liesse sich entscheiden, ob sie obereocän in dem Sinne sind, wie es nach O. Reis für die Stockletten bei Kressenberg zutrifft.

Der Verputz, den man seinerzeit der Annaquelle bei ihrer Fassung gegeben hat, lässt nur erkennen, dass die Quelle da entspringt, wo sich die diluvialen „Kreide"-Mergel discordant auf die Stockletten aufgelagert haben. Das heisst, sie sickert an mehreren Stellen aus jener Auflagerungsfläche hervor, ihr eigentlicher Ursprung ist unbekannt. Die Beschaffenheit des Stocklettens kann man nur aus den Stücken beurtheilen, die vor 46 Jahren beim Fassen der Quelle ausgegraben und vor dem Quellhaus auf eine Halde geworfen worden sind. Sie haben natürlich seither stark durch Verwitterung gelitten, doch lassen sie noch erkennen, dass dieser Mergel verhältnissmässig viele kleine kohlige Pflanzenreste einschliesst.

Die „Tölzer Kreide", welche darüber liegt, führt zu unterst vereinzelte kleine Gerölle und ist ziemlich sandig, was man direct über der Quelle sehen kann. 300 m südlich des Quellhauses ist diese Kreide in einer offenen Grube und südlich wie nördlich davon durch Stollen aufgeschlossen. Sie ist deutlich

horizontal geschichtet und wird von mächtigen fluvioglacialen Schottermassen überlagert. Ad. Schwager (Geognost. Jahreshefte 1894, S. 86) gibt Analysen des grauen Mergels (1) und einer gelblichen Abart (2) und zum Vergleich eines Dolomitsandes, wie er vom Hauptdolomit des Kramer bei Garmisch durch den Regen abgeschwemmt wird:

	CaO	MgO	CO_2	SiO_2	H_2O_3	Fe_2O_3	K_2O	Na_2O	H_2O+Org	Summa
1	33.08	6.31	32.90	14.73	8.17	1.78	0.94	0.16	2.66	100.73
2	36.90	4.50	33.94		21.75		0.14	0.11	2.70	100.04
3	31.60	18.50	46.00		sonstiges 3.4		—	—	—	99.50

Ob diese Kreide noch auf Eocän ruht, ist unbekannt, aber 400 m nördlich der Annaquelle kann dies jedenfalls nicht mehr der Fall sein, weil da am Ufer der Isar bereits unter Winkeln von 50—65° aufgerichtete Mergel und Sandsteine der oberoligocänen Molasse anstehen, die ein ostwestliches bis nordwestliches Streichen und südliches Einfallen zeigen. Sie fallen also widersinnig gegen den obereocänen Granitmarmor ein und ohne Zweifel stossen sie auf eine Verwerfungsspalte an dieselben an, ein Lagerungsverhältniss, das in ganz ähnlicher Weise bei dem Cementwerk Mariahilf bei Schaftlach nachgewiesen worden ist. Wo diese Verwerfung am Wackersberg durchstreicht, ist ungewiss. Es kann nahe der Annaquelle sein, vielleicht aber auch 400 m davon nördlich.

2. Das Wasser der Tölzer Jodquellen.

Von allen zu Heilzwecken benutzten Quellen besitzen wir chemische Analysen, die zwischen 1890 und 1900 gemacht worden sind. Von drei Quellen, nemlich der Bernhard-, Johann Georgen- und Annaquelle, liegen noch ältere Analysen von 1852 bezw. 1857 vor, so dass wir auch über die Veränderungen des Mineralgehaltes während 50 Jahren etwas wissen.

Ich gebe im Nachfolgenden eine Zusammenstellung dieser Analysen, doch will ich dazu bemerken, dass ich die Bestandtheile, welche nur in Spuren oder winzigsten Mengen von einzelnen Chemikern nachgewiesen worden sind, weggelassen habe, ebenso wie die fünfte Dezimalstelle. Die Bestimmungen der freien Kohlensäure und des Schwefelwasserstoffes sind nicht immer durchgeführt worden oder an Wasser, das in unzweckmässiger Weise der Quelle entnommen worden war, so dass die Analyse einen zu geringen Betrag ergeben musste. Nur die von L. A. Buchner, Fresenius und Hobein gemachten Bestimmungen verdienen Berücksichtigung. Die Analysen wurden ausgeführt 1852 von Fresenius und Wittstein (München), 1857 von Prof. L. A. Buchner (München), 1890 von Carl Buchner und Sohn in München, 1892 und 1900 von Dr. M. Hobein in München — alle im Auftrag der Quellenbesitzer, von denen ich diejenigen Angaben, welche bisher noch nicht veröffentlicht worden sind, erhalten habe. Von den Stoffen, die ich aus den Analysen weggelassen habe, sind quantitativ bestimmt worden in 1000 Theilen:

doppeltkohlensaures Lithion in der Johann Georgenquelle nur von Wittstein (0.0023),

doppeltkohlensaures Manganoxydul in der Bernhardsquelle von Fresenius 1862 und C. Buchner 1890 (0.0001),

phosphorsaures Eisenoxyd in der Johann Georgenquelle von Wittstein (0.0005) und von C. Buchner (0.0004),

kieselsaures Natron in der Johann Georgenquelle von Wittstein (0.0175), in der Karlsquelle von C. Buchner (0.0042), in der Maxquelle von C. Buchner (0.0076) und in der Marienquelle (0.0003),

kieselsaure Thonerde in der Bernhardsquelle von Fresenius (0.0020), in der neuen Quelle (0.0017), in der Annaquelle von L. A. Buchner (0.0012) und von C. Buchner (0.0096).

Aus den Jahren 1852 liegen von der Bernhards- und Johann Georgenquelle je zwei Analysen von Fresenius und

Wittstein vor, die in der Hauptsache eine gute Uebereinstimmung, im Einzelnen jedoch auch kleine Differenzen zeigen. Es mag dies zum Theil davon herrühren, dass das Wasser zu verschiedenen Zeiten den Quellen entnommen wurde, zuerst für Fresenius, später für Wittstein. Auch in der Gesammtmenge der Mineralbestandtheile ergab es Unterschiede bis zu 0.0534, also bis 7%. Aus diesen Schwankungen erklärt es sich wohl auch, dass der Gehalt an Jodnatrium von 1890 auf 1892 in der Johann Georgenquelle beinahe auf das Doppelte, in der Karlsquelle auf das siebenfache gestiegen war, trotzdem sich seit 1852 im Allgemeinen eine erhebliche Jodabnahme deutlich bemerkbar gemacht hat.

Fassen wir nun zunächst die Bernhardsquelle ins Auge, so lassen sich die gelösten Bestandtheile leicht in drei Gruppen bringen: die erste umfasst die Natriumverbindungen und die Kieselsäure, die zweite die Sulfate und die dritte die Carbonate von Kalk, Magnesium und Eisenoxydul. Von 1852 bis 1892 haben die gelösten Bestandtheile im Ganzen um etwa 20% abgenommen, die Natriumverbindungen sogar um beinahe 40%, während die Kalkcarbonate umgekehrt um 85% zugenommen haben. Die Sulfate hingegen zeigen abwechselnd Zu- und Abnahme, schliessen aber 1892 mit einer Mehrung gegen 1852 I von 64%, gegen 1852 II mit einer Minderung um 6% ab.

Man sieht hieraus, dass diese 3 Gruppen eine gewisse Selbstständigkeit besitzen, und da die erste Gruppe die Hauptbestandtheile der Soolquellen, die zweite der Schwefelquellen und die dritte der gewöhnlichen Quellen des Kalkgebirges einschliesst, so will ich sie der Kürze halber weiterhin als die Kochsalz-, Schwefel- und Kalk-Gruppen bezeichnen. Dass ich zu ersterer auch noch die Kieselsäure rechne, hat seinen Grund darin, dass dieser Bestandtheil regelmässig die Schwankungen nur dieser Gruppe mitmacht. Zur Schwefelgruppe ist natürlich auch der Schwefelwasserstoff zu zählen.

Vergleichen wir damit die Bestandtheile der Johann Georgenquelle, so ergeben sich auch jene 3 Gruppen ganz

von selbst; aber die Kochsalzgruppe weist zwischen 1852 und 1892 eine Mehrung von 29% bei einer Zunahme von nur 19% des Gesammtgehaltes auf. Umgekehrt hat die Kalkgruppe und selbst die Schwefelgruppe Abnahme zu verzeichnen, erstere um 12, letztere um 43%. Doch macht sich die der letzteren erst seit 1890 bemerkbar, während die der ersteren bis 1890 sogar um 28% zurückgegangen war, seither aber wieder schwach zunahm. Von der Kieselsäure bleibt es in dieser Quelle unsicher, ob man sie zur ersten oder dritten Gruppe stellen soll. Sie zeigt ungefähr gleiche Schwankungen wie das Jodnatrium, das ebenfalls eine Abnahme und zwar statt um 10 sogar um 20% aufweist und ebenso 1890 einen noch tieferen Stand als 1892 hatte. Bernhardsquelle und diese haben es gemeinsam, dass der Jodnatriumgehalt abgenommen hat, in jener sogar um 62%.

Die neue Quelle stimmt in allem sehr auffällig mit der Johann Georgenquelle überein und zwar mit Bezug auf Gesammtgehalt und die Kochsalzgruppe mit deren Stand von 1892, mit Bezug auf Sulfate und Kalkgruppe mit deren Stand von 1852. Die Bernhardsquelle war von beiden stets durch einen höheren Betrag in der Kalkgruppe und einen geringeren in der Kochsalzgruppe, wenigstens seit 1890 unterschieden. In der Schwefelgruppe steht sie hingegen beiden ungefähr gleich.

Berücksichtigt man, dass die gewöhnlichen Quellen dieser Gegend nur einen Gehalt aus der Kalkgruppe haben, so lässt sich dieser Unterschied so deuten, dass die Bernhardsquelle eine etwas stärkere Beimischung gewöhnlichen Quellwassers erhielt. 1890 hat C. Buchner Quellwasser untersucht, das ihm von der Badedirection zugeschickt worden war und das aus der Quellenfassung oberhalb der Jodquellen im Wassertöbel stammte.[1]) Es enthielt weder Jod, Brom. Lithium, noch Sulfate oder Schwefelwasserstoff und der Rückstand von 0.258‰

[1]) Gleiches Resultat hatte die Analyse von 1891 eines Wassers, das wahrscheinlich aus dem kleinen Versuchsstollen im Flysch südlich des Karlstollen stammte. Ein Rückstand von 0.302 enthielt 0.235 kohlensauren Kalk.

ergab 0.214 kohlensauren Kalk (incl. Magnesia). Da nun aber solche gewöhnliche Quellen dicht hinter der Bernhardsquelle und auch sonst fast in allen Quellenstollen entspringen, so wird eine Mischung mit den Jodquellen noch ehe diese zu Tage treten in den Gesteinsspalten sehr leicht stattfinden können.

Von diesen drei Quellen unterscheiden sich die Karlsquellen nicht unwesentlich dadurch, dass sie überhaupt wenige Bestandtheile, nur halb soviel von der Kochsalzgruppe, aber doppelt soviel von der Schwefel- und Kalkgruppe besitzen. Mit Bezug auf Schwefelwasserstoff und freie Kohlensäure besteht kein bedeutender Unterschied. Aehnlich verhalten sich die Max- und die Marienquelle, nur dass bei ersterer die Kalkgruppe noch stärker und bei beiden die Schwefel- und Kochsalzgruppen schwächer sind. Die drei letzteren Quellen weisen also auf stärkere Beimischung gewöhnlichen Wassers hin bei vermindertem Kochsalz, aber verstärktem Schwefelgehalt. Der Jodgehalt ist ein äusserst geringer.

Es steigern sich diese Verhältnisse noch bedeutend in der entfernten Annaquelle, deren Kalkgehalt gegenüber der Neuen Quelle auf mehr als das Doppelte zugleich mit dem gesammten Mineralgehalt gestiegen ist, während die erste Gruppe um zwei Drittel schwächer, die zweite Gruppe jedoch um fast die Hälfte stärker geworden ist. Auch hier ist der Jodgehalt sehr gering, während er 1857 nach L. A. Buchner 10 mal so gross gewesen war. Die freie Kohlensäure ist gegenüber der neuen Quelle erheblich gesunken, während der Schwefelwasserstoff 1890 mehr als das Doppelte, 1857 sogar das 4 fache betrug. Die Annaquelle ist also vorwiegend eine Schwefelquelle, aber mit starkem Zufluss gewöhnlichen Quellwassers, das seit 1857 um $^1/_5$ noch zugenommen hat.

Alle Quellen haben einen nicht unbedeutenden Gehalt an freier Kohlensäure, der aber nicht unerheblichen Schwankungen zu unterliegen scheint. Die neue Quelle mit 0.02 CO_2 gleicht darin der Johann Georgenquelle von 1852 ganz und der Bernhardsquelle (0.014) von 1852 annähernd. Dahingegen fand Hobein in beiden letzteren 1892 fast zehnmal mehr CO_2

(0.117 und 0.139) und ähnliche Beträge in der Karl- und Maxquelle. Es scheint fast als wenn in diesem Jahre eine ausnahmsweise starke Kohlensäureentwickelung stattgefunden hätte. Die Annaquelle hingegen ergab sowohl 1857 als auch 1892 ungefähr gleiche Beträge, nemlich 0.083 und 0.089.

Neben der Veränderlichkeit in der chemischen Zusammensetzung, welche für die Tölzer Heilquellen, wie wir gesehen haben, im Laufe der letzten 50 Jahre nachgewiesen worden ist, besteht aber auch noch eine solche in der Wassermenge. Für frühere Jahre liegen allerdings die Messungen nicht mehr vor und nur ein uncontrollirbares Gerücht behauptet, dass die Annaquelle, als sie aufgefunden wurde, viel stärker gewesen sei als später, nachdem man sie gefasst hatte. Ob dies richtig, ob daran eine ungeschickte Fassung Schuld hat, muss unentschieden bleiben.

Anzahl der Sekunden, in denen ein Liter Wasser geliefert wurde:

	7. März 1891	?	1892	Januar 1900						1. Febr.		April	22. März 1901
				9	15	26	29	30	31	Vor.	Nach.		
Bernhardquelle	70	76	71.5	63	62.5	62.5	65.5	64.5	70	70	68	175	526
Joh. Georgenquelle	80	86	81.5	86	86.5	85	83.5	88	93	90.4	90		
Neue Quelle	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		8.1	14.5
Karlsquellen	57.5	60	66.5	27.5	29	31	33	36.6		—		26	12
Maxquelle	22.5	20	23	22	22.5	22	22.2	22.7	—	—		24	25
Marienquellen	17.5	17.5	17.5	18.5	18.5	18	20.5	18.2	—		—	21	22
Annaquelle	20	24	23	„	—	—	—	—	—	—		—	30

Bei anhaltend trockenem Wetter oder grosser Kälte laufen im Allgemeinen die Quellen schwächer. Die Zunahme bei den Karlsquellen mit dem Jahre 1900 kommt daher, dass die ungeschickte Fassung derselben entfernt und ein bis dahin unberücksichtigt gebliebener Quellast hinzugenommen worden war. Die starke Abnahme der Bernhard- und Johann Georgenquelle

zwischen Februar und April 1900 hängt mit der Erscheinung der Neuen Quelle zusammen.

Ueber die Temperatur des Jodquellwassers liegen leider nur mangelhafte Berichte vor. G. Höfler gab 1869 für die Bernhardsquelle 7.5° C. und für die Johann Georgenquelle 7.6° an. Gümbel erwähnte 1861 9.1° von der Jodquelle am Sauersberge, womit jedenfalls eine der beiden obigen Quellen gemeint sein muss. Leider ist bei keinen dieser Messungen die Jahreszeit angegeben und Höfler hat wohl nicht die Quelle an ihrem Ursprung gemessen, da sie 1869 schon längst vercementirt war, sondern an ihrem Röhrenausfluss. Gegenwärtig lassen sich an ihnen keine Thermometermessungen mehr vornehmen. Dahingegen ergab mir die neue Jodbrunnenquelle im März 1901 8.37° C. Die Messungen habe ich mit controllirten Instrumenten vorgenommen, die mir Herr Prof. Ebert aus der Sammlung der Technischen Hochschule freundlichst überlassen hat.

Am gleichen Tag fand ich für die Marien- und die vordere der Karlsquellen 6.9° und für die dritte hintere 3.9°.

Die Annaquelle wurde im Mai 1857 von L. A. Buchner mit 8.75° (= 7° R.) gemessen, im März 1901 fand ich 8.27°. Die Stollenquelle des Cementwerkes auf gleicher Meereshöhe (650 m) hatte 8.17°.

Nach den von Gümbel 1861 (Alpengebirge S. 835) zusammengestellten Quellenmessungen wäre die normale Quellentemperatur der Annaquelle 8.25°, für die Quellen am Sauersberg (805 m) 7.25°.

Die dort im Hintergrund des Bernhardstollen gefasste gewöhnliche, aber ziemlich starke Brunnenquelle, zeigte aber im März 1901 nur 1.75°. Im Sommer ist sie bedeutend wärmer.

3. Der Ursprung der Tölzer Jodquellen.

Aus den vorausgehenden Angaben lassen sich einige Schlüsse über die Herkunft dieser Quellen und ihres Mineralgehaltes ziehen.

Aus welcher Tiefe kommen diese Quellen?

Die neue Jodquelle ist nur um etwas mehr wie 1°, die Annaquelle blos um den Bruchtheil eines Grades wärmer als eine normale gewöhnliche Quelle und die Marien- und Karlsquellen sind sogar kälter. Dieser scheinbare Widerspruch klärt sich jedoch leicht auf, wenn wir die Art der Quellenfassung und die Natur der dortigen gewöhnlichen Quellen ins Auge fassen.

Die neue Quelle ist einige Meter unter der Bergoberfläche da gefasst, wo sie direct aus einer Felsspalte austritt, die anderen gemessenen Quellen hingegen sind gerade an der Oberfläche der festen Felsen, wo sie von Moränen- und Gehängeschutt bedeckt werden, gefasst, so dass das im Deckgebirge circulirende Tageswasser sich leicht damit mischt. Die Annaquelle hat in Folge dessen die Temperatur desselben von 8.17° beinahe schon erreicht, und die Karls- und Marienquellen mit 6.9° und 3.9° zeigen noch deutlicher den Einfluss des kalten März-Quellwassers.

Der ausgeprägt „heterothermale" Charakter der gewöhnlichen Sauersberger Quellen hat seine Ursache in der geringen Mächtigkeit der Gesteinsschichten, in denen sich die atmosphärischen Niederschläge zu Quellwasser ansammeln. Es sind Moränen und Gehängeschutt- und -lehm, welche auf den meist thonigen Mergeln der Kreide- und Tertiärformation liegen und die selbst mit ihren untersten Lagen nicht in die Region der „unveränderlichen Bodentemperatur" herabreichen. Winterkälte und Schneeschmelze werden deshalb hier sehr fühlbar und auch der Wasserreichtum und die Wasserreinheit der daraus entspringenden Quellen zeigen grosse und unmittelbare Abhängigkeit von den jeweiligen Regenmengen.

Anders liegen die Verhältnisse bei der Annaquelle, wo die tertiären Schichtgesteine von einer bis 10 Meter mächtigen diluvialen Mergelschicht, der „Tölzer Kreide", und einer darüber liegenden Masse fluvioglacialer Schotter bedeckt sind. Besonders in den unteren sandigen Lagen dieser „Kreide" bilden

die atmosphärischen Niederschläge eine Art von Grundwasser, das an den der Isar zugewendeten Gehängen in Form von Quellen zu Tage tritt. Dieses Quellwasser zeigt in Folge dessen eine von dem Wechsel der Tages- und Jahreszeiten ziemlich unabhängige und constante Temperatur.

Die Annaquelle, welche jedenfalls mit einer höheren Temperatur aus den eocänen Schichten aufsteigt, erreicht zunächst dieses Grundwasser-Niveau und muss sich mit diesem Wasser schon gemischt haben, bis sie an die Stelle kommt, wo sie heute gefasst ist und im März 8.27° hatte.

Nur die neue Jodquelle gibt mir also einen sicheren Beweis für ihre thermale Natur, aber gleichwohl ist auch sie schon stark beeinflusst von den Wassern, die von oben her in das zerklüftete Kalklager eindringen, den Fels abkühlen und sich mit dem aufsteigenden Quellwasser mischen. Unter Berücksichtigung dieser Thatsachen darf man wohl mit einiger Sicherheit annehmen, dass die Tölzer Jodquellen aus einer Tiefe von über 100 Meter aufsteigen.

Zu ähnlichen Ergebnissen führt uns die Betrachtung der mineralischen Bestandtheile dieser Quellen. Unter denselben betragen die Carbonate von Kalk, Magnesium und Eisen

bei der neuen Quelle	15%
„ den Karlsquellen	40
„ „ Marienquellen	44
„ der Annaquelle	52

Dieselben Bestandtheile finden sich auch in den gewöhnlichen dortigen Quellen, denen jedoch Sulfate, Jod und Kochsalz fremd sind, und zwar belaufen sie sich ungefähr auf 0.25 bis 0.30‰. Nehmen wir nun an, dass die aufsteigenden Jodquellen davon nur sehr wenig enthalten, den jetztigen Gehalt daran vielmehr erst der Beimengung gewöhnlichen Quellwassers verdanken, dann ergibt sich für die neue Quelle eine Beimengung von $^1/_3$, für die drei anderen Quellen von $^2/_3$ gewöhnlichen Quellwassers.

Dass diese Mischung wirklich eintritt, erkennt man sehr

deutlich an der Annaquelle, bei der unter jenen Carbonaten dasjenige des Magnesium besonders stark vertreten ist (0.276 statt 0.02 bis 0.05 bei den anderen Quellen). Das Grundwasser nimmt dort natürlich seine Bestandtheile aus der „Kreide“ und diese ist reicher an Magnesium als die Moränen der Umgebung und des Sauersberges, weil sie grossentheils aus fein zerriebenem Hauptdolomit besteht.

Diese erhebliche Beimengung kälteren Wassers muss natürlich die thermalen Quellen in ihrer Temperatur bedeutend herunterdrücken und zugleich ihren Gehalt an Sulfaten, Kochsalz, Soda und Jod mindern. Wenn wir also aus den gemessenen Temperaturen unmittelbar die Tiefe, auf Grund der Tiefenstufe von 30 m pro 1° C., berechnen wollten, aus der die Quellen aufsteigen, so würden wir recht unrichtige Resultate erhalten. Statt der 40—50 m, welche sich so für die neue Quelle ergeben würden, dürfen wir jedenfalls über 100 Meter als einen der Wirklichkeit näher kommenden Werth annehmen.

Wie sammelt sich das Untergrundwasser, das die aufsteigenden Jodquellen speist?

Es ist schon erwähnt, dass die atmosphärischen Niederschläge, soweit sie nicht unmittelbar der Isar zufliessen, in die aus Moränen, Schotter, Lehm u. s. w. bestehende Oberflächendecke eindringen und sich darin zu Quelladern und Grundwasser ansammeln. Noch tiefer einzudringen hindert sie im Allgemeinen die thonige Beschaffenheit der Kreide- und Tertiär-Schichten, welche das Gebirge aufbauen. Indessen liegen in Wechsellagerung mit diesen wasserundurchlässigen Schichten andere — Sandsteine und Kalksteine — welche ein Eindringen des Wassers verhältnissmässig leicht gestatten und so kommt es, dass doch ein wenn auch kleiner Theil der atmosphärischen Niederschläge in denselben verschwindet. Alle diese porösen Schichten sind aber einerseits steil aufgerichtet, anderseits von thonigen Schichten im Hangenden und Liegenden eingeschlossen. So sinken die einmal eingedrungenen Wasser auf jenen porösen

Schichten immer mehr in die Tiefe, andere folgen nach und es entstehen Untergrundwasser-Ansammlungen, die aber in der Hauptsache nur auf einzelne Gesteinsschichten beschränkt bleiben.

In unserem Falle sind diese Schichten zwar muldenförmig gebogen und fallen in Folge dessen steil nach Süd ein, aber ehe sie zur Umbiegung kommen, welche sie wieder zu Tage bringen müsste, werden sie von einer bedeutenden Verwerfungsspalte abgeschnitten, auf deren anderer Seite jetzt in Folge der stattgehabten Verwerfung stark gefaltete und gefältelte Flyschmergel und Sandsteine anstehen.

Durch diese Anlegung des thonigen Flysches an die unteren Enden der wasserführenden Schichten werden dieselben also nach unten abgeschlossen und das Untergrundwasser an weiterem Absteigen abgehalten. Der hydrostatische Druck muss aber bestrebt sein das angesammelte Wasser auf dem wenn auch engen Riss der Verwerfungsspalte in die Höhe zu treiben, wie in der Röhre eines artesischen Brunnens. Wenn dann dieses aufsteigende Wasser an die Stelle kommt, wo der stark zerklüftete Enzenauer Marmor an der Verwerfung abstösst, wird es leichter in die Spalten dieses Kalksteines eindringen als in der Verwerfungsspalte weiter aufsteigen und so erklärt es sich, dass die aufsteigenden Jodquellen des Blomberges alle aus diesem Marmorlager entspringen. Die stärksten dieser Quellen können freilich gar nicht bis zu Tage aufsteigen, weil sie von den überschobenen thonigen untereocänen Mergeln, in die sie nicht eindringen können, zurückgehalten werden. Erst künstlicher Abdeckung dieser Mergel ist es gelungen auch diesen Quellen einen Ausfluss zu schaffen.

Mit dieser Auffassung steht es im Einklang, dass die Jodquellen stärker fliessen müssen, wenn eine Periode stärkerer atmosphärischer Niederschläge vorausgegangen ist, weil dann mehr Wasser in die porösen Schichten eingedrungen, der Untergrundwasserspiegel dadurch gestiegen und der hydrostatische Druck vergrössert worden ist. Die thatsächlich beobachteten

grossen Schwankungen im Wasserreichtum der Quellen dienen zur Bestätigung.

Sobald das aufsteigende Wasser in die Klüfte des Marmorlagers eintritt, ist es der Berührung und Vermischung mit demjenigen Wasser ausgesetzt, das von oben in dieses Lager eingedrungen ist. Nach unserem Profil (Fig. 4 auf Seite 139), das allerdings in den tieferen Lagen nur vermuthungsweise gezeichnet ist, würde das bei einer Tiefe von etwa 200 Meter beginnen, wo das aufsteigende Wasser einem Wasser von etwa 13° begegnen, sich mit ihm mischen und sich abkühlen müsste. Höher herauf würde die Temperatur natürlich immer weiter sinken bis zu der „invariablen Zone", wo das Grundwasser etwas über 7° hat. Die Abkühlung ist thatsächlich sehr gross, denn das Wasser tritt nur noch mit einem Ueberschuss von wenig mehr als 1° zu Tage. Wie wir schon früher sahen, hat sich das aufsteigende wahrscheinlich um etwa ein Drittel mit absteigendem Quellwasser vermischt und da diese Quellen überhaupt nur langsam fliessen und aufsteigen, so mag auch die Abkühlung durch die umgebenden kälteren Gesteine ein Wesentliches zum Endergebniss beigetragen haben.

Wie bedeutend bei local sie begünstigenden Verhältnissen diese Beimischung abkühlend wirken kann, beweisen die tiefen März-Temperaturen der Marien- und Karlsquellen.

Woher stammen die mineralischen Bestandtheile und die Gase der Jodquellen?

Einen Theil müssen wir jedenfalls von dem gewöhnlichen Quellwasser ableiten, das sich mit dem aufsteigenden mischt. Die vorhandenen Analysen haben gezeigt, dass die gewöhnlichen Quellen am Blomberg nur sehr wenig Mineralgehalt haben (0.25—0.30‰) und zwar hauptsächlich kohlensauren Kalk (0.21—0.24‰). Die Thatsache, dass bei den nachgewiesenen zeitlichen Gehaltsschwankungen der Jodquellen einer Minderung an Sulfaten oder Kochsalz stets eine Mehrung an Kalkcarbonat entspricht, ist ein deutlicher Hinweis darauf, dass die Zufluss-

quellen von beiderlei Bestandtheilen getrennt sind. Stärkerem Zufluss von gewöhnlichen Quellwasser mit seinem Kalkcarbonat folgt natürlich in der Mischung eine Abnahme des aufsteigenden Wassers mit seinen Sulfaten und seinem Kochsalz.

Der eigentliche Thermalantheil dieser Jodquellen, welcher bei der neuen und der Johann Georgenquelle etwa $^2/_3$, bei den anderen bis nur $^1/_3$ ausmacht, bringt seine gelösten Stoffe aus der Tiefe mit herauf, und sie finden sich jedenfalls schon in dem Untergrundwasser vor, das diese Quellen speist. Da aber das Untergrundwasser aus einer Ansammlung von atmosphärischen Niederschlägen hervorgeht, welche als solche Sulfate, Kochsalz, Soda und Jod nicht oder doch nur in Spuren in Lösung haben, so bleibt nichts anderes übrig als anzunehmen, dass diese Substanzen sich in denselben Gesteinsablagerungen vorfinden, in denen sich jene Untergrundwasser ansammeln.

Im Meerwasser kommen sie ebenfalls vor und können sich in den sandigen und thonigen Absätzen des Meeres in Form von Steinsalz, Soda, Glaubersalz u. s. w. sehr leicht mit absetzen. Wenn sie in älteren Meeresablagerungen, die durch Hebungen trocken gelegt sind, verhältnissmässig selten angetroffen werden, so braucht dies nicht daher zu rühren, dass sie überhaupt nie da waren. Sie sind in Wasser so leicht löslich, dass das circulirende Grund- und Untergrundwasser sie meist schon gelöst und weggeführt hat. Wo die Circulation des unterirdischen Wassers gehemmt ist, tritt zwar Lösung aber nicht Wegführung ein, wie der berühmte „Torrent d'Anzin“ bei Valenciennes in Frankreich beweist, der als eine unterirdische Wasseransammlung in den Kreideschichten in einer Tiefe von ungefähr 80 m mit einer Dicke der Wasserschicht von 8—9 m ruht und einen Flächenraum von 2450 Hectaren einnimmt. Sein Wasser tritt nicht in Form von Quellen zu Tage, wird aber seit längerer Zeit von den Bergleuten künstlich entfernt, so dass die Menge schon bedeutend abgenommen hat. Das Wasser führt pro Liter bis 13 g feste Bestandtheile und zwar besonders Kochsalz und Sulfate.

In ähnlicher Weise ist anzunehmen, dass auch die Kreide-

und Eocänschichten bei Tölz ursprünglich diese leicht löslichen Meeressalze enthielten. Bald nach ihrer Ablagerung zur mittleren Oligocänzeit wurden sie dann aufgerichtet und gefaltet. In den oberen Theilen der Faltengewölbe trat dann sofort Auslaugung durch die Quellwasser ein, aber in den tieferen Faltenmulden, welche unter das Niveau der Thäler herabreichen, fehlte dem Untergrundwasser das Gefälle und damit die Strömung. Es konnte wohl jene Salze theilweise lösen, aber sie nicht wegführen. Dies wurde bei Tölz erst möglich, als der hydrostatische Druck das stagnirende Untergrundwasser auf der inzwischen entstandenen Verwerfungsspalte heraufzupressen begann. Freilich ist dieser Ausfluss so schwach, dass die Menge der Salze dadurch bisher kaum eine erhebliche Minderung erfahren hat, dahingegen ist es wohl verständlich, dass die Lösung im Untergrundwasser keine gleichmässige ist. Sie wird in Folge der langsamen Bewegung des Wassers in den Gesteinen an den einen Stellen mehr, an anderen weniger Salze enthalten und bald mehr Sulfate, bald mehr Kochsalz oder Soda. Insbesondere wird es nicht Wunder nehmen, wenn der Jodgehalt sehr ungleichmässig vertheilt ist. Das Jod ist im Meerwasser in so geringen Mengen nur vorhanden, dass es sich überhaupt erst dann bemerkbar macht, wenn Thiere und hauptsächlich Meerespflanzen es in sich aufgenommen haben. Nach deren Tod gelangt es dann am Boden des Meeres in die entstehenden Ablagerungen, aber natürlich nur, wie die Thiere und Pflanzen selbst, an bestimmten Stellen in nachweisbaren Mengen.

Je nachdem nun der aufsteigende Quellstrom gerade von der einen oder der anderen Stelle jenes Untergrundwassers aus gespeist wird, enthält er mehr oder weniger Jod oder Kochsalz oder Sulfate. Diese Veränderlichkeit ist im Laufe der letzten 50 Jahre durch die Analysen auch für die Tölzer Jodquellen mit Sicherheit festgestellt worden.

Ausserdem zeigen aber auch die einzelnen Quellen nicht unerhebliche aber constante gegenseitige Verschiedenheiten in den Lösungen. Wie die Quellen in einer Reihe von Ost nach

West angeordnet sind, so steigt auch in dieser Richtung ihr Gehalt an Jod, Kochsalz und Soda und fällt der an Sulfaten.

Diese Verschiedenartigkeit wird noch durch besondere tektonische Verhältnisse begünstigt und verstärkt. Die neue Quelle hat nach ihrer Lösung grösste Aehnlichkeit mit der Johann Georgen- und Bernhardquelle, die 10 m von ihr entfernt entspringen. Nur 30 m weiter nach Osten liegen die Karlsquellen, ihr Gehalt jedoch ist schon wesentlich verändert — von der Kochsalzgruppe nur noch halb soviel, von den Sulfaten doppelt soviel vorhanden. Eine Querverwerfung trennt beide Quellengruppen, und wenn die Verschiebung auf derselben auch nur einige Meter beträgt, so genügt dies doch schon um die Marmorbank, in der die Quellwasser aufsteigen, zu beiden Seiten soweit zu verrücken, dass sie nicht mehr einen zusammenhängenden Zug darstellt und dass die Quellwasser in derselben nicht mehr mit einander in Verbindung treten können. Es trat dies bei Erschliessung der neuen Quelle sehr klar in die Erscheinung. Wenige Tage nachher zeigten die Johann Georgen- und Bernhardsquelle eine starke Abnahme ihrer Wassermenge, während der Reichtum der Karlsquellen bisher in keiner Weise in Mitleidenschaft gezogen worden ist.

Bei der Max- und den Marienquellen macht sich gegenüber den Karlsquellen wiederum eine Veränderung fühlbar, die Menge der Kochsalzgruppe ist etwas, die der Sulfate aber erheblich kleiner geworden. Auch da liegt eine kleine Querverwerfung trennend dazwischen.

Sendtner hat seinerzeit den Jodgehalt auf Rechnung der Flyschfucoiden gestellt, und es scheint sogar, dass diese es waren, welche ihn veranlassten, das Wasser auf Jod zu prüfen. Diese Fucoiden finden sich zwar in grossen Mengen im Gebiet der Quellen, aber doch nur in Flyschgesteinsstücken, die von der Höhe des Blomberges herabgefallen oder von Gletschern der Eiszeit herbeigeführt und auf den Eocän- und Kreideschichtköpfen liegen geblieben sind. Wir wissen jetzt, dass die Jodquellen nicht aus dem Flysch selbst entspringen. Dementsprechend nahm Gümbel (Geol. Bayerns Bd. II S. 162) 1894

an, es möchten die Meeresthiere der Nummulitenschichten den Quellen den Jodgehalt liefern. Mir scheint, dass auch die Pflanzen und Thiere der jüngeren Kreideperiode herangezogen werden müssen, jedoch nicht, als die directen Lieferanten des Jodes. Die meisten der jodausscheidenden Organismen sind gar nicht versteinerungsfähig, ihre Körper sind längst zerfallen und verwest. Aber das Jod hat sich in die Meeressalze zurückbegeben und wird da nun wieder von den eindringenden süssen Wassern vorgefunden und aufgelöst.

Neben den Sulfaten enthalten die Jodquellen stets auch Schwefelwasserstoff und zwar besteht diese bestimmte Relation, dass mit der Menge der Sulfate auch die des Schwefelwasserstoffes steigt und fällt. Man wird denselben deshalb entstanden annehmen müssen aus einer Desoxydation der Sulfate, bewirkt durch Oxydation von organischen Substanzen, welche den dazu nöthigen Sauerstoff den Sulfaten entziehen, etwa nach der Formel:

$$Na_2 SO_4 + 2 C + 2 H_2O = 2 (H Na CO_3) + H_2 S.$$

Ein Theil des doppeltkohlensauren Natrons wäre somit nicht aus der Auflösung von Sodamineralien entstanden, sondern aus der Zerlegung von schwefelsaurem Natron unter Freiwerden von Schwefelwasserstoff.

Sehr geringe Mengen organischer Substanzen sind zwar in den Quellen nachgewiesen — aber für diesen Vorgang wären wohl hauptsächlich die kohligen Pflanzenreste verantwortlich zu machen, welche in den Mergeln der Eocän- und Kreideformation nicht zwar in mächtigen Lagern, wohl aber in häufigen Bruchstücken vorkommen.

In der Badeliteratur über Tölz ist der Versuch niedergelegt, den Schwefelwasserstoffgehalt aus der Einwirkung organischer Verbindungen auf den in den Mergeln allerdings ebenfalls vorhandenen Schwefelkies abzuleiten, womit eine von den Sulfaten ganz unabhängige Quelle für den Schwefelwasserstoff gegeben wäre. Es ist dies aber nicht sehr wahrscheinlich.

Die grösste Ungewissheit besteht über die Herkunft der

freien Kohlensäure. Die mit dem Regenwasser in den Boden und in das Untergrundwasser eindringende Kohlensäure reicht zur Erklärung nicht aus, weil diese zur Bildung der doppeltkohlensauren Salze vollauf aufgebraucht wird. Ausserdem müssten die gewöhnlichen Quellen am Blomberg ebenfalls entsprechende Mengen freier Kohlensäure führen, was aber nicht der Fall ist. Können chemische Vorgänge, die im Sammelgebiet des Untergrundwassers vor sich gehen, zur Erklärung herangezogen werden? Man möchte vielleicht an die mit Kohlensäureentwickelung verbundene Oxydation der schon erwähnten Pflanzenreste denken, wozu der mit dem Regenwasser eindringende und an dieselben gebundene Sauerstoff der Luft Veranlassung geben kann. Da jedoch mit einem solchen Vorgang stets auch die reichliche Entwickelung von Kohlenwasserstoffgasen verbunden ist, solche aber in den Tölzer Jodquellen bisher noch nicht quantitativ nachgewiesen worden sind, so ist diese Deutung wohl von der Hand zu weisen. Allerdings hat einmal nach den Angaben des Quellenwärters bei Annäherung eines offenen Lichtes über der neuen Quelle nach Wegnahme des Deckelverschlusses der Fassung eine schwach explosionsartige Gasentzündung stattgefunden, was wohl auf die Ausströmung von Kohlenwasserstoffgasen schliessen lässt, aber es müssen sehr geringe Mengen sein, weil es späteren Versuchen nicht mehr gelungen ist, ähnliches zu beobachten. Da Soollager häufig geringe Mengen solchen Gases im sog. Knistersalz einschliessen, so finden geringe Spuren in den Jodquellen genügende Erklärung aus der Auflösung solcher Salze durch die Untergrundwasser.

In den eocänen und Kreidemergeln ist Schwefelkies eingesprengt. Der doppelkohlensaure Kalk der Quellwasser kann auf denselben so einwirken, dass sich der Schwefel oxydirt und mit dem Kalk zu schwefelsaurem Kalk vereinigt, während das oxydirte Eisen als Brauneisen zurückbleibt und die Kohlensäure frei wird. Wenn ein solcher Vorgang es sein sollte, der dem Quellwasser die freie Kohlensäure geliefert hat, dann müsste in demselben natürlich auch Kalksulfat nachweisbar sein. Dies

ist aber nicht der Fall und darum entbehrt auch diese Deutung der thatsächlichen Unterlage.

Vielleicht findet das Räthsel seine Auflösung durch die Annahme, dass die Kohlensäure aus grösseren Tiefen stammt, wo sie sich aus stark erwärmten Massen loslöst und begünstigt durch die grosse Verwerfungsspalte, die Kreide und Flysch von einander trennt, nach oben aufsteigt. Auf diesem Wege müsste sie schliesslich den ebenfalls auf jener Verwerfungsspalte aufsteigenden Jodquellen begegnen und sich mit ihrem Wasser mischen. Die Herkunft der freien Kohlensäure wäre dann eine ganz andere, wie die der in den Jodquellen gelösten Bestandtheile. In der That scheint diese Selbstständigkeit durch die Analysen des Jahres 1892 bewiesen zu werden. In diesem Jahre fand Dr. Hobein in den Johann Georgen-, Bernhards-, Max- und Karlsquellen 0.12 bis 0.15 ‰ freie Kohlensäure, während früher nur Beträge von 0.014 bis 0.02 und 1900 in der neuen Quelle ebenfalls nur von 0.02 gefunden worden sind. Dem achtfachen Gehalt an freier Kohlensäure standen aber 1892 durchaus keine irgendwie erhebliche Veränderungen in den sonstigen Bestandtheilen gegenüber.

Dass in Gebieten früherer vulkanischer Thätigkeit Kohlensäure durch die feste Erdkruste hindurch in die Höhe steigt, ist wohl bekannt und kann nicht mehr bezweifelt werden. Die Tölzer Gegend gehört zwar nicht zu solchen Gebieten, aber es ist nicht unwahrscheinlich, dass grosse Verwerfungsspalten, welche in bedeutende Tiefen herabsetzen, ebenfalls befreiend auf die von den heissen Gesteinsmassen absorbirte Kohlensäure wirken.

Wir sind also in diesem Capitel zu folgendem Ergebniss gelangt: die Tölzer Jodquellen verdanken ihre Entstehung der Ansammlung von Untergrundwasser in steil nach Süden einfallenden Schichtgesteinen der Tertiär- und Kreideperiode. Dies Wasser löst die ursprünglich in diesen Schichten zum Absatz gekommenen Meeressalze auf und bringt sie zu Tage, indem es auf einer Verwerfungsspalte durch hydrostatischen Druck aus einer Tiefe von wohl mehr als 200 Meter emporgetrieben

wird. Während des Auftriebes findet jedoch in höheren Lagen eine Mischung mit absteigenden gewöhnlichem Quellwasser und damit eine entsprechende Abkühlung statt. Die Herkunft der freien Kohlensäure ist unbekannt, vielleicht aber eine selbstständige aus grösserer Erdentiefe.

Die Beziehungen der Tölzer zu den anderen Jodquellen des bayerischen Alpengebietes.

Die Annaquelle liegt 3 Kilometer von den Blomberger Jodquellen entfernt gegen Osten. $5^1/_2$ Kilometer gegen Westen trifft man die Heilbrunner Quelle. Man versteht darum leicht die Neigung, auch diese in genetischen Zusammenhang mit jenen zu bringen, trotzdem die geologische Verschiedenheit stets bekannt war, welche darin besteht, dass die Heilbrunner Quelle nicht aus den eocänen Schichten, sondern aus der oberoligocänen Molasse entspringt.

Letztere ist zwar nur wenig jünger als das Eocän, aber eine sehr bedeutende Längsverwerfung trennt beide ebenso, wie Eocän und Flysch von der schon besprochenen anderen Verwerfung geschieden sind. Kreide und Eocän waren schon gehoben und gefaltet, ehe die Molasse in dem jungoligocänen Meere, das sich am Nordfusse der oligocänen Alpen ausbreitete, zum Absatz gelangte. Als dann zu Ende der Miocänzeit auch die Molasse gehoben und gefaltet wurde, entstand jene Verwerfung, die die Molasse als subalpine Formation tektonisch von den eigentlichen Alpen abgetrennt hat. Diese Verwerfung lässt sich längs des ganzen Nordrandes der Alpen verfolgen, und sie ist jedenfalls ebenso bedeutend als jene andere Verwerfung am Nordrande des Flysches, auf der die Tölzer Jodquellen aufsteigen.

Gleichwohl hat Gümbel 1861 (Bayer. Alpengebirge S. 634) die Vermuthung ausgesprochen, dass auch das reiche Jodwasser der Adelheidquelle in Heilbrunn den Nummulitenschichten entstamme. Er hat diese Anschauung dann 1894 (in Geologie Bayerns II S. 162) wiederholt, aber wie früher ohne weitere

Begründung oder Angabe, wie die Jodwasser in die Molasse eindringen, gelassen. Auch die Jodquelle von Sulzberg, 7 Kilometer südlich von Kempten, die inmitten der oligocänen Molasse aus dieser entspringt, und von der aus man fast 2 Meilen weit zu gehen hat, um die nächsten anstehenden Nummulitenschichten anzutreffen, ist er geneigt, wenn auch mit Vorbehalt, aus letzteren abzuleiten, die in grösserer Tiefe unter der Molasse anstehen könnten (Bayer. Alpengebirge 1861 S. 734).

L. A. Buchner hat 1843 eine Analyse der Adelheidquelle veröffentlicht (Buchners Repertorium f. d. Pharmacie Bd. 82 S. 333). Daraus geht hervor, dass die chemische Beschaffenheit dieser von der der Tölzer Quellen sehr verschieden und dass eigentlich gar kein Grund vorhanden ist, für beide gleichen Ursprung anzunehmen. Zunächst enthält die Heilbrunner Quelle ungefähr 7 mal so viel mineralische Bestandtheile als die Tölzer Quellen. Es fehlen ihr aber trotzdem die Sulfate gänzlich. Dafür hat sie etwa 20 mal so viel Kochsalz und Jod und ausserdem einen nicht unbedeutenden Gehalt an Brom. Des weiteren enthält das Wasser ungefähr der Menge nach 1 % Gase, unter denen Kohlenwasserstoff, Kohlensäure, Stickstoff und Sauerstoff angegeben werden.

Es sind das Unterschiede so erheblicher Art, dass gleicher Ursprung der Quellen geradezu unwahrscheinlich erscheint, und es ist nicht einzusehen, warum die Heilbrunner und Sulzberger Jodquellen ihren Gehalt nicht direct aus tieferen Theilen der Molasse selbst beziehen sollten, ebenso wie es ja auch für die Kainzenbadquelle bei Partenkirchen fast sicher ist, dass sie ihren Jod- und Salzgehalt nicht aus den eocänen-, sondern aus den Raiblerschichten bezieht.

Die zwei Analysen, welche L. A. Buchner von der Heilbrunner Quelle gegeben hat, sind noch in anderer Beziehung interessant. Er entnahm das Wasser für die eine im Juni, für die andere im August 1842 und es ergab sich eine nicht unbedeutende Minderung der Mineralbestandtheile in letzterem Monat (etwa um $^1/_4$). Er hat das specifische Gewicht des

Quellwassers bestimmt zu 1.0037 (Juni), 1.0034 (August), 1.0036 (October) und für die gleichen Zeiten:

feste Bestandtheile	6.1	4.6	6.0
Jodnatrium	0.0286	0.0256	0.0290

Er bemerkt dazu „ich habe überhaupt Ursache zu glauben, dass die meisten Heilquellen, je nach den zu verschiedenen Zeiten herrschenden Einflüssen, ihre Zusammensetzung mehr oder weniger ändern können, dass also ihre Mischung nicht so constant sei, als man bisher anzunehmen geneigt war." Dass diese Vermuthung auch auf die Tölzer Quellen zutrifft, haben uns die vorhandenen Analysen bereits vollauf bestätigt.

	Juni	August	Differenz
Jodnatrium	0.0286	0.0256	—
Bromnatrium	0.0195	0.0151	—
Chlornatrium	5.088	3.678	—
Chlorkalium	0.0028	—	—
Kohlensaures Natrium	0.848	0.740	—
„ Ammoniak	0.010	—	—
„ Kalk	0.057	0.062	+
„ Magnesia	0.014	0.033	+
Eisenoxyd	0.010	0.015	+
Thonerde	0.003	0.0014	—
Kieselsäure	0.014	0.024	+
Organische Substanz	0.007	0.0026	—
	6.1019	4.5967	

Trotz der bedeutenden Abnahme um $^1/_4$ der festen Bestandtheile im August tritt bei den kohlensauren Verbindungen von Kalk und Magnesia, dem Eisenoxyd und der Kieselsäure dennoch gleichzeitig eine Zunahme auf, d. h. bei den Stoffen, die schon im gewöhnlichen Quellwasser zu erwarten sind. Daraus muss wie bei den Tölzer Quellen geschlossen werden, dass die Abnahme der

Thermalbestandtheile bedingt ist durch stärkeren Zufluss gewöhnlichen Wassers mit seinen Bestandtheilen. Ein Unterschied besteht nur insofern, als bei Tölz die Kieselsäure abnimmt, wenn sie bei Heilbrunn zunimmt, dort also zu den Thermalbestandtheilen zu gehören scheint, hier aber nicht.

Die reiche Beimengung an organischer Substanz muss aus der Tiefe stammen, da sie mit den thermalen Bestandtheilen ab- und zunimmt. Sie verweist wohl auf eines der oligocänen Kohlenlager oder auf bituminöse Schichten, aus denen auch der reichlich vorhandene Kohlenwasserstoff hervorgehen wird.

Einige Jahre später hat Max Pettenkofer nochmals dieses Quellwasser analysirt (Chem. Untersuchung der Adelheidquelle zu Heilbrunn in Abhandl. Akad. Wiss. München Bd. 6 S. 83) und ist dabei im Allgemeinen zu ganz ähnlichen Ergebnissen wie Buchner gelangt. Bemerkenswerth ist jedoch, dass er 0.048 Bromnatrium fand in Folge von Anwendung einer anderen analytischen Methode. Dadurch vergrössert sich der Unterschied mit den Tölzer Quellen noch um ein Erhebliches.

An freier Kohlensäure wies er 0.0546 ‰ nach und in den aus der Quelle aufsteigenden Gasen fand er auf 100 Theile: 75.5 Kohlenwasserstoff, 18.0 Stickstoff, 4.3 Kohlensäure und 2.2 Sauerstoff.

Auf 1000 Theile:	Bernhardsquelle				Johann Georgenquelle			
	Fresenius 1852	Wittstein 1852	C. Buchner 1890	Hobein 1892	Fresenius 1852	Wittstein 1852	C. Buchner 1890	Hobein 1892
Jodnatrium	0.0016	0.0016	0.0005	0.0006	0.0015	0.0017	0.0007	0.0012
Chlornatrium	0.2966	0.2655	0.2110	0.1487	0.2343	0.2371	0.2603	0.2782
dopp. kohlens. Natrium	0.3345	0.2957	0.3354	0.2076	0.3233	0.3846	0.3992	0.4441
Kieselsäure	0.0098	0.0074	0.0091	0.0053	0.0090	0.0086	0.0062	0.0080
Schwefelsaures Kalium	0.0097	0.0117	0.0082	0.0072	0.0123	0.0117	0.0099	0.0067
Schwefelsaures Natrium	0.0051	0.0126	0.0049	0.0156	0.0123	0.0152	0.0141	0.0073
dopp. kohlens. Calcium	0.1018	0.1135	0.1021	0.2022	0.0915	0.0711	0.0692	0.0730
„ Magnesium	0.0297	0.0276	0.0215	0.0409	0.0298	0.0202	0.0184	0.0323
„ Eisenoxydul	0.0002	„	0.0002	0.0006	0.0002	„	„	0.0010
Summa	0.7890	0.7356	0.6929	0.6287	0.7142	0.7502	0.7780	0.8517
Schwefelwasserstoff	0.0017	?	?	0.0022	0.0012	?	?	0.0025
freie Kohlensäure	0.0142	?	?	0.1393	0.0196	?	?	0.1170
Bestandtheile 1—4	0.6425	0.5702	0.5560	0.3622	0.5681	0.6320	0.6664	0.7314
Sulfate 5—6	0.0148	0.0243	0.0131	0.0228	0.0246	0.0269	0.0240	0.0140
Carbonate 7—9	0.1317	0.1411	0.1238	0.2437	0.1215	0.0913	0.0876	0.1063

Neue Quelle	Karlsquellen		Maxquelle		Marienquelle	Annaquelle		
Hobein 1900	C. Buchner 1890	Hobein 1892	C. Buchner 1890	Hobein 1892	C. Buchner 1890	L. A. Buchner 1857	C. Buchner 1890 [1]) Hobein 1892	
0.0012	0.0001	0.0005	0.0001	0.0001	0.0001	0.0011	0.0001	Na J
0.2810	0.0994	0.1562	0.0702	0.0435	0.1023	0.0302	0.0274	Na Cl
0.4083	0.2096	0.2209	0.2071	0.1191	0.1760	0.1945	0.2100	$NaHCO_3$
0.0089	0.0042	„	0.0037	?	0.0001	0.0075	0.0071	SiO_2
0.0184	0.0166	„	0.0032	?	0.0210	0.0217	0.0214	K_2SO_4
0.0043	0.0249	0.0314	0.0201	0.0297	0.0110	0.2933	0.2754	Na_2SO_4
0.0967	0.2020	?	0.2693	?	0.1870	0.2496	0.3238	$CaH_2(CO_3)_2$
0.0303	0.0391	„	0.0571	0.0491	0.0490	0.2397	0.2760	$MgH_2(CO_3)_2$
0.0002	„	„	-	?	„	„	-	$FeH_2(CO_3)_2$
0.8493	0.5959		0.6308		0.5465	1.0376	1.1512	Summa
0.0014	?	0.0024	?	0.0021	?	0.0101	0.0050 [1])	H_2S
0.0203	?	0.1511	?	0.1429	?	0.0830	0.0888 [1])	CO_2
0.6994	0.3133		0.2811		0.2785	0.2333	0.2556	Kochsalzgruppe
0.0227	0.0415		0.0233		0.0320	0.3150	0.2968	Schwefelgruppe
0.1272	0.2411		0.3264		0.2360	0.4893	0.5998	Kalkgruppe



Bemerkungen über die Principien der Mechanik.

Von **A. Voss** in Würzburg.

(*Eingelaufen 4. Mai.*)

I.
Ueber die energetische Begründung der Mechanik.

Bei der ausserordentlichen Wichtigkeit des Energieprincipes für alle Fragen der physikalischen Mechanik kann es nicht Wunder nehmen, dass man versucht hat, aus demselben auch die Grundlagen der theoretischen Mechanik selbst herzuleiten. Bei allen diesen Versuchen wird es sich darum handeln, das D'Alembert'sche Princip oder irgend eine demselben äquivalente Form der Bewegungsgleichungen aus dem Energieprincip zu gewinnen.

Für diejenige Auffassung der Mechanik, welche nur von den Coordinaten der Puncte abhängige conservative Kräfte kennt, dagegen von Bedingungen völlig absieht, wie sie z. B. Boussinesq[1]) in seinen Leçons entwickelt, hat dies keine Schwierigkeit. Aus der Gleichung

$$E = T + V = C,$$

wo V die nur von den Coordinaten x, y, z abhängige potentielle, T die kinetische Energie ist, erhält man durch Differentiation nach der Zeit t

---

[1]) J. Boussinesq, Recherches sur les principes de la mécanique. Journ. de Math. (2) 18, p. 315, 1873; Leçons synthétiques de mécanique générale, Paris 1889, p. 23.

$$1) \quad \sum m(x'x''+y'y''+z'z'')+\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x}x'+\frac{\partial V}{\partial y}y'+\frac{\partial V}{\partial z}z'\right)=0.$$

Wird nun vorausgesetzt, dass die mit den Massen multiplicirten Beschleunigungen völlig unabhängig sind von den Geschwindigkeiten und der Constanten C, so folgt aus 1)

$$m\,x_i''+\frac{\partial V}{\partial x_i}=0,\quad m\,y_i''+\frac{\partial V}{\partial y_i}=0,\quad m\,z_i''+\frac{\partial V}{\partial z_i}=0.$$

Dieser Schluss lässt sich aber schon dann nicht mehr anwenden, wenn Bedingungen zwischen den Coordinaten angenommen werden, da in diesem Falle die $m\,x''$ etc. thatsächlich von den Geschwindigkeiten abhängig werden.[1])

Herr Helm[2]) suchte daher den Variationsprocess zu Hülfe zu nehmen und gab dem Grundprincip der Energetik die Form: die Aenderung der Energie $E = T + V$ nach jeder möglichen Richtung ist gleich Null. Jedenfalls wird man dabei aber verlangen müssen, dass der Begriff dieser Aenderung in Bezug auf beide Theile der Energie in übereinstimmender Weise eingeführt wird. Wird nun E nach irgend einer Richtung variirt, so hat man an Stelle von x, y, z Grössen $x+\varepsilon\xi$, $y+\varepsilon\eta$, $z+\varepsilon\zeta$ zu setzen, wo ξ, η, ζ willkürliche Functionen von t, und ε eine gegen Null convergirende Constante ist; unter der Variation δA eines Ausdruckes A ist dann der Coefficient von ε in der Entwickelung von A nach Potenzen der ε zu verstehen.

Dabei ist in der That

$$\delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial x}\xi + \frac{\partial V}{\partial y}\eta + \frac{\partial V}{\partial z}\zeta,$$

aber für δT findet man den Werth

---

[1]) Siehe die Bemerkung von R. Lipschitz zu Helmholtz' Erhaltung der Kraft, Ostwald's Klassiker-Bibliothek Nr. 1, p. 55, desgl. L. Boltzmann, Ein Wort der Mathematik an die Energetik, Wiedem. Ann. 57, p. 39, 1896.

[2]) Vgl. namentlich G. Helm, die Energetik in ihrer geschichtlichen Entwickelung, Leipzig 1898, p. 220 ff.

$$\delta T = \frac{d}{dt} \sum m (x' \xi + y' \eta + z' \zeta) - \sum m (x'' \xi + y'' \eta + z'' \zeta)$$

und dieser Ausdruck ist keineswegs gleich

$$\sum m (x'' \xi + y'' \eta + z'' \zeta)$$

was erforderlich ist, wenn man die Identität dieses Principes mit dem d'Alembert'schen behaupten will. Da die über die Ableitung der Bewegungsgleichungen zwischen Boltzmann und Helm entstandene Discussion zu keinem völlig abschliessenden Ergebniss geführt hat,[1]) ist es doch vielleicht nicht überflüssig, diese einfachen Verhältnisse hier ausführlich auseinanderzusetzen, um so mehr als Herr Helm in seiner Energetik mit besonderem Nachdrucke seine Auffassung aufs neue hervorgehoben hat, und dieselbe seitdem auch von andern angenommen ist.[2])

Auf das von den Herren Planck[3]) und Boltzmann in ähnlicher Absicht ausgesprochene Princip der Superposition der Energie glaube ich hier nicht weiter eingehen zu sollen; dasselbe ist in der That nichts anderes als eine willkürlich gewählte Vorstellung, durch die die Identität mit dem d'Alembert'schen Princip erzwungen wird. Dagegen hat Herr Schütz,[4]) um den Helm'schen Variationsprocess zu vermeiden, ein Princip der absoluten Energieerhaltung aufgestellt. Dasselbe leistet allerdings für einen materiellen Punct das

[1]) Vgl. G. Helm, Zur Energetik, Wiedemanns Ann. 57, p. 646; L. Boltzmann ibid. 58, p. 595, (1896).

[2]) Vgl. P. Gruner, die neueren Ansichten über Materie und Energie, Mitth. d. naturf. Ges. zu Bern, 1897.

[3]) M. Planck, das Princip der Erhaltung der Energie, Leipz. 1887, p. 148; L. Boltzmann, Wiedem. Ann. 57, p. 39 ff. Vgl. auch die Mittheilung von C. Neumann in Helm's Energetik, p. 229.

[4]) J. Schütz, das Princip der absoluten Erhaltung der Energie, Gött. Nachr. 1897, p. 110. Eine von Herrn E. Padova ausgeführte Herleitung der Bewegungsgleichungen aus dem Energiesatze (Sulle equazioni della dinamica, Atti Ist. Veneto (7), 5, p. 1641 (1893)) ist mir hinsichtlich der in derselben gemachten Voraussetzungen nicht recht verständlich geworden.

gewünschte, lässt aber keine Erweiterung auf ein System zu und dürfte auch an und für sich mit der Vorstellung von der Relativität aller Bewegungszustände unvereinbar sein.

Durch einen allgemeineren Variationsprocess kann man indessen die vorhin bemerkte Unrichtigkeit beseitigen. Variirt man nämlich neben den Coordinaten x, y, z auch die Zeit, so dass x, y, z, t in $x + \varepsilon\,\xi$, $y + \varepsilon\,\eta$, $z + \varepsilon\,\zeta$, $t + \varepsilon\,\tau$ übergehen, wo ξ, η, ζ, τ willkürliche Functionen von t sind, so wird x' übergehen in

$$\frac{x' + \varepsilon\,\xi'}{1 + \varepsilon\,\tau'} = x' + \varepsilon\,(\xi' - \tau' x') + \ldots$$

und hieraus ergiebt sich

$$\delta(T+V) = \sum\left(\frac{\partial V}{\partial x} + m x''\right)\xi + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + m y''\right)\eta + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + m z''\right)\zeta$$

$$+ \frac{d}{dt}\sum m(x'\xi + y'\eta + z'\zeta) - 2\sum m(\xi x'' + \eta y'' + \zeta z'') - 2\tau' T.$$

Nunmehr steht es frei, τ' so zu wählen, dass die rechte Seite sich auf die d'Alembert'sche Formel reducirt, und dies ist auch immer möglich, da T nicht verschwindet. Auf diesem Wege wird daher der gewünschte Erfolg erreicht; man wird aber in einer so willkürlichen Darstellung kaum etwas anderes als einen abstracten Formalismus erkennen können. Da auch das Ostwald'sche Princip des Maximums des Energieumsatzes nur für den Fall relativer Ruhe benutzt werden kann, dagegen im allgemeinen durch eine ganz andere Betrachtung ersetzt werden muss,[1]) so scheinen die bisher gemachten Versuche nicht die Möglichkeit zu einer ungezwungenen Ableitung des Princips von d'Alembert oder von Gauss aus dem Energiesatze zu bieten.

---

[1]) Vgl. A. Voss, Ueber ein energetisches Grundgesetz der Mechanik. diese Sitzungsber. 1901, p. 53.

II.

Ueber das Hamilton'sche Princip.

Es ist in Nr. 1 darauf hingewiesen, dass man durch einen so verallgemeinerten Variationsprocess jede beliebige Relation für die variirten Grössen hervorrufen kann. Solche allgemeine Variationen sind es, welche Herr Hölder[1]) benutzt hat, um die Principe von Hamilton und Maupertuis als völlig äquivalent mit dem d'Alembert'schen Princip nachzuweisen. Diese Auffassung lässt sich aber durch den folgenden Satz noch in weit allgemeinerer Form aussprechen.

Unter Voraussetzung eines geeigneten Variationsprocesses ist vermöge der Differentialgleichungen der Bewegung die Variation des Integrals

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\alpha T + \beta U)\, dt$$

wo α, β zwei im allgemeinen völlig willkürliche Constanten sind, gleich Null, und umgekehrt führt die Forderung, dass δJ in Rücksicht auf alle zulässigen virtuellen Verschiebungen verschwinde, auf die Differentialgleichungen der Bewegung.[2])

Gewöhnlich fügt man noch die Bedingung hinzu, dass die Variationen der Coordinaten $x\, y\, z$ für die Grenzen des Integrals verschwinden sollen. Im Interesse einer mechanischen Deutung kann dies allerdings liegen; an sich aber ist diese weitere Bedingung im allgemeinen überflüssig und unwesentlich.

Dabei möge zunächst unter δU die virtuelle Arbeit der Kräfte $x\, y\, z$ bei der den ξ, η, ζ entsprechenden Verschiebung verstanden, also

---

[1]) O. Hölder, Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis, Gött. Nachrichten 1896, Heft 2.

[2]) Selbstverständlich kann man an Stelle der Function unter dem Integralzeichen auch jede beliebige Function der x, y, z; x', y', z' nehmen; die lineare Function von U und T führt aber auf die für mechanische Gesichtspuncte wesentlichen Formen.

$$\delta U = \sum (X\xi + Y\eta + Z\zeta)$$

gesetzt werden.

Um nun das Integral[1])

$$I' = \int_{t_0}^{t_1} F(x, x', t)\, dt$$

zu variiren, kann man dasselbe durch die Substitution[2])

$$t = k u + k_0$$

wo

$$k = \frac{t_1 - t_0}{1 - t_0}, \quad k_0 = t_0 \frac{1 - t_1}{1 - t_0}$$

auf das Integral zwischen c o n s t a n t e n Grenzen 0 und 1

$$I' = \int_0^1 F\left(x, \frac{dx}{k\,du}, k u + k_0\right) k\, du$$

zurückführen. Lässt man dann x, y, z, u übergehen in $x + \varepsilon\xi$, $y + \varepsilon\eta$, $z + \varepsilon\zeta$, $u + \varepsilon v$, so ist $k v$ die willkürliche Function, welche in Nr. 1 mit τ bezeichnet wurde; zugleich wird $\frac{dx}{k\,du}$ übergehen in

$$x' + \varepsilon \frac{((\xi') - (x')(v'))}{k} + \ldots {}^{3})$$

Man erhält daher

$$\delta I' = \int_0^1 \left[\frac{\partial F}{\partial x} \xi + \frac{\partial F}{\partial x'} \left(\frac{(\xi') - (x')(v')}{k}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} k v + F(v')\right] k\, du,$$

was vermöge der Identitäten

---

[1]) Alle Differentialquotienten nach t sind der Kürze halber durch Striche bezeichnet, so dass $x' = \frac{dx}{dt}$, $x'' = \frac{dx^2}{dt^2}$ ist.

[2]) Ist $t_0 = 1$, so vertausche man t_1 mit t_0, oder setze

$$t = u(1 - t_1) + t_1.$$

[3]) Die eingeklammerten ξ', x', v' bedeuten hier die Differentialquotienten nach u.

$$\frac{(\xi')}{k} = \frac{d\xi}{k\,du} = \frac{d\xi}{dt} = \xi'$$

$$\frac{(x')}{k} = \frac{dx}{k\,du} = x'$$

$$(v') = \frac{dv}{du} = \frac{k\,dv}{k\,du} = \frac{d\tau}{dt} = \tau'$$

wieder übergeht in

$$\text{A)} \qquad \delta I' = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F}{\partial x} \xi + \frac{\partial F}{\partial x'} (\xi' - x'\tau') + \frac{\partial F}{\partial t} \tau + F\tau' \right] dt.$$

Selbstverständlich kann man diese Formel auch unmittelbar aus dem Begriffe der Variation entnehmen;[1]) in Rücksicht auf die Missverständnisse, denen die Vorstellung der Variation bei der Benutzung des δ Zeichens ausgesetzt ist, scheint mir die obige wenn auch umständliche Betrachtung für ganz elementare Zwecke nicht unzweckmässig zu sein. Wird die Formel A) durch die partielle Integrationsmethode in bekannter Weise ausgeführt, so entsteht die gebräuchliche Formel:[2])

$$\delta I' = \left| \frac{\partial F}{\partial x'} (\xi - x'\tau) + F\tau \right|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} \right) (\xi - \tau x') \, dt.$$

Ich betrachte nun das Integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (\alpha T + \beta U) \, dt$$

und setze zur Abkürzung

$$V = \sum (X\xi + Y\eta + Z\zeta)$$

d. h. gleich der virtuellen Arbeit der gegebenen Kräfte,

$$S = \sum m (x'\xi + y'\eta + z'\zeta)$$

d. h. gleich dem virtuellen Moment der Bewegungsgrössen

[1]) So Hölder a. a. O. § 2, Anmerk.

[2]) In dieser Gestalt wird sie z. B. bei Routh vorausgesetzt, Dynamik starrer Körper, übers. von A. Schepp, Bd. 2, p. 327.

$$W = \sum m (x'' \xi + y'' \eta + z'' \zeta)$$

d. h. gleich dem virtuellen Moment der mit den Massen multiplicirten Beschleunigungen. Alsdann ergiebt sich

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} [(\beta U - a T) \tau' + a S' - a W + \beta V] \, dt$$

oder

$$\text{I)} \qquad \delta J = \beta \int_{t_0}^{t_1} (V - W) \, dt$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} [(\beta U - a T) \tau' + (\beta - a) W + a S'] \, dt.$$

$$\text{II)} \qquad \delta J = a \int_{t_0}^{t_1} (V - W) \, dt$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} [(\beta U - a T) \tau' + (\beta - a) V + a S'] \, dt.$$

Wählt man daher die willkürliche Function τ so, dass der zweite Integraltheil in den Formeln I), II) verschwindet, so wird

$$\delta J = \beta \int_{t_0}^{t_1} (V - W) \, dt$$

$$\delta J = a \int_{t_0}^{t_1} (V - W) \, dt$$

d. h. die Forderung $\delta J = 0$ wird vollständig äquivalent mit dem d'Alembert'schen Princip. Je nach der Wahl der Constanten a, β ergeben sich nun verschiedene besondere Formen des allgemeinen Variationsprincipes.

Erstens. Setzt man $a = \beta$, so erfordert die Bedingung nach I)

$$(U - T) \tau' + S' = 0$$

d. h., wenn der Theil S' wie gewöhnlich durch Integration beseitigt, und die Variationen der x, y, z an den Grenzen gleich Null genommen werden, $\tau = \text{const}$ resp. $= 0$.[1]) Ist insbeson-

[1]) Durch die Verfügung über die Variationen an den Grenzen wird hier erreicht, dass das Princip ausnahmslos, d. h. auch dann anwendbar bleibt, wenn $U - T$ innerhalb der Integrationsgrenzen verschwindet.

dere $U - T = \text{const} = h$, so kann man auch $\tau h + S = 0$ setzen. Dies ist das Hamilton'sche Princip.

Zweitens. Wird $\beta = 0$ genommen und setzt man jetzt nach II)

$$T\tau' + V + S' = 0,$$

so hat man die erweiterte Form des Princips der kleinsten Action;[1]) da T nicht Null ist, so ist diese Bestimmungsweise für τ immer möglich, was hier besonders hervorgehoben sein möge.

Drittens. Nimmt man dagegen $\alpha = 0$, so ist nach I) zu setzen

$$U\tau' + W = 0,$$

wobei eine etwaige Verfügung über die Variationen an den Grenzen zu weiterer Vereinfachung ganz überflüssig wird; doch muss hier vorausgesetzt werden, dass U innerhalb der Grenzen des Integrales nicht verschwindet.[2]) Unter diesen Umständen führt also auch der Ausdruck

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} U\,dt = 0$$

auf die Differentialgleichungen der Bewegung.

Viertens. Endlich erhält man für $\beta = -\alpha$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} E\,dt = 0$$

mit der Bedingung $(T + U)\tau' + 2V - S' = 0$.

Nur in den beiden ersten Fällen entsteht eine allgemein brauchbare Form des Principes. In den beiden letzten sowie auch im allgemeinen Falle wird schon das Auftreten des symbolischen Ausdruckes U hinderlich, selbst wenn man davon

---

[1]) So bei Hölder a. a. O. § 2.

[2]) Eine ähnliche Voraussetzung wird natürlich immer eintreten müssen, wenn man (vgl. Anmerkung 2 S. 171) unter dem Integralzeichen eine beliebige Function nimmt; beim Princip der kleinsten Action und dem Hamilton'schen Princip ist sie von selbst erfüllt.

absieht, dass $\alpha T - \beta U$ innerhalb der Integrationsgrenzen nicht verschwinden darf, was bei beliebigen Werthen der α, β allerdings unmöglich ist. Man kann indess bei einem so allgemeinen Variationsbegriff den symbolischen Ausdruck U völlig vermeiden.

Variirt man nämlich den Ausdruck

$$A = \int_{t_0}^{t} \Sigma (X x' + Y y' + Z z')\, d t,$$

welcher die totale Arbeit darstellt, die von t_0 bis zur variabelen Zeit t von den wirkenden Kräften geleistet wurde, nach der Formel A), so ergiebt sich

$$\text{B)} \qquad \delta A = V - V_0 + \int_{t_0}^{t} \Sigma (Z)\, d t,$$

wo

$$Z = \left[y' \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) + z' \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) - \frac{\partial X}{\partial t} \right] (\xi - \tau x')$$
$$+ \left[z' \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + x' \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - \frac{\partial Y}{\partial t} \right] (\eta - \tau y')$$
$$+ \left[x' \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + y' \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) - \frac{\partial Z}{\partial t} \right] (\zeta - \tau z')$$

ist, und man hat sich nur vorzustellen, dass die willkürliche Function τ derjenigen Bedingung unterworfen wird, welche entsteht, wenn an Stelle der früheren Gleichung $\delta U = V$ die nicht symbolische B) bei der Variation des Integrales

$$\int_{t_0}^{t_1} (\alpha T + \beta A)\, d t$$

benutzt wird.

Berücksichtigt man, dass das d'Alembert'sche Princip in den Formen

$$\delta \int (T + A)\, d t = 0, \quad \delta \int T\, d t = 0, \quad \delta \int U\, d t = 0, \quad \delta \int E\, d t$$
$$\delta \int (\alpha T + \beta A)\, d t = 0$$

ausgesprochen werden kann, so erweist sich dieses Variations-

princip in seiner allgemeinen Form als eine völlig conventionelle Regel, die mit besonderen dem eigentlichen Gebiet mechanischer Grundanschauungen angehörigen Vorstellungen gar nichts mehr zu thun hat, sondern einzig und allein zu dem Zwecke ersonnen wird, die Differentialgleichungen der Bewegung in einer möglichst condensirten Form auszusprechen. Ich halte es nicht für überflüssig, diese an sich sehr selbstverständliche Bemerkung, welche ich schon bei einer früheren Gelegenheit gemacht habe,[1]) hier aufs neue zu wiederholen, da über die principielle Auffassung des Hamilton'schen Princips auch gegenwärtig noch sehr verschiedenartige Ansichten verbreitet erscheinen. Vom abstracten Standpuncte aus könnte man sich sogar veranlasst sehen, der besonderen Form des Principes, welches das Energieintegral $\int E\,dt$ benutzt, den Vorzug zu geben. Indessen scheint es zweifellos, dass das eigentliche Hamilton'sche Integral sich durch Einfachheit und allgemeine Gültigkeit zugleich empfiehlt; daher ist dasselbe auch von v. Helmholtz bei allen seinen Untersuchungen (unter dem Namen des Principes der kleinsten Wirkung) als heuristisches Grundprincip zur Anwendung gebracht.

III.

Ueber das Princip des kleinsten Zwanges.

Bezeichnet man die Coordinaten der Puncte eines materiellen Systems unterschiedslos durch x_i [2]), so ist die lebendige Kraft

$$T = \tfrac{1}{2} \sum m_i x_i'^2.$$

Werden nun an Stelle der x_i ebensoviel neue Variabele y_i, welche von einander unabhängige Functionen der x_i sind, die überdies die Zeit t enthalten können, eingeführt, so ist nach Voraussetzung die Functionaldeterminante

---

[1]) A. Voss, Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik, Math. Ann. Bd. 25, p. 267 (1884).

[2]) Ueber die Bezeichnung siehe H. Hertz, Ges. Werke III, p. 62.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & . & . & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_n} & . & . & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

nicht Null, also verschwindet auch

$$m_1 \ldots m_n \Delta^2 = A$$

nicht, wo A die aus den Elementen[1])

1) $$a_{s\sigma} = \sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial x_i}{\partial y_\sigma}$$

gebildete Determinante der definiten positiven quadratischen Form

$$\sum a_{s\sigma} u_s u_\sigma = \sum m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_s} u_s \right)^2$$

ist. Bezeichnet man mit $A_{s\sigma}$ die durch A dividirten Unterdeterminanten dieser Elemente 1), so ist

$$\sum A_{s\tau} a_{s\sigma} = (\sigma\tau),$$

falls $(\sigma\tau)$ das bekannte Zeichen bedeutet. Da aber auch

$$\sum \frac{\partial y_\tau}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_\sigma} = (\sigma\tau)$$

ist, so folgt

$$\sum \left(A_{s\tau} \frac{\partial x_i}{\partial y_s} m_i - \frac{\partial y_\tau}{\partial x_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial y_\sigma} = 0$$

oder, wegen $\Delta \neq 0$ [2])

2) $$\sum A_{s\tau} \frac{\partial x_i}{\partial y_s} m_i = \frac{\partial y_\tau}{\partial x_i}.$$

---

[1]) In allen Fällen, wo über die Summation nichts weiter bemerkt ist, hat sich dieselbe über sämmtliche mehrfach vorkommende Indices s, σ, τ .. von 1 bis $3u$ zu erstrecken.

[2]) In Formel 2) ist die Summation in Bezug auf i selbstverständlich nicht auszuführen.

Setzt man nun die Gleichungen

$$x_i' = \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_s} y_s' + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

in den Ausdruck T ein, so folgt

$$T = \tfrac{1}{2} \sum a_{s\sigma} y_s' y_\sigma' + \sum a_s y_s' + a$$

wenn

$$3) \quad \begin{cases} a_s = \sum m_i \dfrac{\partial x_i}{\partial y_s} \dfrac{\partial x_i}{\partial t} \\ a \;= \tfrac{1}{2} \sum m_i \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 \end{cases}$$

gesetzt wird; T ist daher eine im allgemeinen nicht homogene Function zweiter Ordnung der y_s'. Zugleich wird

$$4) \quad x_i'' = \sum \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_s \partial y_\sigma} y_s' y_\sigma' + 2 \sum \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_s \partial t} y_s' + \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_s} y_s'' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}.$$

Wir benutzen die Werthe 4) zur Berechnung des Zwanges Z

$$5) \quad Z = \sum m_i \left(x_i'' - \frac{X_i}{m_i}\right)^2,$$

wobei unter den X_i die Componenten der wirkenden Kräfte verstanden sind. Durch eine sehr einfache Rechnung findet man aus 4)

$$Z = \sum m_i \Xi_i^2 + \sum A_{s\sigma} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_s} - Y_s\right) \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_\sigma'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_\sigma} - Y_\sigma\right)$$
$$- \sum A_{s\sigma} Q_s Q_\sigma,$$

wobei zur Abkürzung

$$Y_s = \sum X_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s},$$

$$\Xi_i = \sum \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_s \partial y_\sigma} y_s' y_\sigma' + 2 \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_s \partial t} y_s' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} - \frac{X_i}{m_i}\right),$$

$$Q_s = \sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_\sigma} y_r' y_\sigma' + 2 \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial y_\sigma} m_i y_\sigma' + \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} m_i - Y_s$$

gesetzt ist, während

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_s} = \sum a_{sr} y_r'' + \sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_\sigma} y_r' y_\sigma'$$

$$+ 2 \sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial y_\sigma} y_\sigma' + \sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}$$

wird.

Man sieht nun unmittelbar, dass die erste Summe in Z sich gegen die letzte aufhebt. Dazu braucht man nur in

$$W = \sum A_{s\sigma} Q_s Q_\sigma$$

die Q_s wieder durch ihre Werthe zu ersetzen; drückt man auch Y_s wieder durch die X_i aus, so entsteht

$$W = \sum \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial x_j}{\partial y_{s'}} m_i m_j A_{ss'} \Xi_i \Xi_j,$$

was nach 2) in

$$W = \sum m_j (i\,j)\, \Xi_i \Xi_j = \sum m_i \Xi_i^2$$

übergeht.

Durch Differentiation folgt weiter

$$2 \sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_\sigma} = 2 \begin{bmatrix} r\sigma \\ s \end{bmatrix} = \frac{\partial a_{s\sigma}}{\partial y_r} + \frac{\partial a_{sr}}{\partial y_\sigma} - \frac{\partial a_{r\sigma}}{\partial y_s}$$

$$2 \sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial y_\sigma} = \begin{bmatrix} s\sigma \end{bmatrix} = \frac{\partial a_{s\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial a_s}{\partial y_\sigma} - \frac{\partial a_\sigma}{\partial y_s}$$

$$\sum m_i \frac{\partial x_i}{\partial y_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \begin{bmatrix} s \end{bmatrix} = \frac{\partial a_s}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial y_s},$$

so dass

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_s} = \sum a_{s\sigma} y_\sigma'' + \sum \begin{bmatrix} r\sigma \\ s \end{bmatrix} y_r' y_\sigma' + [s\sigma]\, y_\sigma' + [s]$$

wird. Hiermit ist der folgende Satz bewiesen.

Ersetzt man die Variabeln x durch ebensoviel neue Variabele y vermöge der von einander in Bezug auf die y unabhängigen Gleichungen

6) $\qquad x_i = f_i(y_1\, y_2 \ldots y_{3n}\, t), \;\; y_i = \varphi_i(x_1\, x_2 \ldots x_{3n}\, t),$

so wird der Gauss'sche Zwang Z ausgedrückt durch die zur lebendigen Kraft T covariante Function

$$Z = \sum A_{s\sigma} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y'_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial y'_s} - Y_s\right] \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y'_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_\sigma} - Y_\sigma\right].$$

Dieselbe ist eine Verallgemeinerung des von Herrn Lipschitz[1]) für den Fall, dass die Functionen f die Zeit nicht enthalten, als Ergebniss seiner allgemeinen Untersuchung über die Transformation homogener Differentialausdrücke hergeleiteten Resultates. Es liegt aber in der Natur der Sache, dass dasselbe nicht auf den Fall einer homogenen Form T beschränkt sein kann; in diesem Falle dürfte es wohl einfacher sein, das Transformationsresultat direct herzuleiten.

Eine wesentliche Bedingung für dasselbe ist es jedoch, dass die Zahl der Variabeln y ebenso gross ist, wie die der x, denn nur unter dieser Voraussetzung lässt sich die Identität 2), auf der die ganze Rechnung beruht, anwenden.[2])

Man kann nun insbesondere die Variabeln y so wählen,[3]) dass bei einem mechanischen Problem mit k Bedingungsgleichungen

---

[1]) R. Lipschitz, Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges, Journ. f. Math. Bd. 82, p. 328 (1877).

[2]) Herr A. Wassmuth hat (Ueber die Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik, diese Sitzungsber. 1894, p. 219) die Lipschitz'sche Formel für Z in Anspruch genommen für den Fall, wo die Zahl der Variabeln y auch kleiner ist wie die der x. Dass dies nicht gestattet ist, hätte sich schon daraus ersehen lassen, dass unter diesen Umständen der auch von ihm mit Z bezeichnete Zwang gleich Null wird, was nur bei der freien Bewegung eines Systems eintritt, während doch p. 220 Bedingungsgleichungen vorausgesetzt wurden. Es sind daher auch die im weiteren Verlauf der Arbeit entwickelten Formeln, soweit sie sich nicht auf freie Bewegungen beziehen, durch die weiterhin im Text abgeleiteten zu ersetzen.

Bei Herrn Lipschitz ist übrigens ausdrücklich die ungeänderte Zahl der Variabeln als Bedingung zur Voraussetzung gemacht (a. a. O. p. 316 und 328).

[3]) Selbstverständlich kann man in ebenso einfacher Weise auch nur einen Theil der Bedingungen durch Einführung der allgemeinen Coordinaten beseitigen.

$$\varphi_l(x_1 \ldots x_n t) = 0, \; l = 1, 2 \ldots k$$

die ersten k Functionen y, gleich Null gesetzt, eben diese Bedingungen vorstellen, d. h.

$$y_l = \varphi_l$$

ist, während die $h = 3n - k$ letzten y als allgemeine Coordinaten q_m, $m = 1, \ldots h$ angesehen werden. Unter dieser Voraussetzung ist dann

$$y_l' = 0, \; y_l'' = 0 \text{ für } l = 1, 2 \ldots k.$$

Soll nun der Zwang Z ein Minimum werden, so erhält man in bekannter Weise mittelst der Lagrange'schen Multiplicationsmethode die Gleichungen

$$\sum A_{s\sigma}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_s} - Y_s\right] a_{sl} = \lambda_l.$$

$$\sum A_{s\sigma}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_s} - Y_s\right] a_{s\,m+k} = 0.$$

oder:

a) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_l'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_l} - Y_l = \lambda_l, \quad l = 1, \ldots k$$

b) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y_{m+k}'}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_{m+k}} - Y_{m+k} = 0, \; m = 1, \ldots h.$$

Die Gleichungen a), welche nur zur Bestimmung der Multiplicatoren λ dienen, kann man ganz fortlassen; die Gleichungen b) liefern die Bewegungsgleichungen, so wie man in denselben

$$y_l \;\; = 0 \quad \text{für } \; l = 1, \ldots k$$
$$y_{m+k} = q_m \;\; \text{für } \; m = 1, \ldots h$$

setzt, und für den Zwang Z ergiebt sich der Werth

$$Z = \sum A_{ij}\,\lambda_i\,\lambda_j, \quad i, j = 1, \ldots k.$$

Sitzung vom 8. Juni 1901.

1. Herr H. Seeliger legt eine Arbeit des correspondirenden Mitgliedes der Classe Herrn Dr. G. Neumayer, Direktor der deutschen Seewarte in Hamburg: „Bestimmungen der Länge des einfachen Sekunden-Pendels auf absolutem Wege, ausgeführt in Melbourne vom Juli bis Oktober 1863“ zur Aufnahme in die Abhandlungen der Classe vor und bespricht deren Inhalt.

2. Herr Ferd. Lindemann macht eine Mittheilung „über den Format'schen Satz betreffend die Unmöglichkeit der Gleichung $x^n = y^n + z^n$.“

3. Herr W. v. Dyck erstattet einen Bericht „über eine im Jahre 1832 von dem Mathematiker C. G. J. Jacobi bei Gelegenheit der Uebernahme der ordentlichen Professur in Königsberg gehaltenen Rede.“



Ueber den Fermat'schen Satz betreffend die Unmöglichkeit der Gleichung $x^n = y^n + z^n$.

Von **F. Lindemann.**

(*Eingelaufen 8. Juni.*)

Bekanntlich hat Fermat, ohne einen Beweis anzugeben, den Satz aufgestellt, dass die Gleichung $x^n = y^n + z^n$ nicht durch drei ganze Zahlen x, y, z befriedigt werden könne, sobald die ganze Zahl n grösser als 2 ist. Diese Angabe wird uns in der von Bachet veranstalteten Diophant-Ausgabe [1]) überliefert, in welcher gelegentliche Randbemerkungen aus Fermat's Handexemplare abgedruckt wurden. Die Quaestio VIII im zweiten Buche von Diophant's Arithmetik handelt nemlich von der Aufgabe, ein gegebenes Quadrat in die Summe zweier Quadrate zu zerlegen; und am Schlusse dieser Quaestio findet sich folgender Passus: [2])

„Observatio Domini Petri De Fermat.

„Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum „in duos quadratoquadratos et generaliter nullam in infini- „tum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis

---

[1]) Diophanti Alexandri arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Cum commentariis C. G. Bacheti V. C. et obversationibus D. P. de Fermat Senatoris Tolosani. Accessit Doctrinae Analyticae inventum novum, collectum ex varijs eiusdem D. de Fermat epistolis. Tolosae, MDCLXX.

[2]) Vgl. auch Oeuvres de Fermat, publiés par Paul Tannery et Charles Henry, 1891, t. I, p. 291.

„fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane „detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.“

Für den Fall $n = 3$ betont Fermat seinen Satz auch in einem Briefe an Digby vom 7. April 1658,[1]) in einem andern Briefe vom 15. August 1657 stellt er die Aufgabe eine Zahl x^3 in der Form $y^3 + z^3$ darzustellen.[2])

Für eine gewisse Klasse von Zahlen n (zu welcher z. B. alle Zahlen unter 100 gehören) hat bekanntlich Kummer bei Gelegenheit anderer Untersuchungen den Fermat'schen Satz verificirt.[3]) Einzelne einfache Fälle sind schon vielfach behandelt worden.

Mit x, y, z seien drei ganze positive Zahlen bezeichnet, welche der Grösse nach geordnet sind, so dass:

$$x > y > z. \tag{1}$$

Es bedeute n eine ungerade Primzahl; es ist also

$$n > 2. \tag{2}$$

Wir nehmen an, es bestehe eine Gleichung der Form

$$x^n = y^n + z^n \tag{3}$$

und wollen zeigen, dass diese Annahme zu Widersprüchen

---

[1]) Vergl. Wallis, Opera Mathematica, t. II, p. 844, Oxford 1693.

[2]) Beide Briefe abgedruckt in den Oeuvres de Fermat, t. II, p. 343 ff. und p. 376; vergl. ferner Henry, Recherches sur les manuscripts de Pierre de Fermat, Bulletino di bibliographia e di storia delle scienze matematiche e fisiche publ. da B. Boncompagni, Bd. XII, 1879, wo insbesondere auch die Frage erörtert wird, ob Fermat im Besitze von Beweisen für seine Sätze war; vergl. dazu Mansion, Nouvelle correspondance de mathématiques t. V.

[3]) Monatsberichte der Berliner Akademie, April 1847 und Crelle's Journal Bd. 45, p. 93, 1847; vergl. dazu Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4, 1894/95, p. 517 ff., wo auch die ältere Litteratur angegeben ist: hinzuzufügen sind die Arbeiten von Genocchi im Bd. 3 und 6 der Annali di matematica und Crelle's Journal Bd. 99, ferner Pepin, Comptes rendus t. 82.

führt. Da gemeinsame Factoren aus dieser Gleichung herausfallen, so können die Zahlen x, y, z jedenfalls als relativ prim zu einander vorausgesetzt werden.

Die Differenz $x^n - y^n$ ist sofort in die Factoren

$$x - y \text{ und } x^{n-1} + x^{n-2} y + \ldots + y^{n-1} \tag{4}$$

zerlegbar; es muss deshalb auch die Zahl z in entsprechender Weise in Factoren zerfallen. Ist R ein Factor von z, so müssen die beiden Ausdrücke (4) zusammen den Factor R^n enthalten; es wird also eine Potenz R^{n-i} in der Differenz $x - y$, eine Potenz R^i in dem andern Ausdrucke (4) enthalten sein; eine solche Zahl R werde mit r_i bezeichnet; dann ist

$$z = r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n, \tag{5}$$

$$x - y = r^n \cdot r_1^{n-1} \cdot r_2^{n-2} \cdot \ldots \cdot r_{n-2}^2 \cdot r_{n-1} = r^n \cdot \varrho, \tag{6}$$

$$x^{n-1} + x^{n-2} y + \ldots + y^{n-1} = r_1 \cdot r_2^2 \cdot r_3^3 \ldots r_{n-1}^{n-1} \cdot r_n^n. \tag{7}$$

Jede dieser Zahlen r_i kann wieder in verschiedene Primfactoren zerfallen. Für das Folgende sind die Zahlen r und r_n von besonderer Wichtigkeit; beide sind offenbar durch die Gleichungen (5), (6) und (7) eindeutig bestimmt: r_n als derjenige Factor von z, welcher in $x - y$ nicht vorkommt, und r als derjenige Factor von z, welcher in dem Quotienten $\dfrac{x^n - y^n}{x - y}$ nicht enthalten ist. Die übrigen Zahlen r_i sind nicht nothwendig eindeutig festgelegt, sind auch für das Folgende von geringerer Bedeutung.

In gleicher Weise kann die Differenz $x - z$ in Factoren zerlegt werden; es ist:

$$x - z = q^n \cdot \varkappa = q^n \cdot q_1^{n-1} \cdot q_2^{n-2} \ldots q_{n-2}^2 \cdot q_{n-1}, \tag{6a}$$

wo $\varkappa$ keine n^{te} Potenz mehr enthält, ferner

$$x^{n-1} + x^{n-2} z + \ldots + z^{n-1} = q_1 \cdot q_2^2 \ldots q_{n-1}^{n-1} \cdot q_n^n, \tag{7a}$$

$$y = q \cdot q_1 \ldots q_n. \tag{5a}$$

Eine analoge Zerlegung kann auch für die Summe $y + z$ zur Anwendung kommen, so dass:

$$(6^b) \qquad y + z = p^n \cdot \pi = p^n \cdot p_1^{n-1} \cdot p_2^{n-2} \cdot \ldots \cdot p_{n-2}^2 \cdot p_{n-1},$$

$$(7^b) \qquad y^{n-1} - y^{n-2} z + y^{n-3} z^2 - \ldots + (-1)^{n-1} z^{n-1} = p_1 \cdot p_2^2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{n-1} \cdot p_n^n,$$

$$(5^b) \qquad x = p \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_n.$$

Offenbar lässt sich, wenn n eine ungerade Zahl bezeichnet, die Zahl N_1 so bestimmen, dass die Differenz

$$x^n - y^n - N_1 (x - y)^n$$

durch das Product $x y$ theilbar wird; und zwar ergibt sich

$$N_1 = 1.$$

Ferner kann N_2 so gewählt werden, dass der Ausdruck

$$x^n - y^n - N_1 (x - y)^n - N_2 x y (x - y)^{n-2}$$

durch $x^2 y^2$ theilbar wird. Man muss zu dem Zwecke den Factor von $x^{n-1} y$ gleich Null setzen und findet $N_1 n - N_2 = 0$, oder

$$N_2 = n.$$

Der Factor von $x y^{n-1}$ fällt dann von selbst heraus. Um ebenso das Aggregat

$$x^n - y^n - N_1 (x - y)^n - N_2 x y (x - y)^{n-2} - N_3 x^2 y^2 (x - y)^{n-4}$$

durch $x^3 y^3$ theilbar zu machen, muss man den Factor von $x^{n-2} y^2$ (welcher bis auf das Vorzeichen gleich dem Factor von $x^2 y^{n-2}$ ist) zum Verschwinden bringen, d. h. es muss

$$- N_1 \binom{n}{2} + N_2 (n - 2) - N_3 = 0,$$

also

$$N_3 = \frac{n(n-3)}{2}$$

sein. In gleicher Weise wird

$$x^n - y^n - N_1 (x - y)^n - N_2 x y (x - y)^{n-2} - N_3 x^2 y^2 (x - y)^{n-4}$$
$$N_4 x^3 y^3 (x - y)^{n-6}$$

durch $x^4 y^4$ theilbar, wenn

$$N_1 \binom{n}{3} - N_2 \binom{n-2}{2} + N_3 (n-4) - N_4 = 0$$

ist, oder:

$$N_4 = \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Ebenso kann man weiter schliessen und findet durch ein Recursionsverfahren leicht, dass das Aggregat

$$(8) \qquad \begin{aligned} x^n - y^n - N_1 (x-y)^n - N_2 x y (x-y)^{n-2} \ldots\ldots \\ - N_s x^{s-1} y^{s-1} (x-y)^{n-2s+2} \end{aligned}$$

durch $x^s y^s$ theilbar ist, wenn

$$(9) \qquad N_s = \frac{n(n-s)(n-s-1)\ldots\ldots(n-2s+4)(n-2s+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (s-1)}$$

gesetzt wird.

Sei nun die Primzahl n gleich $2\nu + 1$, und setzen wir $s = \nu$, so wird

$$(10) \qquad N_\nu = \frac{(2\nu+1)\nu(\nu+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Es ist also identisch

$$(11) \qquad \begin{aligned} x^n - y^n - N_1 (x-y)^n - N_2 x y (x-y)^{n-2} - \ldots\ldots \\ - N_\nu x^{\nu-1} y^{\nu-1} (x-y)^3 = N x^\nu y^\nu (x-y), \end{aligned}$$

wo N noch zu bestimmen ist, denn die linke Seite ist theilbar durch $x^\nu y^\nu$ und ist Null für $x = y$. Der Werth von N wird aber durch Fortsetzung derselben Schlussweise gefunden, die wir bisher anwandten, nemlich indem wir verlangen, dass aus dem Ausdrucke

$$x^n - y^n - N_1 (x-y)^n - \ldots - N_\nu x^{\nu-1} y^{\nu-1} (x-y)^3 - N x^\nu y^\nu (x-y)$$

der Term $x^{\nu+1} y^\nu$ (und folglich auch $x^\nu y^{\nu+1}$) herausfalle; es wird daher

$$(12) \qquad N = N_{\nu+1} = 2\nu + 1 = n.$$

Unter Benutzung von (6) und (7) erhalten wir sonach die Identität:

$$n\,x^\nu\,y^\nu\,r^n\,\varrho = r^n \cdot r_1^n \ldots r_n^n - \sum_{i=1}^{i=\nu} N_i\,x^{i-1}\,y^{i-1}\,r^{n(n-2i+2)}\,\varrho^{n-2i+2},$$

oder, wenn beiderseits mit $\varrho\,r^n$ dividirt wird:

$$(13)\quad n\,x^\nu\,y^\nu = r_1 \cdot r_2^2\,r_3^3 \ldots r_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i\,x^{i-1}\,y^{i-1}\,r^{n(n-2i+1)}\,\varrho^{n-2i+1},$$

wobei die Zahlen N_i offenbar sämmtlich ganze Zahlen sind.

Die relativen Primzahlen x und y können wegen (6) mit den Zahlen $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$ keinen Factor gemein haben. Jedes Glied der rechten Seite von (13) ist durch jede dieser Zahlen theilbar, da mit ϱ die Zahl $r_1^{n-1}\,r_2^{n-2} \ldots r_{n-1}$ bezeichnet wurde. Soll daher auch die linke Seite durch $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$ theilbar sein, so muss die Zahl n diese Factoren enthalten. Nun sollte aber n eine Primzahl bedeuten; also bleiben nur folgende Möglichkeiten:

Entweder es ist

$$(14)\qquad r_1 = n,\ r_2 = r_3 = \ldots = r_{n-1} = 1,$$

und dann folgt aus (5) und (6)

$$(15)\qquad z = n \cdot r \cdot r_n,\quad x - y = r^n \cdot n^{n-1}.$$

Oder es ist

$$(16)\qquad r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_{n-1} = 1,$$

und dann folgt

$$(17)\qquad z = r \cdot r_n,\quad x - y = r^n.$$

Eine andere Möglichkeit bleibt nicht offen, denn von den Zahlen $r_2, r_3, \ldots r_{n-1}$ kann keine gleich n sein; es wäre nemlich dann die rechte Seite von (13) mindestens durch n^2 theilbar, folglich auch die linke Seite: d. h. es müsste x oder y durch n theilbar sein; dann aber wären nach (6) beide Zahlen durch n theilbar, während sie doch als relative Primzahlen vorausgesetzt sind. Die Zahl r_n bleibt zunächst beliebig.

Da die Gleichung (11), wenn N durch (12) bestimmt wird, eine Identität ist, können wir in ihr y durch z ersetzen und

erhalten so in Rücksicht auf (6^a) und (7^a) an Stelle von (13) die Beziehung:

$$(13^a)\quad n\, x^\nu z^\nu = q_1 \cdot q_2^2 \cdot \ldots \cdot q_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i\, x^{i-1} z^{i-1} q^{n(n-2i+1)} \chi^{n-2i+1},$$

auf welche wir die gleichen Ueberlegungen anwenden können. Es ist also entweder

$$(15^a)\qquad y = n \cdot q \cdot q_n, \quad x - z = q^n \cdot n^{n-1},$$

oder:

$$(17^a)\qquad y = q \cdot q_n, \quad x - z = q^n.$$

Endlich können wir in der Identität (11) auch x durch y und y durch $-z$ ersetzen; dann ergibt sich mit Rücksicht auf (6^b) und (7^b):

$$(13^b)\qquad \begin{aligned} (-1)^\nu n\, y^\nu z^\nu &= p_1 p_2^2 \ldots p_n^n \\ &- \sum_{i=1}^{\nu} N_i (-1)^{i-1} y^{i-1} z^{i-1} p^{n(n-2i+1)} \pi^{n-2i+1}; \end{aligned}$$

und die nochmalige Wiederholung der gleichen Schlussweise führt zu dem Resultate, dass entweder:

$$(15^b)\qquad x = n \cdot p \cdot p_n, \quad y + z = p^n \cdot n^{n-1}$$

oder

$$(17^b)\qquad x = p \cdot p_n, \quad y + z = p^n$$

sein muss.

Da x, y, z keinen gemeinsamen Factor enthalten sollen, so ergibt die Combination der Gleichungen (15), (17), (15^a), (17^a), (15^b), (17^b), dass nur drei Fälle noch näher zu untersuchen sind. Die Annahme (15) nemlich ist mit (15^a) oder (15^b) nicht vereinbar, so dass aus der Annahme (15) nothwendig die Gleichungen (17^a) und (17^b) folgen. Gehen wir aber von (17) aus, so kann sowohl (15^a) als (15^b) möglich sein. Betrachten wir diejenigen Möglichkeiten als gleichwerthig, die durch Vertauschung von y mit z aus einander hervorgehen, so bleiben die folgenden drei Fälle:

I) $$x - y = r^n \cdot n^{n-1}, \qquad z = n \cdot r \cdot r_n,$$
$$x - z = q^n, \qquad y = q \cdot q_n,$$
$$y + z = p^n, \qquad x = p \cdot p_n;$$

II) $$x - y = r^n, \qquad z = r \cdot r_n,$$
$$x - z = q^n, \qquad y = q \cdot q_n,$$
$$y + z = p^n \cdot n^{n-1}, \qquad x = n \cdot p \cdot p_n;$$

III) $$x - y = r^n, \qquad z = r \cdot r_n,$$
$$x - z = q^n, \qquad y = q \cdot q_n,$$
$$y + z = p^n, \qquad x = p \cdot p_n.$$

Hieraus folgt im Falle I):

$$x = \frac{p^n + q^n + n^{n-1} r^n}{2},$$

im Falle II):

$$x = \frac{r^n + q^n + n^{n-1} p^n}{2}$$

und im Falle III):

$$x = \frac{p^n + q^n + r^n}{2}.$$

Dass x sich durch drei Zahlen p, q, r in einer dieser Formen darstellen lassen müsse, hat schon Abel ohne Mittheilung eines Beweises angegeben.[1]) Er erwähnt ausserdem noch die Möglichkeit

$$x = \frac{p^n + n^{n-1}(q^n + r^n)}{2},$$

welche bei uns ausgeschlossen ist.

Wir machen zuerst die Annahme I). Die Gleichung (13ª) wird hier

(18) $$n\, x^\nu z^\nu = q_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i\, x^{i-1} z^{i-1} q^{n(n-2i+1)}.$$

Alle Zahlen N_i mit Ausnahme von $N_1 = 1$ sind durch n theilbar; auch z ist durch n theilbar: vom dritten Gliede ab

[1]) Lettre à Holmboe vom 3. August 1823, Oeuvres t. II, p. 255.

sind also alle Terme der rechten Seite durch n^2 theilbar. Die linke Seite ist mindestens durch $n^{\nu+1}$ theilbar; folglich ist auch

(19) $$q_n^n - q^{n(n-1)} \equiv 0 \quad \text{mod. } n^2.$$

Nach dem Fermat'schen Satze ist

(20) $$q^{n(n-1)} \equiv 1 \quad \text{mod. } n^2,$$

denn q kann, da y zu z relativ prim ist, nicht durch n theilbar sein. Es ergibt sich

$$q_n^n \equiv 1 \quad \text{mod. } n^2,$$

und da identisch $q_n^n \equiv q_n$ mod. n ist

(21) $$q_n \equiv 1 \quad \text{mod. } n.$$

Ebenso folgt aus (13^b):

(22) $$(-1)^\nu n y^\nu z^\nu = p_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i (-1)^{i-1} y^{i-1} z^{i-1} p^{n(n-2i+1)},$$

und die Anwendung derselben Schlussweise führt zu der Congruenz

(23) $$p_n \equiv 1 \quad \text{mod. } n.$$

Folglich ist auch

(24) $$\begin{aligned} x &= p \cdot p_n \equiv p \quad \text{mod. } n, \\ y &= q \cdot q_n \equiv q \quad \text{„} \quad n. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} x - y &= p\,p_n - q\,q_n \equiv p - q \quad \text{mod. } n \\ &= r^n \cdot n^{n-1} \quad \equiv 0 \quad \text{„} \quad n, \end{aligned}$$

also auch:

(25) $$p^n \equiv q^n \quad \text{mod. } n^2.$$

Weiter folgt aus den Gleichungen I):

(26) $$2z = p^n - q^n + r^n \cdot n^{n-1},$$

also nach (25), da $n > 2$:

(27) $$2z \equiv 0 \quad \text{mod. } n^2.$$

Es wäre also z nicht nur durch n, sondern durch n^2 theilbar, d. h. eine der beiden Zahlen r oder r_n müsste den Factor n enthalten.

Setzen wir die der Annahme I) entsprechenden, in (14) und (15) gegebenen Werthe der Zahlen r_i in (13) ein, so ergibt sich:

$$n\, x^\nu\, y^\nu = n\, r_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i\, x^{i-1}\, y^{i-1}\, r^{n\,(n-2\,i+1)}\, n^{(n-1)\,(n-2\,i+1)},$$

und nach Division mit n:

$$\begin{aligned} x^\nu\, y^\nu &= r_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i\, x^{i-1}\, y^{i-1}\, r^{n\,(n-2\,i+1)}\, n^{n^2-2\,i\,n+2\,i-2} \\ &= r_n^n - r^{n\,(n-1)}\, n^{n\,(n-2)} - x\, y\, r^{n\,(n-3)}\, n^{n^2-4\,n+3} - \ldots\ldots \\ &\qquad - \frac{\nu\,(\nu+1)}{2\cdot 3}\, x^{\nu-1}\, y^{\nu-1}\, r^{2\,n}\, n^{2\,(n-1)}. \end{aligned} \tag{28}$$

Wäre also $r_n \equiv 0$ mod. n, so müsste eine der Zahlen x oder y durch n theilbar sein, was nicht angeht. Es kann also nur r den Factor n enthalten, so dass z mindestens durch n^2 theilbar ist.

Wir wollen allgemein annehmen, dass r durch $n^{\lambda-1}$, also z durch n^λ theilbar sei, wobei also λ mindestens gleich 2 wäre. Durch diese Annahme modificiren sich auch die soeben an die Relation (18) geknüpften Schlüsse. Da jetzt z durch n^λ theilbar ist, ergibt sich nemlich an Stelle von (19):

$$q_n^n - q^{n\,(n-1)} \equiv 0 \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}, \tag{29}$$

also auch

$$q_n \equiv q^{n-1} \qquad \text{mod. } n^\lambda.$$

Ebenso folgt aus (22)

$$p_n \equiv p^{n-1} \qquad \text{mod. } n^\lambda.$$

Ferner mit Hülfe der Gleichungen I)

$$\begin{aligned} x &= p\cdot p_n \equiv p^n \quad \text{mod. } n^\lambda, \\ y &= q\cdot q_n \equiv q^n \quad\ \ \text{„} \quad n^\lambda. \end{aligned}$$

Nun ist nach I)

$$x = q^n + z \equiv q^n \quad \text{mod. } n^\lambda$$
$$= p\, p_n \quad \equiv p^n \quad \text{„} \quad n^\lambda,$$

also auch

$$p^n \equiv q^n \qquad \text{mod. } n^\lambda, \tag{30}$$

folglich:

$$p \equiv q \qquad \text{mod. } n^{\lambda-1},$$
$$p^{n^2} - q^{n^2} \equiv 0 \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}, \tag{30a}$$

wobei $\lambda \geqq 2$ ist. Andererseits aus I) und (1):

$$p^{n^2} - q^{n^2} = (y+z)^n - (x-z)^n$$
$$\equiv n\, z\, (x^{n-1} + y^{n-1}) \quad \text{mod. } n^{2\lambda+1}, \tag{31}$$

denn alle anderen Terme der rechten Seite enthalten höhere Potenzen von z, multiplicirt in Binomialcoefficienten des Exponenten n.

Aus den Identitäten (18) und (23) folgt durch Subtraction

$$p_n^n - q_n^n \equiv p^{n(n-1)} - q^{n(n-1)} - n z (y p^{n(n-3)} - x q^{n(n-3)}) \text{ mod. } n^{2\lambda+1}.$$

Wir multipliciren beiderseits mit $p^n q^n$ und benutzen wieder die Relationen $x = p\, p_n$, $y = q\, q_n$, sowie die Congruenz (31); dann ergibt sich

$$q^n x^n - p^n y^n \equiv q^{n^2} (q^n - p^n) + n\, z\, q^n (x^{n-1} + y^{n-1})$$
$$- n\, z\, p^n q^n (y\, p^{n(n-3)} - x\, q^{n(n-3)}) \qquad \text{mod. } n^{2\lambda+1}.$$

Da nun r durch $n^{\lambda-1}$ theilbar sein sollte, und da nach I) $x - y$ durch $r^n n^{n-1}$ theilbar ist, kann hier (indem $n\lambda - 1 > 2\lambda + 1$ ist) überall x durch y ersetzt werden; es ist also auch

$$(q^n - p^n)(y^n - q^{n^2}) \equiv 2 n z y^{n-1} q^n - n z y p^n q^n (p^{n(n-3)} - q^{n(n-3)})$$
$$\text{mod. } n^{2\lambda+1}.$$

Der erste Factor der linken Seite ist nach (30) durch n^λ, der zweite Factor (da $y = q\, q_n$) nach (29) durch $n^{\lambda+1}$ theilbar; der letzte Factor des zweiten Gliedes der rechten Seite enthält nach (30) den Factor n^λ, das ganze Glied also (da z durch n^λ theilbar ist) auch den Factor $n^{2\lambda+1}$; es folgt also

$$0 \equiv 2\,n\,z\,y^{n-1}\,q^n \quad \text{mod. } n^{2\lambda+1}$$

oder, da n nicht durch 2 theilbar ist:

$$z\,y^{n-1}\,q^n \equiv 0 \quad \text{mod. } n^{2\lambda}. \tag{32}$$

Nach unseren Annahmen sollten y und q nicht durch n theilbar sein; es muss demnach z den Factor $n^{2\lambda}$ enthalten.

Nimmt man also an, dass die Zahl z durch n^{λ} theilbar sei, so müsste sie auch durch $n^{2\lambda}$ theilbar sein, was nur mit der Voraussetzung $z = 0$ verträglich ist. **Der Fall I) ist damit als unzulässig nachgewiesen.**

Der Fall II) lässt sich in genau der gleichen Weise erledigen. Aus den Identitäten (13) und (17 [a]) erhalten wir bez.

$$(33) \quad \begin{aligned} n\,x^{\nu}\,y^{\nu} &= r_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i\,x^{i-1}\,y^{i-1}\,r^{n(n-2i+1)}, \\ n\,x^{\nu}\,z^{\nu} &= q_n^n - \sum_{i=1}^{\nu} N_i\,x^{i-1}\,z^{i-1}\,q^{n(n-2i+1)}, \end{aligned}$$

und schliessen aus ihnen, wie in (21), (23) und (24) die Congruenzen

$$\begin{aligned} q_n \equiv \quad r_n \quad &\equiv 1 && \text{mod. } n, \\ y = q \cdot q_n &\equiv q && \text{mod. } n, \\ z = r \cdot r_n &\equiv r && \text{mod. } n, \\ y + z = q\,q_n + r\,r_n &\equiv q + r && \text{mod. } n, \\ = p^n \cdot n^{n-1} \quad &\equiv 0 && \text{mod. } n, \end{aligned}$$

also auch, entsprechend zu (25):

$$q^n + r^n \quad \equiv 0 \qquad \text{mod. } n^2,$$

ferner aus II)

$$2\,x = q^n + r^n + p^n\,n^{n-1} \equiv 0 \quad \text{mod. } n^2.$$

Die Identität (13 [b]) gibt nach Division mit n

$$(34) \quad \begin{aligned} &(-1)^{\nu}\,y^{\nu}\,z^{\nu} = p_n^n - p^{n(n-1)}\,n^{n(n-2)} \\ &+ \sum_{i=2}^{\nu} (-1)^i\,N_i\,x^{i-1}\,y^{i-1}\,p^{n(n-2i+1)}\,n^{n^2-2in+2i-2}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, wie oben entsprechend aus (28), dass p durch n theilbar sein muss. Sei allgemein p durch $n^{\lambda-1}$, also x durch n^{λ} theilbar; dann folgt aus (33)

$$\begin{aligned}
r_n^n - r^{n(n-1)} &\equiv q_n^n - q^{n(n-1)} \equiv 0 && \text{mod. } n^{\lambda+1}, \\
r_n \equiv r^{n-1},\ q_n &\equiv q^{n-1} && \text{mod. } n^{\lambda}, \\
y = x + r^n &\equiv r^n && \text{mod. } n^{\lambda}, \\
z = x - q^n &\equiv -q^n && \text{mod. } n^{\lambda}, \\
r^n + q^n &\equiv 0 && \text{mod. } n^{\lambda}, \\
r^{n^2} + q^{n^2} &\equiv 0 && \text{mod. } n^{\lambda+1}.
\end{aligned}$$

Endlich aus II) und (1):

$$\begin{aligned}
r^{n^2} + q^{n^2} &= (x-y)^n + (x-z)^n \\
&\equiv - n\, x\,(y^{n-1} + z^{n-1}) \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}.
\end{aligned}$$

Durch Benutzung dieser Relation und durch Addition der Gleichungen (33) wird man schliesslich, wie bei (32), zu der Congruenz

$$x\, y^{n-1}\, q^n \equiv 0 \quad \text{mod. } n^{2\lambda}$$

geführt. Also müsste x durch $n^{2\lambda}$ theilbar sein, was nicht angeht, wenigstens nur zu der identischen Lösung $x = 0$ führen würde.

Wir haben endlich den Fall III) zu untersuchen. Es gelten wieder die Gleichungen (33) und ausserdem Gleichung (22). In jeder dieser Gleichungen sind alle Glieder der rechten Seite durch n theilbar bis auf das erste und zweite; auch die linke Seite ist durch n theilbar. Es bestehen demnach die Congruenzen

$$(35) \quad p_n^n \equiv p^{n(n-1)},\ q_n^n \equiv q^{n(n-1)},\ r_n^n \equiv r^{n(n-1)} \quad \text{mod. } n,$$

also auch nach dem Fermat'schen Satze (nach welchem $p^n \equiv p$ ist)

$$p_n \equiv p^{n-1},\ q_n \equiv q^{n-1},\ r_n \equiv r^{n-1} \quad \text{mod. } n$$

und hieraus

$$p_n \equiv 1,\ q_n \equiv 1,\ r_n \equiv 1 \quad \text{mod. } n.$$

Nehmen wir allgemein an, es sei

(36) $$p_n \equiv q_n \equiv r_n \equiv 1 \quad \text{mod. } n^\lambda, \ \lambda \geqq 1,$$

so ist

(37) $$x = p \cdot p_n \equiv p\ , \quad y \equiv q\ , \quad z \equiv r \quad \text{mod. } n^\lambda\ ,$$

(38) $$x^n \equiv p^n, \quad y^n \equiv q^n, \quad z^n \equiv r^n \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}.$$

also folgt aus (3)

(39) $$p^n \equiv q^n + r^n \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}$$

und aus den Gleichungen III):

$$y + z \equiv (x - z) + (x - y) \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}$$

folglich

(40) $$y + z \equiv x \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}$$

oder, da $y + z = p^n$ ist:

(41) $$x = p \cdot p_n \equiv p^n \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}$$

also

(42) $$p^{n-1} \equiv p_n \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}$$

und wegen (36):

(43) $$p^{n-1} \equiv 1 \quad \text{mod. } n^\lambda.$$

Ebenso ist

(44) $$q^{n-1} \equiv 1, \quad r^{n-1} \equiv 1 \quad \text{mod. } n^\lambda.$$

Die weitere Betrachtung knüpft sich wieder an die beiden Gleichungen (33), zu denen noch die aus (13) hervorgehende Relation (22), nemlich

(45) $$(-1)^\nu n y^\nu z^\nu = p_n^n - p^{n(n-1)} - \sum_{i=2}^{\nu} N_i (-1)^{i-1} y^{i-1} z^{i-1} p^{n(n-2i+1)}$$

hinzutritt. Durch Addition der Gleichungen (33) ergibt sich

(46) $$n x^\nu (y^\nu + z^\nu) = q_n^n + r_n^n - (r^{n(n-1)} + q^{n(n-1)}) - P,$$

wo zur Abkürzung:

$$P = \sum_{i=2}^{\nu} N_i x^{i-1} (y^{i-1} r^{n(n-2i+1)} + z^{i-1} q^{n(n-2i+1)}).$$

Nun ist nach III)

$$y = x - r^n, \quad z = x - q^n.$$

Nach Anwendung des binomischen Satzes wird daher:

$$P = \sum_{i=2}^{i=\nu} N_i x^{i-1} \sum_{s=0}^{s=i-1} (-1)^{i-1-s} x^s \binom{i-1}{s} [r^{n(n-i-s)} + q^{n(n-i-s)}].$$

Ferner folgt aus (37) und (40)

$$(47) \qquad p \equiv q + r \quad \text{mod. } n^\lambda,$$

also durch Potenziren

$$(48) \qquad p^{n(n-i-s)} \equiv q^{n(n-i-s)} + r^{n(n-i-s)} \quad \text{mod. } n.$$

Da alle in P vorkommenden Zahlen N_i durch n theilbar sind, ist demnach

$$P \equiv \sum_{i=2}^{i=\nu} N_i x^{i-1} \sum_{s=0}^{s=i-1} (-1)^{i-1-s} x^s \binom{i-1}{s} p^{n(n-i-s)} \quad \text{mod. } n^2$$

$$\equiv \sum_{i=2}^{\nu} N_i x^{i-1} (x - p^n)^{i-1} p^{n(n-2i+1)} \quad \text{mod. } n^2.$$

Nach (41) ist $x - p^n$ durch $n^{\lambda+1}$ theilbar, also folgt:

$$P \equiv 0 \quad \text{mod. } n^2.$$

Aus (36) und (44) erhalten wir

$$q^{n(n-1)} - q_n^n \equiv 0, \quad r^{n(n-1)} - r_n^n \equiv 0 \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}.$$

Die Gleichung (46) führt demnach zu folgender Congruenz:

$$(49) \qquad x^\nu (y^\nu + z^\nu) \equiv 0 \quad \text{mod. } n.$$

Durch Addition von (45) zu der ersten Gleichung (33) ergibt sich in analoger Weise

$$(50) \quad n y^\nu (x^\nu - (-1)^\nu z^\nu) = r_n^n - p_n^n + p^{n(n-1)} - r^{n(n-1)} - Q,$$

wo

$$Q = \sum_{i=2}^{\nu} N_i y^{i-1} (x^{i-1} r^{n(n-2i+1)} - (-1)^{i-1} z^{i-1} p^{n(n-2i+1)}).$$

Hierin setzen wir nach III)

$$x = y + r^n, \quad z = -y + p^n;$$

dann wird

$$Q = \sum_{i=2}^{\nu} N_i\, y^{i-1} \sum_{s=0}^{i-1} \binom{i-1}{s} y^s \left[r^{n(n-i-s)} - (-1)^{i-1-s} p^{n(n-i-s)}\right].$$

Erheben wir die beiden Seiten der Congruenz (47) zur Potenz $n(n-i-s)$, so folgt:

$$r^{n(n-i-s)} + (-1)^{n(n-i-s)} p^{n(n-i-s)} \equiv q^{n(n-i-s)} (-1)^{n(n-i-s)} \quad \text{mod. } n.$$

Der Voraussetzung nach ist n eine ungerade Zahl, also $(-1)^n = (-1)^{n^2} = -1$, und somit auch

$$r^{n(n-i-s)} - (-1)^{i-1-s} p^{n(n-i-s)} \equiv q^{n(n-i-s)} (-1)^{i-1-s} \quad \text{mod. } n.$$

Es wird daher

$$Q \equiv \sum_{i=2}^{\nu} N_i\, y^{i-1} \sum_{s=0}^{i-1} \binom{i-1}{s} y^s q^{n(n-i-s)} (-1)^{i-1-s} \quad \text{mod. } n^2$$

$$\equiv \sum_{i=2}^{\nu} N_i\, y^{i-1} (y - q^n)^{i-1} q^{n(n-2i+1)} \quad \text{mod. } n^2.$$

Da nach III) $x - z = q^n$ ist, so folgt aus (40)

$$y - q^n \equiv 0 \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}.$$

Es wäre demnach auch

$$Q \equiv 0 \quad \text{mod. } n^2.$$

Da ferner analog zu (41) die Congruenzen

$$y = q\, q_n \equiv q^n, \quad z = r\, r_n \equiv r^n \quad \text{mod. } n^{\lambda+1}$$

bestehen und nach (35)

$$q_n^n \equiv q^{n(n-1)}, \quad r_n^n \equiv r^{n(n-1)} \quad \text{mod. } n^{\lambda+2},$$

ist, so würde aus (50) folgen:

(51) $$y^\nu (x^\nu - (-1)^\nu z^\nu) \equiv 0 \quad \text{mod. } n.$$

In derselben Weise würde man aus der zweiten Gleichung (33) in Verbindung mit (45) die Congruenz

(52) $$z^\nu (x^\nu - (-1)^\nu y^\nu) \equiv 0 \quad \text{mod. } n$$

ableiten können. Die Zahlen x, y, z sollten der Voraussetzung

nach nicht durch n theilbar sein; es müssten also wegen (49), (51) und (52) auch die Congruenzen

$$y^\nu + \qquad z^\nu \equiv 0 \quad \text{mod. } n,$$
$$x^\nu - (-1)^\nu z^\nu \equiv 0 \quad \text{mod. } n,$$
$$x^\nu - (-1)^\nu y^\nu \equiv 0 \quad \text{mod. } n$$

gleichzeitig Geltung haben. Multiplicirt man die erste dieser Congruenzen mit $(-1)^\nu$ und addirt sodann die linken Seiten, so ergibt sich

$$2\,x^\nu \equiv 0 \quad \text{mod. } n.$$

Es müsste also x durch n theilbar sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Hiermit ist die Unmöglichkeit dargethan, eine Gleichung der Form (3), d. h. eine Gleichung

$$x^n = y^n + z^n$$

durch ganze Zahlen x, y, z zu befriedigen, wenn n eine ungerade Primzahl bedeutet, und wenn keine der Zahlen x, y, z durch n theilbar sein soll. Der Fall aber, wo eine dieser Zahlen durch n theilbar ist, wurde schon oben (p. 192 ff.) erledigt.

Da nun die Unmöglichkeit des Falles $n = 4$ von Lamé nachgewiesen wurde, kann n auch keine Potenz von 2 sein; es bleibt also in der That nur die eine Möglichkeit $n = 2$.

Die im Vorstehenden herangezogenen Hülfsmittel sind durchaus elementarer Natur; ausser dem Fermat'schen Satze der Zahlentheorie sind nur einfache algebraische Umformungen benutzt worden. Es ist daher sehr wohl möglich, dass Fermat bereits im Besitze eines Beweises für seine Behauptung gewesen ist.

Das gewonnene Resultat kann man auch dahin aussprechen, dass die Curve

$$x^n - y^n - z^n = 0$$

ausser den drei Punkten $0, 1, -1$; $1, 0, 1$; $1, 1, 0$ keinen weiteren Punkt mit rationalen Coordinaten besitzt.

Bedeutet daher λ eine rationale Zahl, und schneiden wir die Curve mit der geraden Linie

$$(x - y) - \lambda z = 0,$$

welche durch den Punkt 1, 1, 0 hindurchgeht, so kann die resultirende Gleichung nicht durch rationale Werthe erfüllt werden. Es ergibt sich aber

$$\lambda^n (x^n - y^n) - (x - y)^n = 0,$$

oder nach Division mit $x - y$, wenn noch

$$\frac{x}{y} = t$$

gesetzt wird,

$$\lambda^n (t^{n-1} + t^{n-2} + \ldots + t + 1) - (t - 1)^{n-1} = 0.$$

Ist die ganze Zahl n grösser als 2, so kann demnach diese Gleichung nicht durch rationale Werthe von t und λ erfüllt werden, ausgenommen die Werthe $t = 1$, $\lambda = 0$ und $t = 0$, $\lambda = + 1$, wobei das obere Zeichen für eine ungerade, das untere für eine gerade Zahl gilt.

Eine in den hinterlassenen Papieren Franz Neumann's vorgefundene Rede von C. G. J. Jacobi.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. Juni

von **Walther v. Dyck.**

(Eingelaufen 21. Juli.)

Die im Folgenden veröffentlichte Rede hat Jacobi zum Eintritt in die philosophische Facultät der Universität am 7. Juli 1832 gehalten (die Ernennung Jacobi's zum Ordinarius war 1829 erfolgt).

Herr Carl Neumann in Leipzig hatte diese Rede als Student unter den Büchern seines Vaters gefunden, für sich abgeschrieben und eine besonders charakteristische Stelle derselben im Vorwort zu seinen „Beiträgen zu einzelnen Theilen der mathematischen Physik" Leipzig 1893 veröffentlicht. Als ich mich im Herbste des vorigen Jahres mit Studien über „die Beziehungen zwischen dem künstlerischen und dem wissenschaftlichen Erfassen der Natur" beschäftigte und mir eben jene citirte Stelle die Art wissenschaftlicher und künstlerischer Intuition besonders prägnant zu bezeichnen schien, ersuchte ich Herrn Carl Neumann um Mitteilungen über den Ursprung jenes Citates. Dies gab Veranlassung, dass ein Enkel F. Neumann's, Herr E. Neumann in Halle, in dem Nachlasse seines Grossvaters nach jener Rede forschte, mit dem Erfolge, dass er das Original der Rede von der Hand Jacobi's eingetragen fand in einem durchschossenen Handexemplar einer für den eingangs genannten Zweck gedruckten Abhandlung, deren ausführlicher Titel lautet:

„Commentatio / de transformatione integralis duplicis indefiniti

$$\int \frac{d\varphi\, d\psi}{A + B\cos\varphi + C\sin\varphi + (A' + B'\cos\varphi + C'\sin\varphi)\cos\psi \ldots}$$

$$\ldots \overline{+ (A'' + B''\cos\varphi + C''\sin\varphi)\sin\psi}$$

in formam simpliciorem

$$\int \frac{d\eta\, d\vartheta}{G - G'\cos\eta\cos\vartheta - G''\sin\eta\sin\vartheta}$$

quam / auctoritate A. Ordinis philosophorum / pro loco in eo rite obtinendo / D. VII. Julii MDCCCXXXII / H. h. a. c. / publice defendet / Carolus Gustävus Jacobus Jacobi Ph. Dr. / Math. P. P. O., Academiarum Parisiensis, Berolinensis, Petropolitanae sodalis. / assumpto ad respondendum socio / Herrmanno Henrico Haedenkamp Halensi / opponentibus / Julio Eduardo Czwalina, Tolksensi / Augusto Rudolpho Luchterhand, Mariaeinsulano. / Regiomonti."

Es ist diese Abhandlung der erste Teil (Nr. 1—9) der im 8. Band von Crelle's Journal S. 253—279 und S. 321—357 abgedruckten Abhandlung „De transformatione integralis duplicis indefiniti etc." (Vergleiche Werke, Band III S. 91—158, sowie das Verzeichnis sämtlicher Abhandlungen Jacobi's im Bd. VII der Werke, S. 427.)

Ihr sind noch folgende Thesen vorgedruckt:

Theses.

1. Mathesis est scientia eorum, quae per se clara sunt.
2. Principium methodi geometricae et analyticae idem est.
3. Per Theoriam Functionum illustrissimi Lagrange analysis infinite parvi non refutatur, sed demonstratur.

Dass die vorliegende Rede wirklich für die genannte Gelegenheit verfasst wurde, geht aus der Anrede, wie aus der am Schluss zugefügten Aufforderung zur Disputation (die wir eben

deshalb noch in ihren ersten Sätzen mit abdrucken) unzweifelhaft hervor.

Ich darf Herrn Geheimrath Carl Neumann, welcher mir mit dem Original der Rede ihre Veröffentlichung vollständig übergab, auch an dieser Stelle für die hierdurch erwiesene Auszeichnung aufs herzlichste danken. Ich glaube, dass auch heute noch die Rede Jacobi's das besondere Interesse der Fachgenossen durch die in ihr vertretene Auffassung mathematischer Arbeit erwecken wird.

Prorector magnifice, decane spectabilis, professores doctoresque clarissimi atque doctissimi, commilitones ornatissimi, auditores omnium ordinum honoratissimi.

Ex quo primum ad artem analyticam accuratius cognoscendam animum appuli atque exemplaria mathematicorum assidua manu evolvi, magnum illud admiratus sum et stupendum opus mentis humanae, quod mathesis nomine usurpamus. Nam si id jam celebramus atque posteritati commendamus, quoties Rex aut Imperator aedificii alicujus prae ceteris decori fundamento vel unum infixerit lapidem — habemus jam aedem amplam paene ad astra usque exstructam, cujus singulos lapides alios post alios per tantam saeculorum seriem struxerunt regia illa et imperatoria ingenia, quibus gloriatur genus humanum et saeculum, quod illustraverunt. Eo magis miratus sum errorem singularem, in quem video incidere viros non sane contemnendos aut rerum mathematicarum expertes, qui quasi caeci judicent de coloribus, sed viros eximios, ipsos adeo mathematicos praestantissimos, errorem dico, huic tantae disciplinae suum deesse sibi insitum principium progressionis; fieri scilicet rerum mathematicarum progressum, quoties hoc vel illud problema de mundo naturali petitum seu quaestio physica mathematicorum labores provocat. Tristis sane et deplorabilis sors disciplinae, sancto illo nomine indignae, quae e libera facta esses serva, e filia

numinis divini, mentis humanae gloriam manifestante, ipsa mentis expers, ipsa nescia quid tibi velis, non proprio ac superbo volatu altum petens, sed dominae jussu alienae huc illuc dirigens gressus incertos ac titubantes. Permittatis velim, Auditores omnium ordinum honoratissimi pro humanitate vestra, quam imploro in re delicata et variis difficultatibus obnoxia, ut paucis erroris istius fontem detegam.

Et mundus naturalis et homo sibi conscius a Deo O. M. creati sunt; eaedem leges aeternae mentis humanae, eaedem naturae; quae est conditio, sine qua non intelligibilis esset mundus, sine qua nulla daretur rerum naturae cognitio. Missum hic faciamus ideas logicas quatenus expressas habet natura, quam hoc respectu habito considerant philosophi recentiores (ut verbo usitato utar et nimis usitato) tanquam logicam petrefactam. Consideremus naturam quatenus leges exprimat mathematicas. Non solis sensibus externis per tantam phaenomenorum varietatem et quasi tumultum dignosci potuit lex moderatrix, cui prorsus illa aut proxime obtemperant, nisi ipse accesseris ad contemplationem naturae ea fide et persuasione, ut mentis conceptiones tuae in ea expressas invenias. Leges naturae insitae mathematicae percipi non potuerunt, nisi jam proprio motu mentis humanae e legibus ei insitis exstructa esset mathesis. Corpora coelestia in sectionibus proxime conicis solem ambire non intellectum esset, nisi aeternum sectionum conicarum schema observabatur Graecorum ingenio. Quod Keplerus detexit stellae Martis moderari maeandros, idem jam Apollonii subtilitas mente conceperat, et praemeditata erat. Quantum in explicanda arte proficit mens humana, tantum natura etiam suam ei explicat sibi insitam mathesin.

Crescunt disciplinae lente tardeque, per varios errores sero pervenitur ad veritatem, omnia praeparata esse debent diuturno et assiduo labore ad introitum veritatis novae; jam illa, certo temporis momento, divina quadam necessitate coacta emergit; praeparatis omnibus causa levissima accidens, quamvis remota quaestio physica eam elicere valet. Num hanc ob rem quaestioni physicae debemus incrementa, quae veritate nova in lucem

prolata disciplina capit? Cur hodie applicas calculum? Num hoc die primum proponitur a natura problema? — Sedet Sphinx illa inde a creatione mundi, sedebit in sempiternum, proponit aenigmata generi mortalium; at suo tantum tempore venit Oedipus ab Apolline missus.

Errorem, in quem diximus magnos etiam incidisse geometras, in eo videmus consistere, quod non probe distinctum sit inter causas veras et causas accidentes; sive ut viri medici aiunt, inter causas proximas et causas remotas. Novimus, Eulerum olim e passu Virgiliano describente fluctuantes proras, puppes littore stantes, occasionem cepisse Hydraulicae condendi analyticae fundamenta. Exstat de Neutono lepida fabula, pomum super nares dormitantis incidens dedisse viro occasionem detegendi gravitatem universalem. Num pomo humi cadenti inest principium illud progressus, num carminibus Virgilianis? Inest ingeniis Neutonorum Eulerorum: inest ingeniis, quae magnos illos viros antecedebant, inest toti historiae artis.

Est causa vera progressus mathesis necessaria ejus explicatio, quae fit secundum leges menti humanae insitas aeternas. Causa accidens esse potest quaestio physica, pomum cadens, passus Virgilianus. Qui de causis illis fortuitis natam putant mathesin similes mihi videntur iis, qui Epicureorum sententia ex atomis per vacuum volitantibus construunt mundum. Contra quos disserens Keplerus narrat se fessum a scribendo animoque intus pulverulento ab atomorum istorum considerationibus vocatum esse ad coenam, apposuisse uxorem acetarium. Quam se interrogasse, num si toto aëre confertae volitarent patinae stanneae, folia lactucae, micae salis, guttae aquae, aceti, olei, ovorum decusses, idque ab aeterno duret, num futurum sit tandem aliquando, ut fortuito tale coeat acetarium; respondisse bellam suam: sed non hoc decore, neque hoc ordine. Neque, cum Kepleriana uxore dico, de phaenomenorum tumultu ac confusione nasci potuit divina illa mathesis structura, omnibus numeris absolutissima, non hoc decore neque hoc ordine.

Geometras Francogallos plerosque, qui prodiere e schola illustris comitis de la Place, his temporibus in errorem illum

incidisse, dolemus. Qui dum unicam e quaestionibus physicis mathesis salutem petunt, relinquunt veram illam ac naturalem disciplinae viam, quam ingressi olim Eulerus et de la Grange, artem analyticam ad id evexerunt, quo nunc gaudet, fastigium. Quo non tantum mathesis pura, sed ipsae quoque ejus ad quaestiones physicas applicationes haud parum detrimenti capiunt. Semper enim arbitratus sum, ista maxime negligentia factum esse, ut magnum illud et inclytum problema de motu corporum coelestium per attractiones mutuas ex orbita elliptica exturbatorum, careat adhuc solutione, quae motibus systematis nostri solaris explicandis satisfaciat. Simulque persuasum habeo, omni studio ac labore excultis et theoria functionum ellipticarum et theoria integralium duplicium, quas ut problemata praecipua nostro tempore in rebus mathematicis proposita specto, fore, ut problematis illius paene desperati solutio vel sua sponte emergat. Theoriam functionum ellipticarum ante hos quatuor annos novis superstruxi fundamentis, itaque novum quasi calculi instrumentum cum Geometris communicavi. Fortasse etiam haec quam publico jam examini subjicio, de integralibus duplicibus commentatiuncula non omnino indigna videbitur hac solemnitate, qua coetui adscribar venerando eruditorum, qui artium plus ultra promovendarum sancto et augusto officio vitam et vigilias consecraverunt.

Jam ad arma vos provoco, juvenes ornatissimi, Czwalina et Luchterhand; surgite et tela contra nos nostraque dirigite, quae evitare studebo et, si fors fert, remittere. Quo in certamine te oro rogoque, Respondens dilectissime, ut fidelis mihi sis armiger, nam fortes ac strenui sunt adversarii. Quos et tu jam ad certamen provoca, ut nostrum pugnandi ardorem cognoscant. . . . .

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 6. Juli 1901.

1. Herr Siegmund Günther erstattet einen Bericht über den II. und III. Theil seiner Untersuchung: „Akustisch-geographische Probleme.“

2. Herr H. Seeliger spricht: „Ueber kosmische Staubmassen und das Zodiakallicht.“

3. Herr H. Seeliger legt eine Arbeit des Privatdozenten an der hiesigen Universität, Herrn Dr. Karl Schwarzschild: „Der Druck des Lichtes auf kleine Kugeln und die Arrhenius'sche Theorie der Kometenschweife“ vor.

4. Herr H. Seeliger legt ferner eine Abhandlung des Privatdozenten für Physik an der hiesigen technischen Hochschule, Herrn Dr. R. Emden: „Beiträge zur Sonnentheorie“ vor.

5. Herr Ferd. Lindemann überreicht eine Untersuchung der Herren C. Cranz und K. R. Koch in Stuttgart: „Ueber die Vibration des Gewehrlaufs, II. Schwingungen in horizontaler Ebene.“ Die Untersuchung erscheint wie die frühere derselben Autoren in den Abhandlungen der Akademie.



Akustisch-Geographische Probleme.

Von **Siegmund Günther.**

(*Eingelaufen 6. Juli.*)

Von den drei Gruppen, in welche in unserer früheren Mitteilung[1]) die spontanen Schallphaenomene zerlegt wurden, hat die eine bereits ihre Erledigung gefunden.[2]) Die zweite Gruppe hatte alle diejenigen Schallerscheinungen zu umfassen, bei denen es zur Herausbildung wirklicher Töne

[1]) Diese Sitzungsberichte, 31. Band (1901), S. 15 ff.

[2]) Von Prof. Dr. Pechuel-Loesche in Erlangen erfuhr der Verf., eben auf grund jener früheren Veröffentlichung, dass auf dem Sand- und Lateritboden Afrikas Töne von wechselnder Art und Stärke gar nicht selten gehört werden, was natürlich dem Aberglauben der Negerstämme vielfach Vorschub leistet. Dem erwähnten Geographen ist persönlich musikalischer Sand bekannt von Darsser Ort an der Ostseeküste, von der Colorado-Wüste, vom Kap Hatteras, von der westindischen Insel Inagua, vom Kap der guten Hoffnung; in der südwestafrikanischen Wüste Namib hat er die gleichen, tönenden Dünenhügel gefunden, wie Lenz in der Sahara (s. o. S. 25). „Schreienden Sand" kennen die Neger an der Loango-Küste; natürlich behält er diese Eigenschaft nur solange, als ihn nicht die Tropenregen gründlich durchfeuchtet haben. Herrn Prof. Pechuel-Loesche schuldet der Verf. aufrichtigen Dank für die umfangreichen Mitteilungen, durch welche ersterer die vorliegende Untersuchung wesentlich gefördert hat. Nicht unerwähnt soll auch bleiben, dass Schnee, wenn er infolge extremer Kälte körnig geworden ist, sich akustisch ähnlich wie Sand verhält. Payer berichtet (R. Andree, Der Kampf um den Nordpol, Bielefeld-Leipzig 1880, S. 263) von Franz Josephs-Land: „Dort, wo der Schnee in massigen Wehen liegt, sind diese wogenartig und scharf berandet, und der Schritt wiederhallt auf ihnen wie Trommelton" — offenbar eine ganz analoge Erscheinung.

kommt, die einen deutlich ausgesprochenen musikalischen Charakter an sich tragen, was beim tönendem Sande nicht, oder doch nur ausnahmsweise, der Fall war. Eine klar erkennbare Bezeichnung für solche Tonbildungen fehlt; wenn wir von musikalischen Naturklängen sprechen, so hoffen wir für diese Namenwahl durch den Inhalt des folgenden Abschnittes die Berechtigung darthun zu können.

II. Musikalische Naturklänge.

Das Material dieser Abteilung, welches freilich nur partiell und bedingt die Unterlagen für eine kritische Bearbeitung darbietet, ist ziemlich reichhaltig. Um die Sammlung desselben machten sich verdient einige Abhandlungen von Schleiden,[1]) Springer[2]) und Carus Sterne,[3]) und zumal die letztgenannte will ernsthaft beachtet sein, weil sie sich eine Scheidung der zumeist bunt durch einander gewürfelten Angaben nach festen Grundsätzen zum Ziele gesetzt hat. Gewisse gar nicht näher kontrollierbare Vorkommnisse, über die nur zufällige, sonst nicht bestätigte Nachrichten vorliegen, scheiden wir von vornherein aus.[4]) Wenn dies geschieht, so verbleiben für eine

---

[1]) M. J. Schleiden, Studien und populäre Vorträge, Leipzig 1857, S. 116 ff. („Die Töne in der Natur").

[2]) Springer, Die sonoren Naturerscheinungen im Weltall, Die Natur, (2) 6. Jahrgang, S. 223 ff.

[3]) Carus Sterne (Ernst Krause), Musik der Berge und Thäler, Wälder und Wüsten, Gartenlaube, 1882, S. 702 ff.

[4]) Dahin gehören z. B. die Seufzerklänge, welche man auf einem Berge bei Granada hie und da hören will und „el ultimo sospiro del Moro" — des letzten Maurenkönigs Boabdil — genannt hat (W. Irving, Chronicle of the Conquest of Granada, 2. Band, London 1850, S. 86): hierher eine Nachricht des alten Missionars G. B. Schwarz (Reise in Ostindien, Heilbronn 1751, S. 26) von dem eine eigentümlich tosende Musik machenden „Teufelsberge" nächst der Kapstadt; hierher endlich gewisse, halb ins Bereich der Gespenstergeschichten einschlagende Erzählungen aus Frankreich, welche Monnier und Vingtrinier (Traditions populaires comparées, Paris 1854, S. 50 ff.) mit grossem Eifer gesammelt haben. Klagende Stimmen vernehme man hie und da im Jura-

Untersuchung, die exakt vorzugehen bestrebt ist, wiederum drei verschiedene Erscheinungskomplexe übrig. Wir meinen erstmalig die musikalischen Töne in abgeschlossenen Thälern, nächstdem diejenigen in Wäldern, an dritter Stelle die Töne, welche zerklüfteten Felsen zu entströmen scheinen. Dass eine scharfe Grenzlinie zwischen den drei Kategorien nicht gezogen werden kann, dass zumal die unter die beiden ersten Klassen fallenden Erscheinungen sich ursächlich nahe berühren, leuchtet ein. Wir folgen, da die wissenschaftliche Terminologie sich des Gegenstandes noch kaum zu bemächtigen begonnen hat, der populären Ausdrucksweise und sprechen von singenden Thälern, singenden Wäldern und singenden Felsen.

a) Singende Thäler. Die Ermittlungen Carus Sternes haben ergeben, dass die erste Andeutung, die hier einzubeziehen ist, auf den Schweizer Scheuchzer, den Begründer der physikalischen Geographie der Alpen, zurückgeht. In das Glarner

---

gebirge bei Pontarlier, und zwar erinnerten dieselben abwechselnd an menschliche Töne und an „des coups d'archet sur des cordes sonores“. Andere „crieurs“ seien in den östlichen Departements nichts ungewöhnliches, wie z. B. „l'esprit de Cri-mont“ am Doubs. Etwas zuverlässiger ist wohl (Stimmen in der Luft, Das Ausland, 1830, Sp. 1087) der Bericht eines Reisenden, der im Herbste 1828 den Pass „Porte de Venasque“ in den Pyrenäen überstieg. Er erzählt, die Luftströmung habe ihm vom Berge Maladetta her „einen dumpfen, langsamen, klagenden, der Windharfe ähnlichen Ton“ zugetragen, und zwar sei die Luft ziemlich ruhig, der Himmel wolkenlos gewesen; später, als er den gleichen Weg nochmals gemacht, sei die Sonne hinter Wolken gestanden, und Töne hätten sich nicht mehr hören lassen. Nach Springer (S. 255 ff.) habe man unbestimmte Kunde von ähnlichen akustischen Phaenomenen aus Griechenland, China, der Tartarei. Wenn auch Schweden in diesem Zusammenhange genannt wird, so wird es sich zeigen, dass es mit den dortigen Naturklängen eine ganz andere Bewandnis hat. Der gleichen — leider auf genaue Zitate zumeist verzichtenden und etwas allzu kompilatorischen — Zusammenstellung sei entnommen, dass, einer Notiz im „Magazin pittoresque“ zufolge, ein Engländer 1852 in der Wüste deutlich ein zehn Minuten andauerndes Geläute, wie von Kirchenglocken, bemerkt habe. Hier dürfte fraglos an den tönenden Sand der Dünenhügel zu denken sein.

Hochgebirge eingebettet liegt ein kleines Hochthal, die Sandalp, und von ihr berichten[1]) die Hirten, dass sie zu Zeiten dort oben „den angenehmsten Wettkampf musikalischer Töne" zu hören bekämen. Auch jetzt noch, zweihundert Jahre nach Scheuchzer, hat sich diese Ueberlieferung bei den Alpenbewohnern erhalten. Carus Sterne stellt diesem Falle einen zweiten zur Seite, der sich auf das Siegerland (Provinz Westfalen) bezieht, über den jedoch irgend zuverlässige Nachrichten nicht vorzuliegen scheinen. Etwas festeren Boden bekommen wir unter die Füsse, wenn wir des singenden Thales an der steierischen Koralpe gedenken, insofern wir von den dortigen Verhältnissen eine vertrauenswürdige, Sinn für Naturbeobachtung bekundende Beschreibung[2]) zur Verfügung haben.

Der betreffende Gebirgszug trennt auf eine grössere Strecke auf seinem Kamme Steiermark und Kärnten. Ganz nahe der Grenze befindet sich eine kleine Mulde, auf drei Seiten von Felsen umgeben, und wenn man diesen fast abgeschlossenen Raum betritt, dringen eigenartige, leise Töne, die jedoch einen ganz harmonischen Eindruck hervorrufen, zu den Ohren des Besuchers. Sowie sich stärkerer Wind erhebt, erlischt die Hörbarkeit der Töne. Nach der Ansicht Mallys ist der Ursprung jener in einer Quelle zu suchen, welche in der Nähe des Gipfels des Speikkogels, des höchsten Punktes im Koralpenzuge, entspringt und von dort mit vernehmlichem Rauschen über das Steingerölle hinrieselt; die Felswände wirken als Reflektoren und vereinigen die diffusen Geräusche innerhalb eines kleinen Fokusraumes, wo man also musikalische Klänge vernimmt.

Diese Erklärung trifft aller Wahrscheinlichkeit nach das Richtige. Indess bedarf es doch einer etwas eindringenderen Analyse des Sachverhaltes, denn bewegtes Wasser kann, von

[1]) J. J. Scheuchzer, Itinera per Helvetiae alpinas regiones, 2. Band, Leiden 1723, S. 186.

[2]) Mally, Das Geläute in der Schwanbergeralpe, eine akustisch merkwürdige Erscheinung, Steiermärkische Zeitschr., (2), 2. Jahrgang (1835), S. 4 ff.

dem gewöhnlichen, unbestimmten Brausen natürlich abgesehen, nach zwei Richtungen hin akustische Wirkungen hervorbringen. Mit den im engeren Sinne so genannten Wasserfalltönen haben wir es im gegenwärtigen Falle mutmasslich nicht zu thun; von ihnen wird gleich nachher speziell die Rede sein müssen. Wohl aber dürfte jene Tonbildung in frage kommen, auf welche durch den feinsinnigen Akustiker Oppel die Aufmerksamkeit gelenkt wurde; er ist, wo nicht der eigentliche Entdecker der Reflexionstöne, so doch derjenige, der zuerst deren Entstehung eingehend untersucht und die verschiedenen Möglichkeiten unterschieden hat.[1]) Die erste Art solcher Töne tritt in die Erscheinung, wenn in der Nähe eines Gitters eine Lufterschütterung stattgefunden hat, denn dann hört man neben dem scharf ausgesprochenen Hauptklange einen sich mit diesem kombinierenden Reflexionston, dessen Höhe rasch abnimmt. Was die zweite Art von Reflexionstönen anlangt, so besteht deren einfachste Erzeugung darin, dass man mit hinlänglich starkem Schritte durch eine enge Gasse geht; durch Zurückwerfung des Schalles von beiden Wänden entsteht ein wirklicher Ton, der übrigens ebenfalls an Höhe und Stärke ziemlich schnell sinkt. Diese letztere Gruppe von Tönen steht mutmasslich, obwohl Pfaundler einige Bedenken hegt, in nahem Zusammenhange mit derjenigen, auf deren Vorkommen der Innsbrucker Physiker Baumgarten durch eine zufällige Wahrnehmung aufmerksam wurde.[2]) Die diffusen Reibungs-

---

[1]) Oppel, Beobachtungen über eine neue Entstehungsweise des Tones und Versuch einer Theorie desselben, Ann. d. Phys. u. Chem., 94. Band (1855), S. 357 ff.; Beobachtung einer zweiten Gattung von Reflexionstönen nebst Andeutungen über die Theorie derselben, ebenda, 101. Band (1857), S. 165 ff. In neuer Beleuchtung stellt die Oppel'sche Lehre von den Reflextönen jene Abhandlung v. Fischer-Benzons dar, deren oben (S. 15) Erwähnung gethan worden ist. Dort ist auch von Reflextönen die Rede, die man auf der grossen Freitreppe der Walhalla vernehme.

[2]) Baumgarten, Töne durch Reflexion von Geräusch mit gleichmässigem Schallfalle, Mitteil. d. Naturwissensch.-Mediz. Ver. zu Innsbruck, 1877. Pfaundler hat gezeigt, dass und wie man diese Reflexions-

geräusche, welche durch das einigermassen gestörte Hinwegfliessen des Wassers über loses Gestein ausgelöst wurden, erfahren infolge der Reflexion einerseits eine Verstärkung und andererseits auch eine Differentiierung in dem Sinne, dass sich ein bestimmter Ton losschält, der natürlich, angesichts der Vielzahl der bedingenden Einflüsse, weder an Höhe noch an Klangfarbe konstant bleiben kann. Das ist Oppels Quellton, den man in unmittelbarer Nähe von Quellen in felsiger Umgebung leicht zu hören Gelegenheit bekommt. Durch diese Entdeckung, welche von dem Vorkommnis im steierischen Gebirge ganz unabhängig zustande kam, ist für dieses letztere eine völlig zureichende Begründung ermöglicht worden.

β) Singende Wälder. Ungleich weniger günstig ist es mit den Erscheinungen bestellt, welche nun in dieser Unterabteilung ihre Erörterung finden sollen. Auch für sie lässt sich ein sehr alter, der Diskussion freilich so gut wie ganz entrückter Beleg beibringen. Der Engländer Gervasius von Tilbury, der für den Kaiser Otto IV. zu Anfang des XIII. Jahrhunderts unter dem Titel „Kaiserliche Mussestunden“ ein didaktisches Tendenzwerk verfasste, weiss von einem Walde bei der Stadt Carlisle zu melden,[1]) der eine Merkwürdigkeit in sich schliesse. In der Mitte dieses Waldes befinde sich ein von Bergen umrandetes Thal, neben der grossen Heerstrasse, und in diesem vernehme man regelmässig „zur ersten Stunde des Tages“ einen süssen Ton, wie von fernem Glockengeläute; des-

töne, die der zweiten Oppel'schen Gattung doch mindestens sehr nahe stehen, an der Sirene nachbilden kann. „Man beobachtet sie, wenn man zwischen einem rauschenden Bache oder Flusse — auch das Geräusche eines Eisenbahnzuges ist verwendbar — und einer Mauer, von letzterer ungefähr 1 m entfernt, steht. Jeder Schallimpuls trifft das Ohr zweimal, direkt und reflektiert. So entsteht ein Ton, der sich bei Annäherung an die Wand erhöht, bei Entfernung von derselben vertieft“ (Pfaundler, Ueber die geringste absolute Anzahl von Schallimpulsen, welche zur Hervorbringung eines Tones nötig ist, Sitzungsber. d. Wiener Akademie d. Wissensch., Math.-Phys. Kl., 8. November 1877).

[1]) Gervasius von Tilbury, Otia imperalia, ed. Liebrecht, Hannover 1856, S. 34.

halb hätten die Eingeborenen dem einsamen Orte in ihrer Sprache einen bezeichnenden Namen („Laikibrait") gegeben.[1]) Für unmöglich braucht man die zunächst etwas abenteuerlich anmutende Mitteilung keineswegs zu halten, wenn man sie mit den Thatsachen in Parallele stellt, die als gesichert gelten können. Es sind allerdings nur zwei ähnliche Fälle, aber diese werden durch anscheinend unverwerfliche Zeugnisse gestützt.

Zunächst sehen wir uns in den badischen Schwarzwald versetzt. Schon vor langer Zeit, nämlich bald nach dem dreissigjährigen Kriege oder in der zweiten Hälfte des XVII. Jahrhunderts, wurden, wie wir in dem grossen geschichtlich-geographischen Sammelwerke Kolbs[2]) über Baden lesen, Soldaten, die in einer unfern des Städtchens Triberg gelegenen Waldschlucht kampierten, durch einen sonderbaren Gesang, der aus den Wipfeln der Bäume zu kommen schien, überrascht und stifteten deshalb eine Votivtafel, die anscheinend zu Anfang des XIX. Jahrhunderts noch vorhanden gewesen ist. Inwieweit die von Kolb versuchte Deutung[3]) dieses Schallphänomenes korrekt ist, das wollen wir einstweilen noch dahingestellt sein lassen. Jedenfalls erheischt volle Beachtung der Umstand, dass dasselbe einen konstanten Charakter besass und nach mehr denn hundert Jahre nachher nicht verschwunden war. Es wäre jedenfalls von Interesse, zu erfahren, ob auch jetzt noch das Triberger Thal seine musikalische Eigenschaft beibehalten hat; dass aber schon geringfügige Veränderungen des Land-

---

[1]) Carlisle liegt an der Grenze von Schottland. Das keltische Sprachgebiet, jetzt auf Wales und den äussersten Norden der Insel beschränkt, hatte vor siebenhundert Jahren noch eine die heutige weit übertreffende Ausdehnung.

[2]) J. B. Kolb, Historisch-statistisch-topographisches Lexicon von dem Grossherzogtum Baden, 3. Band, Karlsruhe 1816, S. 300 ff.

[3]) „Die dortige Bergkluft, die durch ein schnell abbrechendes Felseneck der auf- und abströmenden Luft einen eigenen widerstrebenden Impuls gab, bildete in den Wipfeln der Tannen und des Gesträuches eine natürliche Aeolsharfe, deren Töne durch den gegenüber strömenden Waldbach begleitet wurden. Noch jetzt kann man bei windiger Nacht diesen Aeolsgesang im Konzerte mit dem Waldstrom spielen hören".

schaftsbildes, wie etwa Abholzungen, einen tief gehenden Einfluss auf die Akustik einer Gegend auszuüben vermögen, ist bekannt und oben[1]) bereits betont worden.

Nunmehr gelangen wir zu dem dritten, bekanntesten und viel umstrittenen, jedoch noch keineswegs vollkommen aufgehellten Beispiele dieser Art, zum singenden Walde oder singenden Thale von Thronecken. Wie erwähnt, kann man die Erscheinung gleich gut unter unsere erste oder zweite Rubrik bringen, denn es ist ein einsames Waldthal, in dessen Grenzen sich die Ereignisse abgespielt haben. Thronecken, der gewöhnlichen Annahme nach das „Tronje" des Nibelungenliedes, ist ein kleines, im südwestlichen, Hochwald genannten Teile des Hunsrück-Gebirges gelegenes Dorf, in dessen Flur der Malborner-Bach sich mit dem zur Mosel fliessenden Thron-Bache vereinigt. Zwei Kilometer oberhalb ergiesst sich in den Malborner Bach der Röder-Bach, dessen mit dichtem Walde bestandenes Thal sich gegen den höchsten Punkt der Rheinprovinz, den Erbeskopf (815 m), hinaufzieht. Dieses Röderbachthal nun ist der Schauplatz der Geschehnisse, welche ihm den auch vom Volksmunde und von der Reiselitteratur[2]) adoptierten Namen des singenden Thales verschafft haben.

Was wir von den Dingen wissen, verdanken wir grösstenteils dem vor wenigen Jahren verstorbenen Ingenieur H. Reuleaux aus Remagen. Es kommen zunächst drei Publikationen[3]) desselben in frage; allein auch davon abgesehen, hat er etwa einundeinhalb Dezennien daran gesetzt, das Rätsel, zu dessen

---

[1]) Vgl. o. S. 31.

[2]) Hochwald- und Hunsrückführer, Kreuznach 1899, S. 153 ff.

[3]) H. Reuleaux, Wandernde Töne, Sitzungsber. d. Verhandl. d. Naturhistor. Ver. d. Rheinlande, 37. Band, S. 161 ff.; Zwei Reflexionstöne, ebenda, 41. Band, S. 278 ff.; Das singende Thal bei Thronecken, ein Hochwaldrätsel, Koblenz 1880. Die an letzter Stelle genannte, selbständige Schrift enthält nebst der Gesamtheit der vom Autor angestellten Beobachtungen auch dessen Versuche, sich auf dem weiten Felde der theoretischen Akustik zu orientieren und zu einer befriedigenden Interpretation der mysteriösen Erscheinung durchzudringen. Wir beziehen uns vorwiegend auf diese Arbeit.

Mitwisser ihn der Zufall gemacht hatte, zu lösen, und die hiezu dienlichen Materialien, welche er zu dem Ende gesammelt hatte, und welche in unserer folgenden Darstellung gebührende Berücksichtigung gefunden haben,[1]) erreichten einen geradezu staunenswerten Umfang. Es darf deshalb auch die Hoffnung ausgesprochen werden, dass das Problem, welches von Reuleaux der tellurischen Physik vorgelegt ward, an dieser Stelle soweit gefördert wird, als dies unter den obwaltenden Verhältnissen überhaupt möglich erscheint.

An einem schönen Spätherbsttage hielt der Oberförster von Malborn im Hochwaldreviere eine Hirschjagd ab, an der u. a. auch Reuleaux teil nahm. Die Schützen wurden im unteren Röderbachgrunde postiert, und während unser Berichterstatter ruhig dastand, hörte er plötzlich ein Klingen in der Luft, wie von fernem Glockenläuten. Vereinzelt blos liessen sich anfänglich tiefe Glockentöne vernehmen, die vom Thaleingange her das Thal hinaufzogen und „in prächtiger Schwellung“ langsam vorbei wallten, so dass man den Ton selbst und zugleich das Mitklingen der Oktave ganz deutlich zu erkennen imstande war. Das unterste Ende des Thales weist eine Verengerung auf; dem entsprechend breiteten sich von der Engstelle ab die Tonwellen fächerförmig aus. Die Luft war bewegt, aber von dem Brausen des Windes hoben sich die sonoren Glockenklänge unverkennbar ab. Der weitere Verlauf der Jagd zwang den Beobachter, seinen Standort zu verlassen, und damit hörte auch bald das Weiterbestehen des Klangphaenomenes auf; als jedoch nach fünf Stunden das Jagen sich wieder dem unteren Thale zuwandte, traten auch die Töne wieder hervor, und Reuleaux konnte ganz gut feststellen, ob

---

[1]) Durch die grosse Freundlichkeit von Frau und Fräulein Reuleaux, denen beiden er an diesem Orte seinen aufrichtigen Dank für das ihm geschenkte Vertrauen aussprechen möchte, wurde der Schreiber dieser Zeilen in den Stand gesetzt, alle Aufzeichnungen des Verstorbenen und den von ihm in der fraglichen Angelegenheit geführten, umfangreichen Briefwechsel einsehen zu können; auch wurde ihm anstandslos gestattet, diese Daten für die vorliegende Abhandlung nach Belieben auszunützen.

eine Luftschwingung gerade über ihn hinwegging oder aber eine mehr seitliche Richtung einhielt.

Ehe wir an die Frage herantreten, wie denn wohl ein solches Wandern tönender Luftwellen zustande kommen könne, haben wir zuerst uns über die Realität der Reuleaux-schen Beobachtung selbst ein Urteil zu bilden. Dieselbe blieb nämlich keineswegs unangefochten. Zumal einzelne Forstbeamte verfochten energisch die Annahme,[1] dass irgend eine Täuschung vorgekommen sein müsse; gerade dem Forstpersonale, welches das Röderbachthal zu allen Tages- und Jahreszeiten durchstreife oder kreuze, hätte unmöglich eine so auffallende Schallerscheinung verborgen bleiben können. Dem gegenüber sah sich Reuleaux in die Notwendigkeit versetzt, Ohrenzeugen ausfindig zu machen, und es ist ihm dies auch vollauf geglückt.[2])

[1]) Kritiken der Reuleaux'schen Schrift gaben Grunert und Borggreve (Forstliche Blätter, 1880, S. 276 ff.). Es müsse, hiess es, eine Täuschung inmitte liegen; vielleicht könne man an verwehte Hornsignale oder an das von Zugvögeln bewirkte Geräusche denken. Es fiel dem Angegriffenen nicht schwer, sich solcher — doch wirklich recht gezwungener — Einwände zu erwehren (Noch einmal „Das singende Thal bei Thronecken", ebenda 1880, besonders paginierter Anhang). Insbesondere wies er darauf hin, dass eben nur durch ein seltenes Zusammenwirken der verschiedensten begünstigenden Momente die Tonbildung so charakteristische Formen annehmen könne, und dass man mithin gar kein Recht habe, dergleichen als etwas sich regelmässig Wiederholendes zu betrachten.

[2]) Ueber die sowohl in der bezeichneten Antikritik als auch in den Reuleaux'schen Aufzeichnungen enthaltenen Zeugenberichte mögen noch ein paar Worte hier Platz finden, um unser positives Urteil von vorhin zu rechtfertigen. Der Förster Haak hatte zwar selbst keine direkte Kenntnis, wusste aber wohl, dass abergläubische Leute die „Geisterstimmen" des Roederbachgrundes mit den um das alte, unheimliche Schloss von Thronecken schwebenden Sagen in Verbindung brachten. Ebenfalls aus dem Volksmunde hatte Oberförster Helbron seine Kenntnis, von dem der Ausdruck „singendes Thal" herrührt. Dies setzt ausser Zweifel ein Brief, den am 29. Dezember 1879 der Bürgermeister von Remagen, v. Lassaulx, an Reuleaux richtete. Oberförster Werbaum in Thronecken nannte sein Thal ein „singendes, pfeifendes oder musizierendes". Ferner schreibt der Forstkandidat Gericke aus Greifswald

Will man nicht überhaupt die Regeln ausser Kraft treten lassen, nach denen die Konstatierung von Naturereignissen auf dem Wege der Zeugenaussage gemeiniglich erfolgt, so wird man zugestehen müssen: An der Thatsächlichkeit spontaner Klangphaenomene von musikalischem Typus im Röderbachthale lässt sich vernünftigerweise nicht zweifeln. Dem Verständnis des Thatbestandes stehen hingegen sehr grosse Schwierigkeiten im Wege.

Zwei hervorragende Physiker, an die sich Reuleaux um Belehrung wandte, erklärten, wie ihre Zuschriften an den Fragesteller beweisen, eine exakte Erklärung für unmöglich. Ein dritter deutete an, dass jene Reflexionstöne, deren weiter oben Erwähnung geschah, wohl irgendwie im Spiele sein könnten, aber klargestellt sei der Zusammenhang in keiner Weise. Wir wollen versuchen, die überhaupt als möglich zu denkenden Kategorien der Prüfung zu unterziehen, um so vielleicht durch Ausschluss derjenigen, die nicht als brauchbar erfunden werden, der Wahrheit näher zu kommen.

Aehnlich, wie bei dem Triberger Phaenomene, könnte man die Aeolsharfe als ein Analogon heranziehen. Schon deren Erfinder Kircher legte Gewicht darauf,[1]) dass dieses originelle Musikinstrument nicht durch einen wie immer gearteten künstlichen Mechanismus, sondern einzig durch die Aktion des Windes zum Tönen gebracht werde. Man kann sich somit

---

1881, er habe die typischen Töne am 8. Dezember 1880 zwischen Fuchsstein und Erbeskopf, also gerade am kritischen Platze, vernommen. Noch gewichtiger sind drei Schreiben (4. Juni, 22. Juni, 5. Juli 1880) des bekannten Bismarck'schen Forstmeisters Lange aus Friedrichsruh, der im Jahre 1852 im oberen Hunsrück stationiert war und dort diese „wilde Jagd“ mehrfach zu hören bekam. Von Reuleaux' Jagdgefährten an jenem Herbsttage des Jahres 1880 hatte der Gasthofbesitzer Blinzler aus Godesberg, dessen Anstand ein benachbarter war, ganz die gleichen Wahrnehmungen gemacht.

[1]) Athanasius Kircher, Phonurgia nova, Kempten 1573, S. 145 ff. „Aliam machinam harmonicam automatam concinnare, quae nulla rotarum, follium, vel cylindri phonotactici ministerio, sed solo vento ed aëre harmonicum sonum excitet“.

auch ganz wohl denken, dass ohne jedes Zuthun des Menschen gelegentlich einmal eine derartige Tonbildung statt hat, wenn Stäbe oder Saiten, die einer Versetzung in longitudinale oder transversale Schwingungen fähig sind, von ungefähr dem Winde ausgesetzt werden. Wie jedoch das Wegstreichen des Windes über die Bäume statt des diffusen Geräusches, das jedermann kennt und als etwas Selbstverständliches betrachtet, wirkliche Töne hervorbringen soll, bleibt ganz ungeklärt. Nehmen wir aber auch für den Augenblick an, es liege eine solche Tonbildung im Bereiche des Möglichen, so müsste man solche seufzende Klänge, wie sie der Windharfe eigentümlich sind, recht häufig, in jedem vom Winde durchzogenen Walde hören, und daran ist doch nicht zu denken. Zudem will sich einer solchen Theorie auch die Beschaffenheit der vernommenen Töne durchaus nicht fügen. Dieselben waren voll, kräftig, harmonisch, aber es fand kein rascher Wechsel statt; dagegen weiss jedermann, der einer Aeolsharfe gelauscht hat, dass diesen förmliche Melodien, und zwar mit allen möglichen Aenderungen der Tonstärke, entströmen. Endlich ist der Ort, von dem die Klänge kommen, im letzteren Falle ein stabiler, während Reuleaux ein deutliches Hinwegziehen der tönenden Luftwellen über seinen Standort und ein Hervorkommen derselben von einer ganz bestimmten Oertlichkeit her konstatieren konnte. Es scheint deshalb diese Hypothese, so sehr sie sich auch dem ersten Eindrucke empfehlen mag, aufgegeben werden zu müssen.[1])

[1]) Ein Aufsatz von Sorel (Correspondance sur les sons produits par le vent, La Nature, 1883, I, S. 206 ff.), der übrigens die von Carus Sterne mitgeteilten Thatsachen, den „Glockenberg" und die Memnonsäule ohne gehörige Kritik zusammenwirft, will Reibungstöne als die wesentliche Veranlassung aller auffälligen Schallerscheinungen hinstellen. Wenn man einen Stab so halte, dass sich der Wind an ihm bricht, so vernehme man stets einen leisen Ton, wie von einer fernen Glocke, und so seien auch jene spontanen Naturklänge, von denen die Litteratur berichte, nur Folgen der sich in sehr verschiedener Weise bethätigenden Windreibung an Hindernissen. In so bequemer Art und Weise werden sich die verwickelten Ereignisse, die der genannte Autor im Sinne hat, schwerlich als Ausfluss ein und desselben mechanischen Faktums auffassen lassen.

Was das Triberger Phaenomene betrifft, so gestattet dasselbe, da eben doch nur eine ziemlich vage Schilderung vorliegt, keine gleich gesicherte Entscheidung; immerhin aber sprechen manche Anzeichen dafür, dass die unerklärlichen Schallerscheinungen im Schwarzwald wie im Hunsrück auf die nämliche Ursache zurückgeführt werden müssen.

Reuleaux selbst hat sich eingehend mit Spekulationen über die von ihm entdeckten Hochwaldtöne beschäftigt und zu diesem Zwecke die Lehre vom Schalle nach allen Richtungen durchgearbeitet, um Anknüpfungspunkte oder Analogien aufzufinden. Für ihn, den mit den örtlichen Verhältnissen bestens Vertrauten, unterlag es von allem Anfang an keinem Zweifel, dass die Konfiguration des Thales von ausschlaggebender Bedeutung sei, dass also nicht der Wald, sondern das Thal das „Singen“ verschulde. Nicht als ob das Thälchen eine besondere Plastik besässe, so dass man etwa auf die Reibung der bewegten Luft an Felsecken u. dgl. als auf den eigentlichen Grund verfallen könnte.[1]) Dasselbe hat ganz einfach eine Muschelform, deren Mundstück die enge Furche des untersten Laufes des Röderbaches darstellt. In diesen Kanal glaubt Reuleaux den Sitz der Tonentstehung verlegen zu müssen, ohne sich übrigens, wie er selbst einräumt, von deren Wesen eine zufriedenstellende Rechenschaft geben zu können. Am wahrscheinlichsten dünkt es ihm noch, dass bei einer ganz bestimmten Richtung der Wind mit grosser Energie in die Enge hineingepresst werde, und dass dort eine Luftstauung eintrete; diese wieder soll zu „Explosionen“ führen, „aus denen die eigentümlichen, selbsttönend werdenden Luftgebilde hervor-

---

[1]) Jeder derartige Erklärungsversuch, wie er ja nicht ferne liegt und auch schon aufgestellt wurde (Günther, Geschichte der anorganischen Naturwissenschaften im XIX. Jahrhundert, Berlin 1901, S. 555), wird hinfällig, wenn man die sanfte Profilierung des in Rede stehenden Gebirges kennt. Irgendwelche scharf hervortretende Unstetigkeiten fehlen den die Thäler begrenzenden Flächen, und es kommt auch angesichts der stark entwickelten Forstkultur der anstehende Fels nur selten dem Wanderer zu gesichte.

gehen.“ Hier nun stehen wir vor einem physikalischen Rätsel, und dass dem so, wird auch von Reuleaux bereitwillig zugestanden. Ebenso vermag er sich keine rechte Vorstellung zu machen von der Art des Fortschreitens der im Engpasse gebildeten Schwingungen;[1] „von wandernden Tönen oder tönenden Bahnen in der Luft lehrt die Physik absolut nichts.“ Und nur solche könnten sich mit seinen eigenen Beobachtungen vereinbaren lassen. Reuleaux denkt an „selbsttönende Luftgebilde“ oder „tönende Körper“, die sich fortbewegen: kurz gesagt, an rotierende Luftwirbel von zylindrischer Gestalt, in deren Inneren, wie bei Tromben, die atmosphärische Verdünnung weit fortgeschritten sei. Carus Sterne weist, um diesen Bewegungsmodus verständlich zu machen, auf die bekannten Wirbelringe von Tait[2]) hin. So wahr es ist, dass diesen Rauchwirbeln die Eigenschaft der Erhaltung ihres Zusammenhanges während ihres Fortschreitens durch die Luft zukommt, ebensowenig ist davon bekannt, dass solche Wirbelbewegungen ins Tönen geraten können. Es würde das auch Allem widersprechen, was wir von Tonerregung wissen.

Ganz allgemein betrachtet, stellen uns die Wahrnehmungen im „singenden Thale“ vor zwei ganz verschiedene Fragen: Wo sind die Töne entstanden, und wie pflanzen sie sich fort? Was den zweiten Punkt angeht, so glauben wir an keine neue, unbekannte Gesetze der Naturlehre zu Hilfe nehmende Bewegungsform appellieren zu müssen, sondern es wurden eben die auswärts gebildeten Töne durch die herrschende Luftströmung in das Thal hineingetragen, und dass, nachdem

---

[1]) Reuleaux, Das singende Thal etc., S. 16 ff.

[2]) Tabakrauchversuche, die mit denjenigen von Tait die allergrösste Aehnlichkeit haben, wenn auch der Zweck, den der Experimentator im Auge hatte, ein ganz verschiedener war, hat wohl zuerst Sondhauss angegeben (Ueber die Form von aus runden Oeffnungen tretenden Luftströmungen, Ann. d. Phys. u. Chem., 85. Band (1852), S. 58 ff.). Die Wirbelnatur der niedrigen Rauchzylinder, welche sich beim Erschüttern des mit Rauch gefüllten Kästchens aus einem in dessen Vorderwand angebrachten Loche losringen, musste natürlich damals noch unberücksichtigt bleiben.

die bewegte Luft den Durchpass zurückgelegt hatte, eine fächerförmige Ausbreitung der Tonwellen und jenes Wogen der Töne stattfand, welches wir von den Orgeln kennen, und welches sich einfach durch die unvermeidlichen Schwebungen erklärt, hat ebenfalls nichts Verwunderliches an sich.

Dass von Reuleaux die Tonbildung in die Engstelle des Röderbachthales verlegt wird, haben wir soeben erfahren. Die näheren Umstände des Vorganges entziehen sich aber ganz unserer Kenntnisnahme, denn wie durch Luftstauung eine jähe Gleichgewichtsänderung, vergleichbar einer Explosion, herbeigeführt werden soll, ist nicht wohl abzusehen. Handelte es sich um eine Klamm, um einen Cañon von beträchtlicher Länge, so könnte man möglicherweise noch eher begreifen, dass die stark zusammengepresste Luft mit einer Detonation den Ausgang verliesse; erstlich aber wäre ein solcher Knall noch lange kein musikalischer Ton, und zum zweiten ist die Thalmündung, wenn auch vergleichsweise enge, doch sehr weit entfernt, eine schmale Spalte zu sein, wie man sie aus dem Hochgebirge kennt. Es bliebe nur wieder übrig, seine Zuflucht zu jener Klasse von Reibungstönen zu nehmen, welche von Savart[1]) und Sondhauss[2]) der Untersuchung unterstellt worden sind. Die Experimente des Letztgenannten würde Reuleaux wohl als eine Stütze für seine Anschauungen verwendet haben, wenn sie ihm nicht bei seinem sonst so fleissigen Durchforschen der einschlägigen Litteratur zufällig entgangen wären. Strömt die Luft durch die Oeffnung eines dickwandigen Gefässes aus, so kommen nach Sondhauss[3]) schöne und kräftige Töne von bestimmter Höhe zum Vorschein, indem die passierende Luft in longitudinale Oszillationen versetzt wird; je allseitiger die Reibung, umso kräftiger der Ton. Man könnte aus diesen Versuchen schliessen, dass distinkte Luftzylinder

---

[1]) Savart, Von den Vibrationsphaenomenen beim Ausfliessen von Flüssigkeiten durch kurze Ansatzröhren, ebenda, 90. Band (1853), S. 389 ff.

[2]) Sondhauss, Ueber die beim Ausströmen der Luft entstehenden Töne, ebenda, 91. Band (1854), S. 126 ff.

[3]) A. a. O., S. 233 ff.

vom Querschnitte der Oeffnung, sich abwechselnd verlängernd und verkürzend, sich vorwärts bewegten und für einen Beobachter, der sich nicht allzu weit von ihrer Fortschreitungsrichtung entfernt befände, den Eindruck hervorrufen könnten, den wir aus Reuleaux' lebensvoller Schilderung kennen.

Was aber im sorgfältig vorbereiteten Laboratoriumsversuche zutrifft, braucht darum noch nicht für die freie Natur zu gelten. Wir wiederholen vielmehr: Die Beschaffenheit der Gegend gestattet es nicht, die wandernden Töne mit denjenigen zu identifizieren, die zustandekommen, wenn Luft aus einer allseitig geschlossenen Oeffnung unter namhaftem Drucke austritt. Und was von durchschlagender Bedeutung ist: Hätte man es mit Sondhaussschen Reibungstönen zu thun, so müsste, so oft der Wind hinlänglich lebhaft aus der charakteristischen Weltgegend bliese, das Thal ins „Singen“ geraten. So verhält es sich aber nicht; denn so wenig daran gezweifelt werden darf, dass unter besonders günstigen Umständen die Töne vernehmbar werden, ebensowenig lässt sich daran etwas ändern, dass nur äusserst selten jemand so glücklich ist, den Moment ihres Lautwerdens zu erhaschen. All das scheint uns den Schluss aufzunötigen, dass die geheimnisvollen Töne nicht erst im Thale selbst entstehen, sondern ausserhalb desselben gebildet worden sind und erst durch den Wind thalaufwärts fortgetragen werden.

Weitaus am nächsten läge es nun zweifellos, das Läuten von Kirchenglocken als die natürlichste und verständlichste Tonquelle anzusprechen. Pfarrdörfer gibt es in der Runde verschiedene; Thalfang, Lückenburg, namentlich aber Malborn könnten in betracht kommen. Zwar liegen diese Ortschaften zum teile reichlich weit von der kritischen Stelle entfernt, allein man weiss, dass sich die Töne oft in Entfernungen fortpflanzen, an die man vonvornherein kaum zu glauben geneigt wäre.[1])

---

[1]) Unter Hinweis auf die Arbeiten von Stokes (On the Effect of Wind on the Intensity of Sound, British Association of Dublin, 1857)

Zwei Gegengründe zwingen uns indessen, auf diese Deutung der Erscheinung zu verzichten. Die Kirchen des Hochwaldes entbehren nämlich einerseits, wie wir von Reuleaux erfahren, der eigentlichen Glocken, indem sie sich mit Glöckchen, denen der Dampfschiffe vergleichbar, behelfen, und andererseits sind die fraglichen Töne auch bei nacht, und überhaupt zu Zeiten wahrgenommen worden, in denen Glocken ganz sicher nicht geläutet wurden. Demgemäss ist es kaum mehr erlaubt, die Erscheinung mit irgendwelchem Eingreifen des Menschen in Zusammenhang zu bringen.

Wohl aber hindert nichts, den Sitz der Tonbildung in den Wasserlauf zu verlegen, der, aus dem Röderbachthale kommend, der Vereinigung mit einer grösseren Wasserader zustrebt.[1]) Selbstredend liegt auch hier nur eine Hypothese vor,

---

und O. Reynolds (Refraction of Sound, Philosophical Transactions, 1876, I, S. 315 ff.) hat Reis (Ungewöhnlich weite Hörbarkeit von Tönen, erklärt durch Windbrechung, Humboldt, 2. Jahrgang, S. 53 ff.) gewisse Erfahrungen, die er selbst in dieser Hinsicht gemacht hatte, zu erklären gesucht.

[1]) Die nachfolgenden Betrachtungen entstammen einer Reise, welche der Verf. im März dieses Jahres nach Thronecken unternahm, um sich an Ort und Stelle über die Verhältnisse zu unterrichten. Dieser Zweck wurde allerdings nur unvollkommen erreicht. Reuleaux ist der Meinung, dass man die meiste Aussicht zu einer positiven Beobachtung habe, wenn man das Thal an einem kühlen Tage einer der beiden Uebergangsjahreszeiten, und bei ausgesprochenem Südwest, besuche. Diese beiden Vorbedingungen waren erfüllt; leider aber brachte besagter Wind, nachdem ein paar heitere Tage vorangegangen waren, ein furchtbares, jeden gründlichen Lokalaugenschein verhinderndes Schneegestöber von fast achtundvierzigstündiger Dauer. Man musste also noch sehr zufrieden sein, in einer der kurzen Pausen wenigstens einen allgemeinen Einblick in die Terraingestaltung gewonnen zu haben. Nebenher musste das überaus lebhafte und sehr weit hörbare, auch durch den heftigsten Sturm nicht zu übertönende Brausen der Mühlenwehre auf den Gedanken bringen, ob nicht hier vielleicht der Ursprung der Tonbildung zu suchen sei. Unter den Landesbewohnern gibt es, wie einschaltend bemerkt sei, zwei Parteien. Aufgeklärte Skeptiker, die auch in Dörfern nicht zu fehlen pflegen, stellen die Existenz eines „singenden" Thales überhaupt in abrede und wollen höchstens eigenartige Echos als vor-

die aber wenigstens als „Arbeitshypothese“ brauchbar ist und dazu dienen kann, eine anscheinend ganz isoliert dastehende Erscheinung in Beziehung zu anderen Vorkommnissen zu setzen. Ehe wir näher auf dieselbe eingehen, wollen wir zuvor uns mit den von Wasserfällen erzeugten Tönen beschäftigen.[1]) Dem bereits erwähnten Quellentone, der dem allgemeineren Begriffe der Reibungstöne unterzuordnen ist, steht der genetisch einigermassen verschiedene Wasserfallton zur Seite.

Als Objekt physikalischer Erörterung hat denselben zuerst der Däne Oersted, der bekannte Entdecker des Elektromagnetismus, in sein Recht eingesetzt.[2]) Er hebt ausdrücklich hervor, dass man den leisen Laut, den der Strahl eines Springbrunnens von sich gebe, von dem störenden Plätschern scharf sondern müsse. Ein geübtes Ohr vermöge aber diesen Eigenton wohl herauszufinden, und wenn man dann eine auf diesen Ton abgestimmte Stimmgabel in der Nähe zum Schwingen bringe, so werde der Strahl sensitiv, d. h. er verliere, falls nur der erregte Ton eine genügende Intensität besitze, seinen Zusammenhang; ein erheblicher Teil des vorher zusammenhängenden, klaren Wasserstrahles löse sich in Staubnebel auf, zum Beweise, dass die Schwingungen, die nun in ihrer Amplitude entsprechend vergrössert wurden, schon vorher im Strahle enthalten gewesen seien. Angeregt von Oersted, sprach dann Pohl den Satz aus:[3]) Die von einem fallenden Wasser-

---

handen gelten lassen, wogegen wieder Andere die Thatsache zugeben und solche Töne auch wohl selbst gehört zu haben versichern.

[1]) In seinem Bestreben, alle irgend interessanten akustischen Gegenstände sich zu eigen zu machen, hatte Reuleaux der mehrfach zitierten Notizensammlung auch viele litterarische Daten über Wasserfalltöne einverleibt, ohne jedoch dem Gedanken Raum zu geben, ob diese letzteren nicht auch zu dem Probleme, mit dem er sich so angelegentlich befasste, in Kausalbeziehung stehen möchten.

[2]) Oersteds Gesammelte Schriften, deutsch von Kannegiesser, 1. Band (Der Geist in der Natur), Leipzig 1850, S. 39 ff. Der betreffende Essay führt die besondere Ueberschrift: „Der Springbrunnen.“

[3]) Pohl, Akustische Briefe für Musiker und Musikfreunde, 1. Bändchen, Leipzig 1853, S. 83 ff.

strahle ausgelösten Laute sind zusammengesetzt aus einer Menge von musikalischen Einzeltönen. Wie dieselben zustande kommen, liess sich ziemlich gleichzeitig ergründen, indem Magnus,[1]) v. Feilitzsch[2]) und vor allem Tyndall[3]) die Durchsetzung eines Flüssigkeitsstrahles mit Luftblasen, welcher schon Venturi[4]) und Buff[5]) Beachtung geschenkt hatten, nach allen Seiten experimentell erforschten. Tyndall hat[6]) die Lehre von den sensitiven Strahlen auch zuerst systematisch abgehandelt. Die Luftbläschen, welche die tropfbare Flüssigkeit mit sich fortreisst, platzen unausgesetzt an verschiedenen Stellen des Strahles, am meisten natürlich in der Umgebung seines Auftreffens auf ein entgegenstehendes Hindernis, und diese winzigen Explosionsgeräusche summieren sich zu wirklichen Tönen.

Diesen gegenüber war man lange gleichgiltig geblieben. Es ist das unbestrittene Verdienst zweier zu gemeinsamer Arbeit verbundener Brüder, des Geologen A. Heim und des Musikers E. Heim, auch diesen im engeren Sinne akustischen Teil der Lehre von den Wasserfalltönen sorgfältig studiert zu haben.[7])

---

[1]) Magnus, Ueber die Bewegung der Flüssigkeiten, Ann. d. Phys. u. Chem., 80. Band (1851), S. 1 ff.

[2]) v. Feilitzsch, Ueber den Ausfluss der Flüssigkeiten aus Oeffnungen in dünner Wand, ebenda, 63. Band (1844), S. 1 ff.

[3]) Tyndall, Phenomena of Water Jet, Philosoph. Magazine, (4) 1. Band (1851), S. 176 ff.

[4]) Venturi, Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides, Paris 1797 (Bulletin de la Société Philomatique). Gegen Venturis Ansicht, dass das strömende Wasser adhärierende Luft mit sich fortreisse, ist Magnus wohl zu schroff aufgetreten.

[5]) Buff, Einige Bemerkungen über die Erscheinung der Auflösung des gewöhnlichen Strahles in Tropfen, Ann. d. Phys. u. Chem., 27. Band (1832), S. 162 ff. Die im trüben Teile des Strahles enthaltenen Tropfen werden durch elektrisches Licht sichtbar gemacht.

[6]) Tyndall, Der Schall, deutsch von H. Helmholtz und G. Wiedemann, Braunschweig 1869, S. 292 ff.

[7]) A. Heim, Töne der Wasserfälle, Dinglers Polytechnisches Journal, 219. Band, S. 344 ff.; E. Heim, Töne der Wasserfälle, Verhandl. d. Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, 1874, S. 209 ff.

Die Anzahl der eigentlichen Kaskaden und kräftig rauschenden Gebirgsbäche, die phonetisch geprüft wurden, war gross, und durchweg stellte sich eine nahezu vollkommene Uebereinstimmung des Prüfungsbefundes heraus. Am deutlichsten ist der C Dur-Dreiklang, begleitet von einem tiefen, brummenden F. Dieser letztere Ton erscheint desto stärker ausgebildet, je grösser die fallende Wassermasse ist; fällt das Wasser hoch herab, so kann man F selbst noch hinter Bergen und Wäldern aus dem dumpfen Getöse heraushören. „Wenn man", so äussert sich E. Heim, „am Ufer eines rauschenden Wassers ein Lied in anderer Tonart als in C Dur zu singen versucht, dann entstehen sehr hässliche Dissonanzen mit dem Wasser." Die vier Töne C, E, G, F, von denen E sich am wenigsten bemerklich macht, wiederholen sich, zum öfteren in verschiedenen Oktaven, bei jedem energischeren Wassergebrause. Aus Privatmitteilungen von Prof. Pechuel-Loesche geht hervor, dass drei bekannte Wasserfälle, der Niagara-Fall, der Yosemite-Fall in Kalifornien und der Regenbogen-Fall auf der Insel Hawaii tiefe Töne, wie von einer Riesenorgel, ertönen lassen, wenn man nur seinen Standpunkt in hinreichender Entfernung gewählt hat, um den wuchtigen Dreiklang nicht durch das Plätschern und Tosen gestört zu erhalten. Auch die bekannte Kalema-Brandung an der Küste von Nieder-Guinea bringt (Pechuel-Loesche, Die Loango-Expedition, 3. Band, I, Leipzig 1882, S. 20) zur Nachtzeit, wenn andere Naturstimmen schweigen, regelrecht rhythmische Klänge hervor.

Wie nun sollen diese Wassertöne das Reuleaux'sche Phänomen zuwege bringen? Im Röderbachthale selber sind Wasserfälle nicht vorhanden; wohl aber liegen an der kurzen Laufstrecke des Baches zwischen seinem Austritte aus der mehrgenannten Engstelle und seiner Einmündung bei Thronecken drei Mühlen in angenähert gerader Linie. Die Wehre, über welche das Wasser zu stürzen gezwungen ist, bewirken ein lebhaftes Brausen, das, wie erwähnt, auch dem entfernter Stehenden auffällt. Und die Linie der Mühlen ist gegen Südwesten gerichtet, so dass der aus dieser Weltgegend kommende

Wind die drei Fälle, die an und für sich zwar nur klein sind, in ihrer Vereinigung aber doch einen ganz stattlichen Effekt ergeben, folgeweise zu überstreichen hat. So kann er sehr wohl die Töne, deren Entstehungsort in seiner Richtung liegt, unter besonders günstig gelagerten Umständen mit sich fortführen und in das sich vor ihm öffnende Thal hineintragen. Reuleaux liess einen Jäger, der ein Waldhorn bei sich hatte, unmittelbar nach der beschriebenen Episode Töne blasen, und da zeigte sich, dass das kleine C des Jagdhornes sich vollständig mit dem rätselhaften Tone in der Luft deckte. Dieses C aber gehört, wie wir sahen, gerade zu den typischen Wasserfalltönen.

Kann diese Erklärung, welche erwähntermassen zunächst aus einem Besuche des Schauplatzes hervorgegangen ist, den Anforderungen einer abschliessenden Theorie genügen? Dies zu behaupten, sind wir weit entfernt. Gleichwohl lässt sich zu ihren Gunsten wenigstens das anführen, dass sie sich ausschliesslich auf feststehende Thatsachen stützt und den Erfahrungen grossenteils entspricht. Vorzugsweise darauf sei einiger Nachdruck gelegt, dass, wenn die bewegte Luft als Trägerin der vom Wasser erzeugten Töne aufgefasst wird, die grosse Seltenheit, mit der das Phaenomen offenbar auftritt, nahe genug gelegt wird. Die geringste Ungleichförmigkeit der Tonbildung in den drei Ursprungsstätten muss eine kumulative Wirkung hintanhalten, und auch die Windrichtung braucht sich nur ein wenig zu ändern, um jede Wirkung illusorisch zu machen. Wenn gefragt werden wollte, weshalb denn nicht auch das dumpf dröhnende F gehört ward, so liesse sich erwidern, dass dieser Begleitton ja wesentlich an hohen Wasserstürzen haftet, von denen hier nicht die Sprache ist. Ueberhaupt aber steht uns ja noch keine eigentlich akustische Analyse der im Thale gehörten Klänge zur Verfügung; der einzige unter allen Denen, die etwas von der Erscheinung aus eigener Erfahrung wussten, und die zugleich die erforderliche fachwissenschaftliche Bildung besassen, war Reuleaux selbst, und er that, was in seinen Kräften stand,

indem er durch einen Hornruf den vernommenen Ton fixierte. Dieser war der intensivste; die übrigen Töne des Akkordes können mutmasslich den ersteren begleitet haben, ohne dass sie sich dem Gehöre gleich stark aufdrängten. Die Möglichkeit, dass beim Durchgehen des zum Tönen gebrachten Windes durch den unteren Engpass eine gewisse Selektion der Töne stattgehabt habe, so dass von den der bewegten Luft übermittelten Schwingungszuständen nur noch ein einziger Energie genug besessen hätte, um das Ohr zu affizieren, soll übrigens nicht geleugnet werden. Ein ungeübtes Gehörorgan mag in solchem Falle vielleicht eine viel weniger musikalische Einwirkung erfahren; der Forstmeister Lange zum mindesten, dessen wir oben als eines klassischen Zeugen gedachten, entsinnt sich nur eines heftigen, ihm unerklärlichen Gepolters in dunkler Nacht, welches seinen Begleiter einmal derart erschreckte, dass er sich nicht an den Rendezvousplatz zu kommen getraute. Wenn es sich so verhält, wie es unsere Darstellung wahrscheinlich zu machen sucht, so ist auch leicht zu verstehen, dass der Weg, den die wandernden Töne zurücklegen, nicht immer die gleiche Länge zu haben braucht. Ist doch die schon aus früheren Versuchen von Regnault und Mach folgende Annahme, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles auch von dessen Stärke abhängt, neuerdings völlig bestätigt worden.[1]) Der Wasserreichtum des Baches bedingt die Mächtigkeit der Töne, und je nachdem diese eine grössere oder geringere ist, wird auch die Zeit eine verschieden

---

[1]) Ueber diese ältere Phase der die Schallgeschwindigkeit als Funktion der Intensität nachweisenden Untersuchungen gibt Auskunft Rosenberger (Die Geschichte der Physik in Grundzügen, 3. Teil, Braunschweig 1887—1900, S. 752 ff.). Neuere Bewahrheitungen des Erfahrungssatzes, dass sich Wellen von grosser Amplitude rascher als Wellen von kleiner Amplitude fortpflanzen, hat man von Jacques (Velocity of very laid Sounds, Silliman's Journal, 1879, S. 116 ff.) und von Frechon (Sur la vitesse des sons, La Nature, 1883, S. 286 ff.). Die Intensität des Schalles variiert jedoch, wenn die Tonquelle ihren Ort wechselt, wie Segnitz (Ueber den Einfluss der Bewegung auf die Intensität des Schalles, Ann. d. Phys. u. Chem., 85. Band (1852), S. 384 ff.) gefunden hat.

grosse sein, nach deren Ablauf erstere die Thalmündung erreichen. Hiedurch wird aber dann auch wieder die Hörbarkeit der Töne im Bereiche der Thalweitung beeinflusst.

Wie schon bemerkt, wäre es vermessen, zu glauben, mit dieser Zurückführung der Erscheinung auf bekannte Vorgänge sei nun das Rätsel endgiltig und in allen seinen Teilen gelöst. Davon sind wir noch weit entfernt; zumal die Rolle, welche der gewiss nicht gleichgiltigen Enge des Thalausganges zuzuweisen ist, bedarf noch sehr der Aufklärung. Sicher steht für uns nur das Eine, dass die beiden Phaenomene von Triberg und von Thronecken einen einheitlichen Charakter an sich tragen, und dass beide in innigem Zusammenhange mit den diese Thäler durcheilenden Gewässern stehen.

Keinenfalls dürfen wir daran denken, dieselben aus der gleichen Ursache herzuleiten, welche dem dritten der drei oben auseinandergehaltenen Erscheinungskomplexe zu grunde liegt, wie dies wohl versucht wurde. Dieser ist wieder eine Sache für sich allein.

γ) Singende Felsen. Dafür, dass Felsen musikalische Töne aus ihrem Inneren hervorgehen lassen, liegen unseres Wissens blos zwei Beispiele vor, und zwar sind die beiden Orte, von denen dies mitgeteilt wird, einander nahe benachbart, indem sie sich an den Ufern des Orinoko in Südamerika befinden.[1]) Wir verdanken unsere Kenntnis dieser merkwürdigen Oertlichkeiten A. v. Humboldt und dem französischen Reisenden Roulin. Pechuel-Loesches afrikanische Erfahrungen mögen auch bei dieser Gelegenheit besprochen werden. Ein weiterer, von Ch. Darwin mitgeteilter Fall dürfte nur sehr bedingt dieser Gruppe einzureihen sein.

---

[1]) Die ziemlich häufig, so auch in der Humboldt'schen Reisebeschreibung, mit den Felsentönen verglichenen singenden Geräusche, welche man in älterer Zeit an der Memnonsäule zu Theben und auch an einem Tempel des nahe gelegenen Karnak um die Zeit des Sonnenaufganges gehört haben wollte, bleiben hier ausser betracht. Menschliche Artefakte lassen sich nicht mit dem an Naturerscheinungen anzulegenden Massstabe messen. Vgl. Lepsius, Briefe aus Aegypten, Berlin 1852.

Die Wahrnehmungen v. Humboldts[1]) mögen hier nach der von ihm selbst anerkannten Uebersetzung wiedergegeben werden, weil eine Paraphrase die Deutlichkeit nicht zu vermehren geeignet wäre. „Der Granitfels, auf dem wir lagerten, ist einer von denen, auf welchen Reisende zu Zeiten gegen Sonnenaufgang unterirdische Töne, wie Orgelklang, vernommen haben. Die Missionare nennen dergleichen Steine laxas de musica. ‚Es ist Hexenwerk (cosa de bruxas)', sagte unser junger Steuermann, der kastilianisch sprach. Wir selbst haben diese geheimnisvollen Töne niemals gehört, weder in Carichana, noch am oberen Orinoko; aber nach den Aussagen glaubwürdiger Zeugen lässt sich die Erscheinung wohl nicht in Zweifel ziehen, und sie scheint auf einem gewissen Zustande der Luft zu beruhen. Die Felsbänke sind voll feiner, sehr tiefer Spalten und erhitzten sich bei tage auf 48 bis 50 Grad. Ich fand oft ihre Temperatur bei nacht an der Oberfläche 39°, während die der umgebenden Luft 28° betrug. Es leuchtet alsbald ein, dass der Temperaturunterschied zwischen der unterirdischen und der äusseren Luft sein Maximum um Sonnenaufgang erreicht, welcher Zeitpunkt sich zugleich vom Maximum der Wärme am vorhergehenden Tage am weitesten entfernt. Sollten nun die Orgeltöne, die man hört, wenn man, das Ohr dicht am Gesteine, auf dem Fels schläft, nicht von einem Luftstrome herrühren, der aus den Spalten dringt? Hilft nicht der Umstand, dass die Luft an die elastischen Glimmerplättchen stösst, welche in den Spalten hervorstehen, die Töne modifizieren?" Dieses letzterwähnte Moment möchten wir nicht sehr hoch einschätzen; darin aber ist dem grossen, hier auf einem noch recht wenig bebauten Felde sich ergehenden Naturforscher unbedingt zuzugeben, dass die durch die Klüfte des Granits streichende Luft es ist, die sich akustisch bethätigt. Es fragt sich nur, wie wir uns die Modalitäten dieser Bethätigung vorzustellen haben.

---

[1]) A. v. Humboldt, Rélation historique, 6. Band, Paris 1824, S. 377; Gesammelte Werke (neue Cotta'sche Ausgabe ohne Jahrzahl), 3. Band, S. 91 ff.

Roulin erzählt,[1]) ein gleichfalls granitischer Felsblock, von seinen Begleitern „el castillo“ genannt, habe durch seine eigentümliche Schichtung. d. h. durch die bekannte paraklastische Zerklüftung des Urgesteines, die Augen der Reisenden auf sich gelenkt. Der Klotz erwies sich nicht als massiv, sondern als „sanduhrartig“ ausgehöhlt. Durch zufällige Berührung ins Schwanken geraten, sandte er tiefe, sonore Töne aus;[2]) absichtlich erteilte Stösse dagegen brachten zwar gleichfalls Tonerscheinungen zuwege, aber dieselben waren weitaus schwächer. Auch Roulin thut des spanischen Wortes „laxas de musica“ Erwähnung und bemerkt, dass „laxa“ eine Steinplatte bedeute. Musikalische Platten sind es also, welche am Orinoko zu finden sind.

Die bekannten Absonderungserscheinungen an plutonischen Felsarten bewirken, dass auch eine mächtige Gesteinsmasse in ein Aggregat parallelepipedischer Bestandteile verwandelt wird; beim Fortschreiten des Verwitterungsprozesses fällt der Fels in ein Blockmeer auseinander. Dass die so entstehenden Spalten kleinen Luftmengen den Durchzug gestatten, versteht sich ganz von selbst, und damit ist auch gesagt, dass zur Bildung von Reibungstönen mannigfache Gelegenheit geboten ist. Wie dieselben jedoch zu tiefen, klangvollen Orgeltönen werden können, bedürfte noch einer Erklärung, und eine solche möchte wohl schwer zu erbringen sein. Da fühlt man sich denn aufgefordert, eine Erscheinung zur Aushilfe heranzuziehen, für deren Eintreten alle Voraussetzungen gegeben sind. Die einzelnen sich wechselseitig überlagernden Platten können sich unmöglich ihrer ganzen Flächenausdehnung nach berühren;

---

[1]) Roulin, Note sur certains blocs granitiques de l'Orénoque, et sur la cause des bruits qu'on a entendus au lever du soleil, Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques (de Férussac), 11. Band (1829), S. 52 ff.

[2]) „Dans un de ces bonds je frappais un mamelon arrondi de la base, qui, à ma grande surprise, rendit un son plein, prolongé, tout-à-fait analogue à celui qu'on produit en frappant des doigts réunis la caisse d'un piano, dont le couvercle est levé.“

die wirkliche Berührung wird in der Regel auf einige wenige Punkte beschränkt sein. Sobald dann die Temperierung der beiden einander gegenüber stehenden Grenzflächen einen gewissen Grad überschritten hat, beginnt jene alternierende Bewegung, welche bei dem in der Experimentalphysik wohl bekannten Trevelyan-Instrumente oder Wackler Töne erzeugt.[1]) Ursprünglich war man in dem Wahne befangen, zur Hervorbringung dieser Töne seien ausschliesslich Metallplatten geeignet; Tyndall dagegen hat[2]) die Nichtigkeit dieser Beschränkung dargethan und z. B. Steinsalz als einen sehr leicht in Schwingungen geratenden Stoff aufgezeigt. Es wäre auch a priori nicht abzusehen, aus welchem Grunde eine Steinplatte nicht dieselben Dienste sollte leisten können. Nur insofern werden Töne dieser Art bei Materialien von anderer petrographischer Zusammensetzung minder leicht hervorzubringen sein, weil gerade der Granit durch seine Tendenz zur Zerklüftung sozusagen der Tonbildung vorarbeitet. Je labiler der Gleichgewichtszustand ist, in dem sich eine Gesteinsmasse befindet, so dass dieselbe leicht in eine oszillatorische Bewegung gerät, umso mehr ist, wie dies Roulins Erfahrung augenfällig zeigt, die Gelegenheit zur Hervorbringung der Trevelyan-Töne gegeben. Nicht völlig identisch, aber doch nahe verwandt sind die Felsentöne, die man nach Pechuel-Loesche (Zur Kenntnis des Herero-Landes, Ausland, 1886, S. 822 ff., S. 852, S. 890) in den Felseinöden Deutsch-Südwestafrikas vernehmen kann. Es ist eine Art Musik, wiewohl keine sehr harmonische; wie man sie etwa durch Blasen auf einem Kamme hervorbringt. Durch Abschuppung, Desquamation (Penck, Morphologie der Erdoberfläche, 1. Band, S. 204) haben sich dünne Gesteinsschalen losgelöst, die aber doch noch an einzelnen Punkten

[1]) Die Anfangsstadien unserer Einsicht in die wahre Natur des Wacklers, dessen Eigenschaften man anfänglich nicht in ihrer thatsächlichen Einfachheit erkannte, kennzeichnet Rosenberger (a. a. O., S. 271 ff.).

[2]) Tyndall, On the Vibration and Tones produced by the Contact of Bodies having different Temperatures, Philos. Magaz., (4) 8. Band (1854), S. 252 ff.

mit dem Mutterblocke zusammenhängen, und wenn nun der Wind diese Platten vibrieren lässt, dringen merkwürdige Töne in das Ohr des erstaunten Reisenden. Reine Reibungstöne erscheinen dagegen in einem anderen Falle. Die durch Erosion oft unglaublich zerklüfteten Lateritgebilde Westafrikas (Pechuel-Loesche, Loango-Expedition, 3. Band, I, S. 39; Kongoland, Jena 1887, S. 333) geben dem durch sie hindurchstreichenden Winde Gelegenheit, die mannigfaltigsten Klangerscheinungen, sogar heftigen Lärm, zu erzeugen, so dass die Neger des Glaubens leben, ein unterirdisch verborgenes Riesentier verrate auf solche Weise seine Anwesenheit. Die Zerrissenheit des in Obelisken, Pyramiden, Türme mit eingestreuten Mulden und Zinken aufgelösten, mürben Gesteines begünstigt in seltenem Masse die akustischen Wirkungen der Luftreibung.

Der dröhnende Berg der chilenischen Kordilleren, von welchem Ch. Darwin, der diesen „Bramidor“ (Brüller) nicht selbst gesehen hat, auf Hörensagen hin berichtet,[1]) gehört, worauf wir gleich anfangs hinwiesen, aller Wahrscheinlichkeit nach nicht in diese Kategorie. Ganz klar geht ja aus den wenigen Worten nicht hervor, ob der rollende Sand, der nach Angabe der Chilenen dortselbst beobachtet wird, die Ursache der Tonbildung oder nur eine zufällige Begleiterscheinung ist. Lediglich um der Vollständigkeit willen musste aber auch dieser „singende“ Berg berücksichtigt werden.

III. Abrupte Knalle.

Der Ton im Gegensatze zum blossen Geräusche bildete das charakteristische Erkennungszeichen für diejenigen akustisch-geographischen Erscheinungen, die in unserer zweiten Abteilung abgehandelt wurden, wogegen der ersten gewisse, ihrer Ent-

---

[1]) Ch. Darwins Reise-Tagebuch, herausgegeben von A. Kirchhoff, Halle a. d. S. 1893, S. 380. Der im Thale von Copiapó gelegene Berg gehört anscheinend weit mehr dem von früher (S. 26 ff.) bekannten Typus Djebel Nakus als demjenigen der Laxas de Musica an, zu dem man ihn hat stellen wollen.

stehung nach bekannte Geräusche zugewiesen waren, die sich unter günstigen Umständen und unter Mitwirkung von Resonanz zu Tönen ausbilden konnten. Von diesen letzteren wird nunmehr gänzlich abgesehen. Einziges Objekt der Betrachtung sind jene dumpfen, meist kurz dauernden Knalle, welche vielfach für fernen Geschützdonner gehalten werden und in einzelnen Fällen wohl auch diesen Ursprung haben, die aber viel zu häufig vorkommen und auch eine viel zu grosse geographische Verbreitung haben, als dass man dieselben so leicht einer einzigen, stets ausreichenden Erklärungsweise zu subsumieren vermöchte. Schon die ungemein grosse Abwechslung in der Benennung dieser Lufterschütterungen spricht dafür, dass wirklich ein recht vielgestaltiges Phaenomen der Aufhellung wartet. Bezüglich der Nomenklatur kann man sich zunächst an den schon eingangs als wichtige Quelle der Belehrung angeführten Aufsatz von L. Weber[1]) und an die kürzere Skizze von Sieger[2]) halten. Die niederdeutsche Bezeichnung Mistpoeffer, die darauf hindeutet, dass die Detonationen zumeist bei nebligem Wetter (mist englisch und holländisch = Nebel) gehört werden, hat auch in unsere wissenschaftliche Sprache Eingang gefunden; die beste Uebertragung in das Hochdeutsche würde also Nebelknalle sein. Auch als Nebelrülpse und Luftpuffe werden dieselben gelegentlich bezeichnet. Die Flamänder verlegen den Sitz der Gleichgewichtstörung, die sich in ihrem Lande besonders häufig bemerklich macht, auf das Meer und sprechen von „Zeepoeffers," französisch „Rots de mer." Wieder in anderen Ländern ist vom Seeschiessen die Rede, und in der Schweiz gibt es eine Menge Lokalausdrücke, über welche die sehr fleissig gearbeitete, diesem Teile einer „akustischen Folklore" umsichtig Rechnung tragende Studie des Grafen

---

[1]) Leonh. Weber, Ueber die sogenannten Mistpoeffers, Schriften d. Naturwissensch. Ver. f. Schleswig-Holstein, 11. Band, S. 66 ff. Vgl. oben S. 19.

[2]) Sieger, Seeschiessen, Wasserschüsse, Nebelrülpse, Luftpuffe, Globus, 71. Band, S. 333 ff.

Zeppelin[1]) Auskunft erteilt. So kennt man im Kanton Freiburg ein Murtener Schiessen; im Kanton Luzern, wo sich das gleichnamige Dorf befindet, ein Rothenburger Schiessen. Neuerdings endlich sind wir mit den bengalischen Barisal Guns („Kanonen von Barisal") und, durch Cancani,[2]) mit der Marina Mittelitaliens bekannt gemacht worden, die sich besonders in der Provinz Umbrien hören lässt. So weit aber auch die Orte, von denen uns einschlägige Nachrichten zugingen, aus einander entfernt liegen — und durch die dankenswerten Zusammenstellungen von van den Broeck[3]) und Penck[4]) ist unsere Kenntnis in dieser Hinsicht noch beträchtlich vermehrt worden —, so steht doch soviel fest, dass allenthalben die Art und Weise, wie sich die Knallgeräusche dem Hörer vernehmlich machen,[5]) eine wesentlich übereinstimmende ist. Damit soll jedoch nicht entfernt gesagt sein, dass nun auch rückwärts von gleichen Wirkungen auf eine konstante, unveränderliche Ursache geschlossen werden darf.

Ob man mit van den Broeck und Lancaster die Kenntnis der Nebelknalle bereits auf den englischen Philosophen und

---

[1]) Graf E. Zeppelin, Zum sogenannten „Seeschiessen", Schriften d. Ver. f. Gesch. d. Boden-Sees u. seiner Umgebung, 25. Heft, Lindau i. B. 1896, S. 30 ff.

[2]) Cancani, Barisal Guns, Mistpoeffers, Marina, Bollettino della Società Sismologica Italiana, 3. Band (1897), S. 222 ff.

[3]) van den Broeck, Un phénomène mystérieux de la physique du globe, Ciel et Terre, 1895, S. 447 ff.; 1896, S. 110 ff. Von der Abhandlung ist auch, unter gleichem Titel, eine separate Buchausgabe (Brüssel 1896) erschienen.

[4]) Penck, Ein mysteriöses Phaenomen der Geophysik, Meteorolog. Zeitschr., 14. Band (1897), S. 143 ff.; 16. Band (1899), S. 227 ff. Nach van den Broeck gearbeitet, aber eine Menge neuer Thatsachen beibringend. — Andere deutsche Bearbeitungen der Monographie des belgischen Gelehrten sind die folgenden: Samter, Ein akustisches Phaenomen, Himmel und Erde, 9. Band (1897), S. 380 ff.; Mistpoeffers, Ann. d. Hydrographie u. marit. Meteorologie, 25. Jahrgang (1897), S. 160 ff.

[5]) Einzelne Berichterstatter haben van den Broeck versichert, dass mit dem Gehöreindrucke eine merkbare Erschütterung des ganzen Körpers hand in hand gegangen sei; das scheint jedoch eine seltene Ausnahme zu sein.

Naturforscher Lord Francis of Verulam zurückführen darf, lassen wir dahingestellt.[1]) Die Volksmeteorologie legte sich, den von unseren Gewährsmännern gegebenen Proben gemäss, dumpfe Laute in der Luft verschieden zurecht; in Frankreich sollten sie gutes Wetter, in England, wie der Dichter Parnell[2]) verkündet, sollten sie Regen anzeigen. Auf einen festeren Boden gelangen wir erst im XVIII. Jahrhundert, und zwar war es der später berühmt gewordene Geologe O. Fraas, der vor fünfzig Jahren die Naturforscher aufforderte,[3]) sich mit einer bisher wenig beachteten Erscheinung zu beschäftigen, die in einem speziellen Falle auch der bekannte Alpinist Hugi[4]) bemerkt und in seinem gewohnten, etwas phantastischen Stile zu erklären versucht hatte.[5]) Fraas teilt mit, dass im Oktober

---

[1]) Bacons oft äusserst konfuse Ansichten über den Schall (Sylva Sylvarum or a Natural Historie, ed. Rawley, London 1631, Century II und III) lassen selten erkennen, ob seine Behauptungen einen thatsächlichen Befund zur Grundlage haben. Einigermassen könnte noch von geschichtlicher Bedeutung sein ein Passus in der Aufzählung der verschiedenen Witterungsvorzeichen. Dort heisst es nämlich (Historia naturalis et experimentalis de ventis, Leiden 1638, S. 150): „Sonitus a montibus nemorumque murmur increbrescens, atque fragor etiam nonnullus (sic!) in campestribus, ventos portendit. Coeli quoque murmur prodigiosum, absque tonitru, ad ventos maxime spectat." Dieser „donnerlose, murmelnde Laut," der kein Donner ist, kann vielleicht als Mistpoeffer gelten.

[2]) Thom. Parnell, Poetical Works, ed. Pope, London s. a. (Nach van den Broeck).

[3]) O. Fraas, Detonationen in den höheren Luftschichten, Jahreshefte d. Ver. f. vaterländ. Naturkunde in Württemberg, 6. Jahrgang (1850), S. 127 ff.

[4]) Hugi, Naturhistorische Alpenreise, Solothurn 1830, S. 58 ff. Die Wahrnehmungen des um die Gletscherkunde verdienten, gewagten Spekulationen aber im Geiste der noch teilweise herrschenden Naturphilosophie über Gebühr hingegebenen Mannes bezogen sich auf das vereiste Rotthal in der Jungfraugruppe, dem der Volksmund ohnehin allerlei Abenteuerliches nachsagt (vgl. v. Berlepsch, Die Alpen, in Natur- und Lebensbildern dargestellt, Jena 1885, S. 152 ff.).

[5]) Er war geneigt, einen ohne optische Begleiterscheinungen sich vollziehenden, langsamen Ausgleich der beiden entgegengesetzten Elek-

und November 1847 Landleute in der Gegend von Balingen (südwestl. Württemberg) entfernten Donner bei heiterem Himmel gehört und mit dem damals gerade entbrannten Sonderbundskriege in der Schweiz in Verbindung gebracht hatten, was sich aber bald schon der Zeit halber als unstichhaltig herausstellte.[1]) Bald darauf, zu Anfang des Jahres 1848, hörte Fraas selbst die fernen Donnerlaute im tiefsten Frieden. Schöne Frühlings- und Herbsttage schienen ihm das Phaenomen besonders zu begünstigen, während Witterungsumschlag wirkungslos verblieb. Alle zwei bis fünf Minuten liess sich, wenn man auf freier Höhe stand, ein dumpfer Schlag vernehmen, dessen Richtung kaum angebbar war. Es ist ein eigenartiges Zusammentreffen, dass, wie wir vom Grafen Zeppelin erfahren, im gleichen Jahre 1850, welches die Notiz von Fraas brachte, auch der bekannte Erforscher der deutschen Heldensage, Baron Lassberg in Meersburg am Boden-See, seine schon längere Zeit gemachten Beobachtungen einer Anzahl befreundeter Gelehrten aus Schwaben vorlegte, ohne dass allerdings zunächst weitere Kreise hievon erfuhren.

Nachdem wir so eine kurze Geschichte der Studien über Nebelknalle gegeben haben, tritt als nächste Anforderung die an uns heran, die nachgewiesene geographische Verbreitung der Luftgeräusche näher kennen zu lernen. Die Fragebogen, welche van den Broeck in sehr zweckmässiger Anordnung verschickte, und der Sprechsaal, den die Redaktion der englischen „Nature“ in dieser Zeitschrift für einschlägige Mitteilungen einrichtete, haben es bewirkt, dass ein recht stattliches Material zusammenkam. Zunächst ist Flandern und überhaupt das flache Belgien, bis hinein in die Provinz Luxemburg, als ein Schauplatz der Mistpoeffers zu nennen. Aus dem

---

trizitäten in der Atmosphäre, also eine Art Donner, zur Erklärungsbasis zu nehmen.

[1]) Vom Grafen Zeppelin wird auch berichtet, dass die an Kanonenschüsse erinnernden Nebelknalle das im Kanton Aargau kantonnierende eidgenössische Heer in Verwirrung gebracht habe, bis dann Eingeborene über den Sachverhalt aufklärten.

nördlichen Deutschland und aus Skandinavien fehlen genauere Berichte;[1]) dagegen mangelt es an solchen gar nicht aus Südwestdeutschland und Oesterreich. Penck, der sich (s. o.) namentlich auf die Erfahrungen von A. E. Forster beruft, führt das Illergebiet, die obere Donau, das Wettersteingebirge, das Gebiet des Boden-Sees im weitesten Umfange, Mähren, wo es einen „Donnerberg" geben soll, die Senke von Laibach mit ihrem „Grimberg" und Dalmatien als Oertlichkeiten an, in deren Bereiche sich gelegentlich die dumpfen Knallaute vernehmen lassen. In Grossbritannien gilt Perthsire, in Italien erwähntermassen Umbrien als das Land der Nebelschüsse. Auch in Amerika sind dieselben keineswegs unerhört: unter denen, welche van den Broecks Anfragen beantworteten, befand sich auch der Oberstleutnant Donneux, der den Staat Colorado, sowie Mexiko und Zentralamerika überhaupt als Heimstätten unserer Erscheinung namhaft macht, und C. Sapper, zweifellos der beste Kenner der Geographie von Guatemala, bezeugt bei Penck, dass in diesem Staate jedermann mit solchem fernen Donner bekannt sei. Endlich verlangen, wie gesagt, die nach dem im Gangesdelta gelegenen Orte Barisal zubenannten „Kanonenschläge" besondere Beachtung; dieselben erstrecken sich über ein weites Areal und werden sogar noch in Assam gehört. Korrespondenznachrichten aus verschiedenen Teilen der niederländischen Besitzungen in Hinterindien hat der Utrechter Geologe Wichmann eingeholt und in der „Natuurkundig Tijdskrift van Nederlandsch-Indie" (1890—1893) zur

---

[1]) Allerdings gehören zu den mancherlei Rätseln, welche der grosse Wettern-See in Schweden der physikalischen Geographie zu raten aufgibt, auch gewisse dort auftretende Schallerscheinungen. Allein aus Siegers sorgfältiger Darstellung (Seeschwankungen und Strandverschiebungen in Skandinavien, Zeitschr. d. Gesellsch. f. Erdkunde zu Berlin, 28. Band, S. 73 ff.) geht anscheinend hervor, dass die dortigen Schallgeräusche auf das engste mit Vorgängen, welche sich innerhalb des Seebeckens selbst vollziehen, zusammenhängen, so dass also wohl eine äusserliche Aehnlichkeit, nicht aber eine innere Verwandtschaft mit den Luftknallen bestehen würde.

Kenntnis gebracht. Aus Südamerika sind nur vereinzelte Meldungen, und zwar von seiten der deutschen Reisenden Meyen[1]) und v. Bibra,[2]) zu uns gedrungen. Der erstgenannte huldigte der Meinung, dass das von ihm angeblich gesehene, in Wirklichkeit aber wohl in das Reich der optischen Täuschungen zu verweisende „Nachleuchten erloschener Krater“ gewöhnlich von einem fernen Dröhnen begleitet sei. Der ruhige v. Bibra glaubt zwar die Lichterscheinung ebenfalls wahrgenommen zu haben, kann sich aber des dumpfen Donners, den sein Vorgänger gehört haben wollte. mit Bestimmtheit nicht entsinnen. Aus Afrika endlich stammt nur eine vereinzelte Mitteilung über unerklärliche Lufterschütterungen am Kongo. Von Professor Pechuel-Loesche wird uns allerdings mitgeteilt, dass er die bewussten Knalle, die ihm auch in den irischen Mooren und in den „Plains“ Nordamerikas aufgefallen waren, sehr schön am „Bulambembo-Point“ oberhalb der Kongomündung vernommen habe. Dieses Negerwort würde sich auch am besten mit „Echo“ verdeutschen lassen.

Der ziemlich zahlreichen positiven Nachrichten aus der Schweiz — Seeschüsse, Rotthaler Schiessen, Rothenburger Schiessen, Murtener Schiessen — war bereits im unmittelbaren Zusammenhange mit der geschichtlichen Entwicklung unseres Wissens von diesen Dingen zu gedenken. Auch Dalmatien wird (s. o.) unter den in betracht kommenden Ländern gelegentlich genannt. Wir behalten uns jedoch vor, am Schlusse dieses Abschnittes den dalmatinischen Vorkommnissen eine besondere Erörterung zu teil werden zu lassen, deren Resultat, wie wir glauben, darin besteht, dass jene ihrem ganzen Wesen nach von den Nebelknallen ganz und gar abweichen.

Man sieht, dass ein erheblicher Teil der Erdoberfläche als Ort der uns interessierenden Erscheinung in betracht zu kommen hat. Gerade aber der Umstand, dass ausgedehnte Areale, ja

---

[1]) Meyen, Reise um die Erde in den Jahren 1830. 1831 und 1832. 1. Band, Berlin 1835, S. 349 ff.

[2]) v. Bibra, Die Algodon-Bay in Bolivien, Wien 1852, S. 30.

sogar ganze Kontinente nichts verlauten lassen, spricht dafür, dass eine gemeinschaftliche Ursache, mit deren Aufdeckung das Problem endgiltig gelöst wäre, nicht vorhanden ist. Die grossen Schwierigkeiten liegen eben darin, dass eine wahre Unzahl von Hypothesen sich zusammengefunden hat, um deren Sammlung sich besonders van den Broeck sehr verdient machte.

Wir setzen, weil ein Gegenbeweis sich zur Zeit höchstens im Einzelfalle führen lässt, voraus, dass alle diese als Luftknalle bezeichneten Detonationen wenigstens äusserlich, wenn auch nicht ihrem eigentlichen Wesen nach, einen einheitlichen Charakter besitzen.[1]) Damit ist erwähntermassen noch keinerlei Gewähr für einheitliche Herkunft gegeben. Wie wenig auf Hypothesen, zu deren Begründung zufällige Wahrnehmungen eben nicht ausreichen, zu geben ist, bezeugt eine Uebersicht über die, welche bisher schon aufgestellt worden sind. Hallez und Moulan appellieren an die Gezeiten des Meeres, und zwar denkt sich der eine von beiden, dass das ansteigende Wasser in Höhlungen des Ufers hineingepresst werde, während der andere annimmt, die in den Uferböschungen befindliche Luft erleide eine Zusammendrückung und mache sich gewaltsam Bahn. Das blosse Brandungsgeräusche wollen De Brandner und der Italiener Agamemnone für die dumpfen Luftschläge verantwortlich machen.[2]) De Meuse hält dafür, dass vom Wasser

---

[1]) Sichergestellt ist dies ganz und gar nicht. So werden wir von Goodwin-Austen (The Barisal Guns and similar Sounds, Nature, 53. Band (1895), S. 247 ff.) belehrt, dass die Wasserschüsse, welche G. B. Scott im Indischen Ozean konstatierte, in ihrem abrupten Klange sich von den rasselnden, polternden Geräuschen von Barisal doch ganz erheblich unterschieden.

[2]) Für a priori verwerflich möchten wir diese Anschauung nicht halten. Prof. Wiechert hat in einem Vortrage, den er auf der internationalen Erdbebenkonferenz zu Strassburg i. E. hielt, bemerkt, dass bei genauem Studium der mikroseismischen Bodenbewegungen mancher von der nächsten Meeresküste ziemlich weit entfernter Stationen die Möglichkeit sich ergebe, eine Beeinflussung der Indikatoren durch die in regelmässigen, sich rasch wiederholenden Stössen sich bethätigende Aktion der Brandungswogen zuzulassen.

absorbierte Luft sich ersterem wieder entringe, und auch an Sanderuptionen auf dem Meeresboden hat man gedacht. Elektrische Entladungen innerhalb der Erdkruste ziehen Donneux und v. Pitteur-Hiegarts zur Erklärung heran. Begreiflicher ist die Vermutung, dass unvermeidliche Erdrutschungen sich auf grosse Entfernungen hin akustisch bethätigen könnten; zumal auch für die Barisal Guns liesse sich diese Annahme verwerten, gegen die allerdings von Schur eingewendet wird,[1]) die grosse Hörbarkeitssphäre wolle nicht recht zu einem rein örtlichen Ereignis passen. Ja sogar die Töne des Trommelfisches (Drum Fish), so meinen die Amerikaner Kain und Cleveland Abbe,[2]) möchten gelegentlich mit den Mistpoeffers, deren Ursprung freilich auch ein anderer sein könne, verwechselt worden sein.

Hielten sich diese meist nur kurz hingeworfenen Andeutungen an die feste Erde und ihre Wasserbedeckung, so fehlt es doch auch nicht an Deutungsversuchen atmosphärologischer Natur. Hugis Hinweis auf elektrische Ausgleichserscheinungen findet bei van den Broeck eine der Erkenntnis der Gegenwart besser angepasste Wiederbelebung. Während ferner Jonckheere sich damit begnügt, eine plötzliche Störung des längere Zeit herrschend gewesenen labilen Gleichgewichtes der Luftschichten als Grund anzusprechen, wollen Cobbaert und van Overloop den Hergang schärfer praezisieren, indem sie der Einwirkung der Sonnenstrahlen auf Nebelmassen die Fähigkeit zuschreiben, Töne zu erzeugen. Wie aber geschähe dies? Die Meteorologie kennt kein Analogon; die Physik gibt keinen Anhaltspunkt, der Töne oder auch blos diffuse Lufterschütterungen dieser Art verständlich zu machen im-

---

[1]) H. S. Schur, Barisal Guns, Nature, 61. Band (1899), S. 60.

[2]) U. S. Monthly Weather Review, 1898. Uebrigens hält Cleveland Abbe es auch nicht für unwahrscheinlich, dass das Wasser uns mitunter die mit Seebeben verbundenen seismischen Geräusche zuträgt; „genuine earthquakes occuring at the bottom of the neighbouring ocean" vermöchten auch derartige Knalle auszulösen.

stande wäre. Tiefer eindringend, sucht sich Lieckfeldt[1]) eine Vorstellung von dem Akte des Verdampfens der Wasserkügelchen zu machen, welche in der Luft schweben und, solange ihr Durchmesser eine gewisse Grösse nicht überschreitet, in ihrer Gesamtheit als Nebel oder Wolken erscheinen. Die nachstehende These soll den Schlüssel des Geheimnisses enthalten: „Bei der Verdunstung der Nebelbläschen[2]) tritt, ebenso wie beim Sieden festgestellt ist, unter gewissen günstigen Umständen die Erscheinung des Siedeverzuges ein — höchst wahrscheinlich auch umgekehrt beim Beginn der Nebelbildung eine Hintanhaltung des Niederschlagens.“ Wenn, so wird argumentiert, die kleinen Wassertropfen eine Temperatur angenommen haben, bei der sie längst schon ganz aufgelöst sein sollten, so tritt ein Moment ein, der mit jähem Explosionsrucke die Ueberführung in den gasförmigen Aggregatzustand herbeiführt. Nun ist zuvörderst zu bemerken, dass der Vergleich mit der als Siedeverzug angeführten Erscheinung nicht recht stimmt: letztere beruht ja darauf, dass der Flüssigkeitstropfen, dem Leidenfrost'schen Versuche entsprechend, in den sogenannten sphaeroidalen Zustand übergeht, der dann allerdings ein plötzliches Ende erreicht. Sollte es ein Analogon dieses Zustandes geben, wenn nicht vom abrupten Sieden, sondern lediglich vom langsamen Verdampfen die Rede ist? So achtbar das Streben auch ist, ein Motiv für explosive Vorgänge in der Luft bei deren gewöhnlicher Zusammensetzung nachzuweisen, so müssen wir doch an der Berechtigung eines derartigen Verallgemeinerns physikalischer Wahrheiten unsere Zweifel äussern. Und vor allem: Könnte ein solches Aufkochen der Wasserkörperchen ein beschränktes, regionales Vorkommnis bleiben, müsste man nicht überall

[1]) Lieckfeldt, Versuch zur Erklärung der Mistpoeffers, Seeschiessen u. s. w., Ann. d. Hydrogr. u. marit. Meteorologie, 25. Jahrgang (1897), S. 308 ff.

[2]) Dass die kleinsten Bestandteile einer Wolke nicht, wie Clausius wollte, hohle Bläschen, sondern massive Wasserkörperchen sind, wird heute allgemein zugestanden.

auf der Erde dann und wann ähnliche Folgen einer verzögerten Verdunstung erwarten? Die freie Atmosphäre kann kaum der Ort sein, der den Luftknallen, wenn dieser Ausdruck gestattet ist, zum Leben verhilft.

L. Weber, dem in der Hauptsache auch Sieger beipflichtet, glaubt dreierlei Möglichkeiten des Entstehens der Nebelschüsse auseinanderhalten zu sollen. Bewirken anormale Leitungs-, Resonanz- oder Brechungsverhältnisse eine ungewöhnliche Verbreitung gewisser, wie immer entstandener Detonationen? Gibt es natürliche Anlässe der Lufterschütterung, die sich unserem Gehörorgane in der angegebenen Weise bemerklich machen? Kann ein Mistpoeffer vielleicht als Kombinationston aufgefasst werden, wie er sich z. B. im tönenden Echo ausspricht? Letzteres dürfte unbedingt zuzugeben sein; Oppels und v. Fischers Reflexionstöne (s. o.), sowie ein von L. Weber selbst angegebenes, einfaches Experiment[2]) liefern die unzweideutigen Belege dafür. Dass die erste und zweite Weber'sche Frage zusammengehören, liegt ebenfalls am Tage. Wenn wir also davon abstand nehmen, dass doch wohl gar mancher scheinbar geheimnisvolle Knall auf menschliche Initiative hindeutet,[2]) so müssen wir die Fragestellung noch etwas

---

[1]) L. Weber, Mitteilung über einen die Mistpoeffers betreffenden Versuch. Schr. d. Naturw. Ver. f. Schleswig-Holstein, 11. Band, 2. Heft.

[2]) Dass es denkbar sei, ferner Kanonendonner sei hin und wieder doch auch die Ursache des bewussten Krachens, ist wiederholt bemerkt worden; so von Jottrand, Hallez, De Skryvere, De Pauw, van Ertborn. Penck und der Verf. (Handb. d. Geophysik, 2. Band, S. 43) nehmen für die Fläche, auf der die bayerischen Artillerieschiessübungen (Lechfeld) gehört werden, einen bedeutenden Teil der schwäbisch-bayerischen Hochebene in anspruch. Mit Eifer hat sich der Frage angenommen der britische Erdbebenforscher Davison (The Distance to which the Firing of Heavy Guns is heard, Nature, 62. Band (1900), S. 377 ff.). Seine Erfahrungen stützen sich auf die Schiessversuche der englischen und französischen Marineartillerie zu Spithead (1897) und Cherbourg (1900). Die weiteste Entfernung, bis zu welcher sich in diesen beiden Fällen der Schall fortgepflanzt hatte, betrug 136 Miles (rund 207 km). Aber

bestimmter fassen, indem wir die folgende Form wählen: Gehören die unter so verschiedenen Namen bekannten Gehörerscheinungen der Atmo-, Hydro- oder Lithosphäre der Erde an? Wenn wir über dieses Grundpostulat Klarheit erhalten, so sind wir auch der Lösung der Aufgabe, die Entstehungsursache zu ermitteln, um ein gutes Stück näher gekommen.

Welche Umwandlungen in der Luft oder im Wasser vor sich gehen könnten, um bei heiterem Himmel und bei ruhiger See Schallphaenomene von immerhin nicht ganz unbeträchtlicher Intensität auszulösen, das entzieht sich so völlig unserer Kenntnis, dass wir ein gutes Recht haben, auf die Herbeiziehung von Hypothesen, die nur ad hoc ersonnen worden sind und nur sehr locker im Boden der Wissenschaft wurzeln, Verzicht zu leisten. Man kann nicht sagen, eine unserem Kausalbedürfnis wirklich genügende Herleitung der Mistpoeffers aus bekannten Gesetzen der Lehre von den tropfbaren und elastischen Flüssigkeiten sei einfürallemal unmöglich; wohl aber darf man behaupten, dass vorläufig auf eine in diesem Sinne gehaltene Erklärung keine grosse Hoffnung zu setzen ist. Dann jedoch besteht eine um so entschiedenere Pflicht, alle denkbaren Fälle, die sich für eine Rückführung unserer Knall-

---

auch sonst weiss die Kriegsgeschichte von grossen Distanzen zu berichten, sogar von 200 Miles (rund 305 km). Bei so weitem Abstande von der Schallquelle kann das Ohr nichts als nur einen ganz unbestimmten Eindruck empfangen. Pechuel-Loesche warnt, auf reichliche eigene Erfahrung gestützt, davor, den dröhnenden Schlag entfernten Geschützfeuers mit dem eigentlichen Mistpoeffers zu verwechseln. Am 4. Juni 1901 z. B. vernahm dieser Geograph in seinem Wohnorte Erlangen am Morgen charakteristische Luftknalle, aber durch sofort an Ort und Stelle eingezogene Erkundigungen ergab sich, dass gerade um diese Zeit die bayerische Feldartillerie auf dem um mehr denn 80 km von Erlangen entfernten Schiessplatze von Hammelburg (Unterfranken) Gefechtsübungen abgehalten hatte. Auch Minensprengungen können als Mistpoeffer wirken, und zwar umso eher, als ja die Explosion gar nicht an der freien Luft stattfindet. Forel hat (Graf Zeppelin, a. a. O., S. 45 ff.) dumpfe Töne, die er vernahm, so lange nicht zu deuten gewusst, bis er erfuhr, dass in den Steinbrüchen von Meillerie mit Sprengpulver gearbeitet wurde.

erscheinungen auf endogene, dem Bereiche der Erdrinde — oder auch allenfalls des Erdinneren — angehörige Prozesse zu eignen scheinen, in ernste Erwägung zu ziehen. Und damit ist denn auch in neuester Zeit ein viel versprechender Anfang gemacht worden.

Die Herstellung einer Verbindung zwischen Nebelknallen und Erdbebengeräuschen liegt nahe genug. Die letzteren bilden in den seismologischen Schriften ein stehendes Kapitel, so dass es hier bei wenigen Verweisungen sein Bewenden haben kann. Hoernes hat die darauf bezüglichen Nachrichten vereinigt und besprochen;[1]) es erhellt, dass die beiden Gruppen von Erscheinungen nicht notwendig zusammengehören, dass es Erdstösse ohne Detonationen und unterirdische Geräusche ohne begleitende Erderschütterung gibt, dass aber ein wahrscheinlicher Zusammenhang immerhin anzunehmen ist. So nennt auch Boussingault[2]) zwar den dem Stosse folgenden Schall eine „Erscheinung für sich“, aber doch eine solche, deren Eintreten ohne die vorhergehende mechanische Auslösungsursache nicht zu erwarten wäre.[3]) Die akustische Analyse der seismischen Begleitphänomene lässt noch zu wünschen übrig, und es sind dieselben offenbar auch in vielen Einzelfällen so überaus vielgestaltig, dass die Beschreibung nur schwer die richtigen Worte findet.[4]) Dumpfes Rollen und Brausen

---

[1]) R. Hoernes, Erdbebenkunde, Leipzig 1893, S. 74 ff. Vgl. auch v. Seebach, Das mitteldeutsche Erdbeben vom 6. März 1872; ein Beitrag zur Lehre vom Erdinneren, Leipzig 1873, S. 110 ff.

[2]) Boussingault, Sur les détonations constatées pendant les tremblements de terre, Compt. rend. de l'acad. franç., 93. Band (1881), S. 105 ff.

[3]) Verbreitet haben sich hierüber auch zwei englische Gelehrte in einer Erdbeben-Monographie (Meldola-White, East Anglian Earthquake of 1884, London 1885, S. 55 ff.).

[4]) Auf den Santorin-Inseln, wo natürlich die Erdbeben das rein vulkanische Gepräge tragen, hatte Jul. Schmidt Gelegenheit, sich mit dem unterirdischen Dröhnen vertraut zu machen. Er unterscheidet: „Brausen, Heulen, Orgelton, Pfeifen, Rollen, Donner, Lärm, Gurgeln, Brüllen“ (Vulkanstudien bei Santorin, Gaea, 18. Jahrgang (1882), S. 645).

scheint die Regel zu sein: mitunter wird aber auch nur ein einziger, heftiger Knall verzeichnet.[1]) Die sorgfältigsten neueren Untersuchungen hierüber haben uns Milne[2]) und Davison[3]) geliefert, und zumal die Vergleichungen, welche der zweitgenannte hinsichtlich des Verhältnisses der Verbreitung von Schall und mechanischer Wirkung angestellt hat, dürften sehr geeignet sein, auch auf die dunkle Sache, die uns beschäftigt, einiges Licht zu werfen. Vor allem wird dargethan,[4]) dass Hörraum und Beschädigungsraum sich durchaus nicht zu decken brauchen, dass es Gegenden gibt, innerhalb deren das Erdbeben starke Zerstörungen ausübt, ohne das Gehörorgan zu beeinflussen. Ueber diejenigen subterranen Geräusche, welche sich ab und zu in furchtbarer Heftigkeit vernehmen lassen, ohne dass auch nur eine stärkere Erzitterung des Bodens parallel ginge, waren schon früher Nachforschungen angestellt worden.[5]) Es liegt mithin nahe genug, zu vermuten, dass die

---

[1]) Ein recht charakteristisches Vorkommnis dieser Art führt v. Radics an (Historische Erdbebennotizen aus Krain und den Nachbarländern, Erdbebenwarte, 1. Jahrgang, S. 17).

[2]) J. Milne, Note on the Sound Phenomena of the Earthquakes, Transact. of the Japan Seismological Society, 12. Band, S. 53 ff.

[3]) Davison, On the Nature and Origine of Earthquake-Sounds, Geolog. Mag., (3) 9. Band (1892), S. 208 ff.

[4]) Meldola-Davison, Curious Aerial or Subterranean Sounds, Nature, 53. Band (1895), S. 4. „In great earthquakes, the Sound Area is confined to the neighbourhood of the epicentre; in moderate and slight shoks the Sound Area and disturbed area approximately coincide, or the Sound-Area may even overlap the disturbed area. In the limiting case, the disturbed area vanishes, and the vibrations are perceptible only as sound."

[5]) Detaillierte Mitteilungen über unterirdisches Rollen sind uns durch A. v. Humboldt im ersten Bande des „Kosmos" (Neue Ausgabe der Werke, 1. Band, S. 148 ff.), durch Perrey (Mémoire sur les tremblements de terre ressentis en France, en Belgique et en Hollande depuis le 4me siècle jusqu'à 1843, Brüssel 1845) und durch Daubrée (Les régions invisibles de la terre, Paris 1888, S. 121 ff.) zugekommen. Ersterer schildert als den ausgezeichnetsten Fall dieser besonders unheimlichen Erscheinung die „bramidos y truenos subterraneos" in der mexikanischen Stadt Guanoxuato, die mehrere Wochen lang anhielten, ohne dass sich

Luftknalle intrakrustalen Ursprunges sind, dass sie gewissermassen als Signale für embryonale, nicht zu energischerer Ausbildung gelangte Erdbeben zu gelten haben. Ganz mit Recht erinnert Penck (a. a. O.) daran, dass der nächst Belgien meist beteiligte Bezirk, Nordschweiz und Bodensee-Territorium, zu jenen jung-geologischen Gebieten zählen, die noch keineswegs zur vollständigen tektonischen Ruhe gekommen sind.

In diesem Sinne haben sich von van den Broecks Gewährsmännern Flamache und Delvaux ausgesprochen; auch La Touche wendet diese Erklärung speziell auf die Barisal Guns an. Zwar ist, wie der gleichfalls der geodynamischen Auffassung zugeneigte Darwin anführt,[1] auch daran gedacht worden, dass das magmatische Erdinnere an die umgebende starre Hülle anschlage, allein mit den sich stetig mehr die Bahn brechenden modernen Vorstellungen[2] von der inneren Beschaffenheit der Erde lässt sich dieser Rückfall in die Ideenkreise von Perrey und Falb nicht mehr vereinbaren. Wohl aber steht, mag man nun über die Gebirgsbildung welche Meinung immer hegen, die Thatsache fest, dass der Erdball einer fortschreitenden Volumverminderung durch Wärmeabgabe und Erkaltung ausgesetzt ist. Ist dem so, dann müssen tektonische Veränderungen eintreten, die zwar ungemein glatt und geräuschlos verlaufen, die andererseits auch entsetzliche Verheerungen anrichten können, während

---

die Erde im übrigen hätte in ihrer Ruhe stören lassen. Des grollenden Donners unter den Füssen gedenkt auch v. Bibra (Ueber Chile, Sitzungsberichte d. Akad. zu Wien, Math.-Naturw. Kl., 10. Band (1853), S. 717 ff.).

[1] G. H. Darwin, „Barisal Guns“ and „Mistpoeffers“, Nature, 52. Band (1895), S. 650.

[2] Die Ueberzeugung, dass die Erde alle möglichen Aggregatzustände der Materie, und zwar in lückenloser Aufeinanderfolge, in sich schliesst, hat sich neuerdings, wie die von den verschiedensten Ausgangspunkten ausgehenden Veröffentlichungen von Penck, Reyer, Woldřich, Svante Arrhenius u. a. beweisen, ein hohes Mass von Anerkennung erworben, und es wird kaum mehr statthaft sein, zwischen zwei intratellurischen Aggregatzuständen — starrer Kruste und feurigflüssigem Magma — eine distinkte Grenzfläche vorauszusetzen.

vielleicht noch häufiger nur leise Bodenschwankungen und unbestimmte Lufterschütterungen davon Kunde geben, dass sich für einige Zeit ein neuer Gleichgewichtszustand im Gezimmer der Erde herausgebildet hat. Es wäre eine zu enge Fassung, wollte man mit Meldola und Davison (s. o.) die Luftknalle als Konsequenzen des nie ganz rastenden Faltungsprozesses in der Erdrinde definieren; ausser den durch Lateralschub bewirkten intrakrustalen Umsetzungen gibt es doch auch noch andere, und kleine Verwerfungen mögen sich sogar noch häufiger als Fältelungen ereignen. Issels Bearbeitung des umbrischen Erdbebens vom 18. Dezember 1897 wirft für diese Annahme ebenfalls ihr Gewicht in die Wagschale,[1]) und nicht minder wollen die Wahrnehmungen, welche Delprat[2]) aus Java bekanntgegeben hat, in diesem Geiste interpretiert sein. Beim Graben eines Tunnels wird der Gleichgewichtszustand eines kleinen Teiles der Erdrinde, eben des in angriff genommenen Gebirges, künstlich verändert, und die Reaktion des Felsgesteines wird in Bewegungen der festen Stoffe und durch deren Uebertragung in Luftbewegungen umgesetzt.

Neben den tektonischen Einwirkungen dürfen wir aber auch die explosiven[3]) nicht ausser acht lassen, welche von Schlagwettern („grisou“) in unterirdischen Hohlräumen herrühren und natürlich nicht nur an die von Menschen angelegten Bergwerke gebunden sind, wenn sie gleich nur durch ihr Auftreten in solchen zu unserer unmittelbaren Kenntnis

[1]) Barisal Guns, Nature, 61. Band (1899), S. 60.

[2]) Delprat, Remarkable Sounds, ebenda, 53. Band (1896), S. 510. Beim Bau eines Tunnels hatten sich dumpfe Töne vernehmen lassen, als ob sie aus dem Inneren des durchbohrten Berges kämen.

[3]) Jene explosiven Aktionen, die Gerland als Ursache mancher vermeintlichen Dislokationsbeben postuliert, sind hier nicht gemeint. Wir betrachten vielmehr für unsere Zwecke, im Einverständnis mit Gerland selbst (Die moderne seismische Forschung, Verhandl. des siebenten Internat. Geographenkongresses, 2. Teil, London-Berlin-Paris 1901, S. 152), die Erdbeben unter dem Gesichtspunkte der Einheitlichkeit, die sich, ganz unbeschadet der tiefer liegenden Entstehungsursache im Einzelfalle, in den akustischen Folgen zweifellos annehmen lässt.

gelangen. Hier war es wieder van den Broeck, der unseren Wissensstand übersichtlich zusammengefasst und für die Entstehung der Luftknalle eine neue Quelle eröffnet hat.[1]) Die Erforschung eines Naturereignisses, welches Menschenleben und Menschenwohlstand in so empfindlicher Weise schädigt, hat die k. belgische Akademie, die in einem an Kohlengruben reichen Lande auch dazu berufen war, veranlasst, eine „Section spéciale permanente d'études du grisou" ins Leben zu rufen, und diese hat auch schon der für uns wichtigen Frage manchen Vorschub geleistet. Die wertvollen Untersuchungen von Guibal, Forel, Laur, Chesneau u. a. über den Zusammenhang zwischen schlagenden Wettern und Luftdruckschwankungen[2]) berühren

---

[1]) van den Broeck, La météorologie endogène et le grisou, Lille 1898. Von weiteren einschlägigen Veröffentlichungen des um unser Problem sehr verdienten Belgiers, deren Inhalt wesentlich der Sammlung von Beweismitteln für die Hauptthese gewidmet ist, nennen wir die nachstehenden: Les mistpoeffers ou détonations mystérieuses de la Mer du Nord et des régions terrestres et maritimes circonvoisines, Brüssel 1896; Les manifestations grisouteuses et leur prévision, dans ses rapports avec la météorologie endogène et avec la météorologie atmosphérique, Lüttich 1898; Les prévisions grisouteuses, recherches préliminaires faites à l'ocasion des „avertissements" de M. Francis Laur, Brüssel 1899; La question des mistpoeffers, ebenda 1899; Question à l'ordre du jour: grisou et mistpoeffers, Lüttich 1901. Ferner gehören noch hierher als reichliche Materialiensammlung: Procès-verbaux des séances tenues en 1898 par la section permanente etc., Brüssel 1898. Einen teilweise abweichenden Standpunkt nimmt ein E. Harzé (Du grisou, Brüssel 1898).

[2]) Das aus den romanischen Ländern, die ja auch die meist betroffenen sind, stammende Material ist ausgiebig verarbeitet worden. Dagegen erfährt man nichts davon, dass auch die deutsche Fachlitteratur schwerwiegende Beiträge zur Beurteilung der Beziehungen darbietet, die zwischen exogener und endogener Meteorologie obwalten, wenn wir für den Augenblick die uns sonst wenig zusagende Nomenklatur De Rossis (Meteorologia endogena, Mailand 1879—1882) uns aneignen; es werden dadurch, wie noch mehr durch das auf dem gleichen Boden fussende Werk von Canu-Gérigny (Précis de météorologie endogène, Paris 1894) gar zu viele heterogene Gegenstände vermengt. Die Arbeiten von Hilt, J. Mayer, v. Friesenhof, besonders von E. Suess kommen so wenig zur Geltung, wie diejenigen der Engländer Harries und Latham. Vgl.

uns an dieser Stelle nicht näher; wir halten einfach daran fest, dass auch Minenkatastrophen selbst kleineren Umfanges Schallerscheinungen nach sich ziehen, die noch in grösserer Entfernung als vages Geräusch gehört werden. Die Bedingungen haben Guibal[1]) und van den Broeck näher zu bestimmen gesucht: der letztere namentlich auch in seiner Polemik[2]) gegen Harzé, welcher an der Realität der Mistpoeffers einige Zweifel verlautbart hatte. Demgemäss können wir jetzt die sogenannten Nebelknalle, die mit dem Nebel gar nichts und mit der Atmosphäre nur insofern zu thun haben, als diese die Fortleitung der ihr erteilten Impulse besorgt,[3]) in zwei Gruppen sondern.

Es gibt diffuse Knalle und Schuss-ähnliche Detonationen, die ausschliesslich geotektonischer Herkunft sind; es gibt auch andere, welche sich auf explosive Vorgänge in unterirdischen, von ausströmenden Gasen erfüllten Hohlräumen zurückführen lassen. Der Umstand, dass das Wasser, dass die Luft in ihrer rasch wech-

---

Günther, Der Einfluss von Luftdruckschwankungen auf die flüssigen und gasförmigen Bestandteile der Erdoberfläche, (Gerlands) Beiträge zur Geophysik, 2. Band (1895), S. 71 ff.

[1]) Guibal, Les explosions de grisou dans les huillières, Mons 1889.

[2]) van den Broeck, Reponse aux observations de M. E. Harzé faites au sujet du projet de programme d'études du grisou, Bull. de la Soc. Belge de Géologie, de Paléontologie et de l'Hydrologie, 2. août 1888.

[3]) A. a. O., S. 8. „Ces bruits naturels consistent vraisamblablement en la transformation en ondes sonores de vibrations d'origine terrestre . . .“ Die Frage, inwieweit die akustischen Begleiterscheinungen der intrakrustalen Umwälzungen in ihrer Verbreitung besonderen Regeln unterliegen, bedarf noch, wie wir gleich nachher, im Anschlusse an die Arbeiten von Knett sehen werden, besonderer Erörterung. Eine wertvolle Vorarbeit hiefür lieferte Rudzki (Ueber die scheinbare Geschwindigkeit der Verbreitung der Erdbeben, Beitr. z. Geophysik, 3. Band (1898), S. 519 ff.). Interessante Perspektiven für die Beurteilung des Zusammenhanges gewährt eine von Hecker (Ergebnisse der Messung von Bodenbewegungen, ebenda, 4. Band, S. 104) mitgeteilte Beobachtung von Omori, der damals in Potsdam weilte. Es heisst dort nämlich: „Beim Eintreffen der Schallwelle verstärkte sich die Bewegung momentan.“

selnden Zusammensetzung, dass endlich die verschiedenen Gesteins- und Erdarten, aus welchen sich die oberen Erdschichten zusammensetzen, die namhaftesten Verschiedenheiten in der Fähigkeit, den Schall fortzuleiten, aufweisen, bedingt es, dass im einen Falle die Erschütterung sich rascher, im anderen minder rasch fortpflanzt, dass die Klänge, je nach den Umständen, aus der Luft, aus dem Wasser, aus den Eingeweiden der Erde zu kommen scheinen. Verlegt man den Ort, an dem die den Schall erzeugenden Kräfte thätig sind, unter die Erdoberfläche, so sind alle die Verschiedenheiten aufgeklärt, welche sich in der Beschreibung der Empfindungen der einzelnen Beobachter vorfinden.

Die moderne Ausbildung der seismischen Apparate und Registrierungsmethoden setzt uns, was auch schon van den Broeck und sein Mitarbeiter E. Lagrange hervorheben, wahrscheinlich in den Stand, die vorstehend dargelegte Deutung der Nebelknalle empirisch zu prüfen. Dessen dürfen wir uns ja wohl versichert halten, dass die letzteren für gewöhnlich, Ausnahmen abgerechnet, von Erschütterungen des Bodens, die auch der gleichgiltige Beobachter zu verspüren befähigt wäre, nicht begleitet oder gefolgt sind. Dagegen wird man es nicht für unwahrscheinlich halten dürfen, dass zu jedem thatsächlich endogenen Geräusche eine etwas ausgesprochene mikroseismische Gleichgewichtsstörung gehört. Dieselben würden sich, wenn man erst in ihrer Erkennung eine gewisse Uebung gewonnen hätte, sowohl von den gewöhnlichen Tremors, wie sie Milne studiert hat, wie auch von den periodischen Pulsationen, die uns v. Rebeur-Paschwitz kennen lehrte, wohl unterscheiden lassen.[1] Wenn erst eine grössere Anzahl von Stationen mit exakt arbeitenden seismischen Wellenzeichnern, seien es nun Vertikalpendel nach Wiecherts oder Horizontalpendel nach Ehlerts Konstruktion, begründet sein

---

[1] Wir verweisen wegen dieser Oszillationen des Erdbodens auf eine frühere Darstellung (Günther, Handbuch der Geophysik, 1. Band, Stuttgart 1897, S. 495 ff., S. 271 ff.).

wird, dürfte sich auch eine tiefere Einsicht in die Zusammenhänge zwischen Dem, was oben in der Luft und Dem, was unter der Erde vorgeht, mit Zuversicht erhoffen lassen.[1])

Durch unsere Zustimmung zu der schon zum öfteren, noch niemals aber in der hier versuchten Bestimmtheit formulierten Hypothese, dass man die Entstehungsstelle der Nebelknalle unter der Erde zu suchen habe,[2]) hoffen wir der

---

[1]) Sehr dankenswerte Mitteilungen einschlägiger Natur verdanken wir in neuester Zeit den „Mitteilungen der Erdbebenkommission der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien.“ In Betracht kommen besonders die nachfolgenden drei Berichte: Nr. IX, Woldřich, Bericht über die unterirdische Detonation von Melnik in Böhmen am 8. April 1898; Nr. XX, Knett, Ueber die Beziehungen zwischen Erdbeben und Detonationen; Nr. XXI, Bericht über das Detonationsphänomen im Duppauer Gebirge am 14. August 1899. Knett schlägt vor, den Erdbebenschwärmen auch Detonationsschwärme zur Seite zu stellen, zu denen er auch die Schallerscheinungen in der Nähe der venetianischen Stadt Feltre rechnet (Haidinger, Das Schallphänomen des Monte Tomatico bei Feltre, Jahrb. d. k. k. Geol. Reichsanstalt, 1853, S. 559 ff.). Vor allem wichtig ist Knetts gelungener Nachweis, dass der Sitz der akustischen Vorkommnisse wirklich die Erdkruste selbst ist, und dass Schall und Beben wesentlich die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen. Natürlich wirken die verschiedenen Einflüsse zusammen, und auch bei den unterirdischen Knallen von Duppau (bei Karlsbad) hatte man es mit einem „Mischphänomen von vorwiegend akustischer Erregung“ zu thun. Knett hält für den Einzelfall die Wahl offen zwischen subterranen Einstürzen, die wir allerdings nur als Teilerscheinung von Dislokationen allgemeineren Charakters ansprechen möchten, und Druckausgleichen in Gasansammlungen (Explosionen); auch die Duppauer Bodenkrache könnten, da ringsum Säuerlinge der Erde entströmen, sehr wohl durch akute Gasentbindung veranlasst gewesen sein, wie denn nach Laube (Die geologischen Verhältnisse des Mineralwassergebietes von Giesshübel-Sauerbrunn, ebenda 1898) die vertikalen Ausweitungen („Schlöte“) der durch Auswitterung entstandenen „Zwerglöcher“ mit dem Ausbruche hochgespannter Gase in nahem Zusammenhange stehen dürften.

[2]) Eine scharfe Scheidung zwischen seismischen und vulkanischen Prozessen erschien überflüssig. Die letzteren bethätigen sich nach De Rossi auch mikrophonisch gerade wie Erdbebengeräusche (Eine interessante Anwendung des Mikrophons auf vulkanische Erscheinungen, Ausland, 1879, S. 179).

unsere Betrachtung leitenden hodegetischen Regel, dass es unzulässig sei, alle irgend verwandten Naturerscheinungen auf das Prokrustesbett einer allumfassenden Erklärung spannen zu wollen, nicht untreu geworden zu sein. Ohne allen Zweifel gibt es, vom Zuthun der Menschen wiederum abgesehen, natürliche Vorkommnisse genug, welche die uns bekannten akustischen Nachwirkungen einzuleiten vermögen. Lawinenstürze, Uferrutschungen, Bergschlipfe[1]) gehören hierher; überhaupt alle die morphologischen Umwälzungen, welche wir mit Penck[2]) als Massentransporte bezeichnen. Des ferneren sind Brandungsgeräusche als Ursachen gewiss nicht ausgeschlossen, und die Donnerlaute, welche an trüben Tagen gar nicht selten an das Ohr des Polarfahrers schlagen, gehen nach Pechuel-Loesche von der Bewegung der Eisflarden (s. o. S. 17) aus, die man durch den Nebel oft besonders deutlich hört (Günther, Handb. d. Geophysik, 2. Band, S. 41). Allein sehr gross werden wir uns das Wirkungsbereich derartiger Geschehnisse nicht vorzustellen haben, und die relative Allgemeingiltigkeit der oben gegebenen Erklärung wird durch jene nicht berührt. Wohl aber haben wir vorhin schon das sogenannte Phaenomen von Meleda als ein solches für eine Sonderuntersuchung aufgespart, welches seine eigentümlichen Kennzeichen bekunde und sich nicht ohneweiters den Mistpoeffers und Wasserschüssen einordnen lasse. Hiefür sind wir jetzt den Beweis anzutreten verpflichtet.

---

[1]) Wir besitzen von dem grauenvollen Bergrutsche von Goldau, einem der grössten, die sich in geschichtlichen Zeiten zugetragen, eine zeitgenössische, mit anerkennenswerter Objektivität geschriebene Monographie (Zay, Goldau und seine Gegend, wie sie war und was sie geworden, Zürich 1807). Aus ihr müssen wir folgern, dass zwar an Ort und Stelle die Steinlawine mit entsetzlichem Geprassel niederging, dass man aber schon in dem nur zwei Gehstunden entfernten Flecken Schwyz (a. a. O., S. 251) weder ein weitgreifendes Zittern des Bodens, noch auch mehr als „einen dumpfen Donnerton“ bemerkte. Und auf andere schweizerische Kantone erstreckte sich nicht einmal diese minimale Wirkung.

[1]) Penck, Morphologie der Erdoberfläche, 1. Band, Stuttgart 1894, S. 244 ff.

Meleda ist eine dalmatinische Küsteninsel, etwas nordwestlich von Ragusa gelegen. Hier erregten im März 1820 dumpf tosende Geräusche, die sowohl auf dem Lande wie auch auf der umgebenden See gehört wurden, eine kleine Panik unter den Einwohnern, und noch mehrere Jahre lang machte sich das Poltern, fernem Donner ähnlich, bemerkbar. Italienische und einheimische Gelehrte, Breislak,[1] Configliacchi,[2] Stulli[3]) widmeten der viel Aufsehen machenden Erscheinung besondere Abhandlungen, und die österreichische Regierung sandte in Riepl und Partsch Experte nach dem Eilande. Der von dem letzteren, einem geachteten Mineralogen und Meteoritenforscher, erstattete Bericht[4] lief darauf hinaus,

[1] Breislak, Sulle detonazioni dell' isola di Meleda, Mem. dell' Imp. Reg. Istituto del Regno Lombardo-Veneto, vol. IV, adunanza del 24 aprile 1823.

[2] Configliacchi, Sulle detonazioni dell' isola di Meleda, ebenda, Vol. IV, adunanza del 7 agosto 1823. An dieser Stelle nur Anzeige des gehaltenen Vortrages. Zugänglich sind heutzutage am meisten die Auszüge, welche von Breislaks, Bossis und Configliacchis Berichten auch in des letzteren Zeitschrift übergegangen sind (P. Configliacchi-G. Brugnatelli, Giornale di Fisica, Chimica, Storia Naturale, Medicina ed Arti, (2) 6. Band, S. 417 ff.). Die Arbeit dieses Physikers lässt erkennen, dass es doch häufig sich wohl empfiehlt, in geologischen Fragen auch das physikalische Element zur Geltung zu bringen. Er denkt sich die Felsinsel von mehreren Kanälen und Höhlen durchzogen, zu denen das Wasser des Meeres von unten her Zutritt habe. Steigt dasselbe an, so muss es die in den sonst leeren Räumen befindliche Luft zusammenpressen, und dieser bleibt nur übrig, sich irgendwie einen gewaltsamen Ausweg zu bahnen. Dass ein solcher nicht ohne Krachen und Erzittern des Felsgerüstes der Insel erfolgen kann, wird sich, falls man die Praemisse zugibt, nicht in abrede ziehen lassen. Configliacchis Note ist dem Anscheine nach ausserhalb ihres engeren Vaterlandes nur wenig bekannt geworden. Wir wüssten, ausser bei Partsch und Hoernes, nur noch eine einzige Zitierung derselben namhaft zu machen, nämlich in einem Aufsatze von Schroetter (Springbrunnen und unterirdischer Donner durch das Meer veranlasst, Steierm. Zeitschr., (2) 2. Jahrgang, S. 164 ff.).

[3] Stulli, Sulle detonazioni dell' isola di Meleda, Ragusa 1823.

[4] P. Partsch, Bericht über das Detonations-Phänomen auf der Insel Meleda bei Ragusa, Wien 1826.

dass — so würde man sich heute ausdrücken — Erdbebenschwärme die Schuld an diesen, von eigentlich seismischen Störungen nur ausnahmsweise begleiteten Detonationen trügen. Auch Hoernes ist[1]) auf das jedenfalls eigenartige Schallphaenomen näher eingegangen. Er analysiert die protokollarischen Feststellungen, die Partsch gemacht hat, näher, und wenn man das liest, so kann man sich allerdings nicht darüber wundern, dass viele Autoren die „kurz abgebrochenen", für gewöhnlich nicht rollenden Knalle einfach den Mistpoeffers angliederten. So erwähnt Partsch,[2]) dass in der Nacht vom 2. zum 3. November 1823 über hundert „einzelne Schüsse", wie aus einer Batterie groben Geschützes, gehört wurden, immer in Zeitabständen von je fünf Minuten. Der Kreis, in dessen Innerem die ihre Intensität nach aussen rasch verlierenden Knalle vernehmbar waren, hatte keinen grossen Durchmesser, und nennenswerte Beschädigungen von Gebäuden waren einzig in der — offenbar epizentralen — Ortschaft Babinopoglje nachzuweisen. Dass eine Erderschütterung mit im Spiele war, lag klar zu tage, und es fragt sich nur, wie wir uns, mit Rücksicht auf die konkreten Ortsverhältnisse, die seismischen Vorgänge zurechtzulegen haben.

Partsch, ganz im Banne der „heroischen" Geologie[3]) eines v. Buch und v. Humboldt stehend, geht von dem Grundsatze aus, dass Vulkane und Erdbeben nur verschiedene Aeusserungen ein und derselben Zustandsänderung im tieferen Erdinneren seien, und weist auch Breislaks Einsturzhypothese zurück, die, worin wir Hoernes Recht geben müssen,[4]) denn doch einen weit plausibleren Eindruck macht. Unseres Erachtens freilich kommt der Wahrheit am nächsten die „pneumatische" Theorie von Configliacchi, welcher seine Paduaner Kollegen Renier, Dal Negro, Melandri und Santini, sowie

---

[1]) Hoernes, a. a. O., S. 292 ff.

[2]) Partsch, a, a. O., S. 89 ff.

[3]) v. Zittel, Geschichte der Geologie und Palaeontologie bis Ende des neunzehnten Jahrhunderts, München-Leipzig 1899, S. 85 ff.

[4]) Hoernes, a. a. O., S. 74, S. 302 ff.

der Mailänder Astronom Cesaris und der dortige Physiker Bossi[1]) ihre Zustimmung gaben.[2]) Dieselbe hat eben den Vorzug, dass sie allein auf die Landesnatur Rücksicht nimmt. Meleda ist, wie die Gesamtheit der dem kroatischen Küstenlande und Dalmatien vorgelagerten Inseln, Karstland und nimmt somit an allen den Eigenschaften teil, welche für diese Gebirgsart als typisch anerkannt werden müssen.[3]) Für dem Meere benachbartes Karstgebirge ist nun aber auch die Thatsache charakteristisch, dass seine Gewässer vielfach mit dem Wasser der offenen See in Verbindung stehen, und die Existenz solcher unbezweifelter Kanalsysteme schliesst

---

[1]) Bossi, Sulle detonazioni dell' isola di Meleda, Mailand 1824.

[2]) Ohne von diesen Vorläufern Kunde zu besitzen, hatte der Verf. schon vor zwölf Jahren die Schallerscheinungen von Meleda als Bestandteil eines ganz anders gearteten Erscheinungskomplexes angesprochen (Geophysikalische Betrachtungen über das Stauungsphaenomen und über Naturfontänen, Natur und Offenbarung, 35. Band (1889), S. 11 ff.). Von den damals dargelegten Anschauungen abzugehen, lag kein Grund vor.

[3]) Speziell dafür, dass das Meer anstauend auf den Wasserstand von Binnenseen des Karstgebietes wirken kann, dienen als Belege der Čepič-See in Istrien und der Rothensteiner-See im Küstenlande (vgl. Kraus, Sumpf- und Seenbildungen mit besonderer Berücksichtigung der Karsterscheinungen und insbesondere der Katavothrenseen, Mitteil. d. Geogr. Gesellsch. zu Wien, 1893, S. 373 ff.). Wie die unsichtbaren Abzugsröhren oder Katavothren die ganze geographische Denkart der antiken Kulturwelt beeinflusst haben, ist trefflich auseinandergesetzt worden von C. Neumann und J. Partsch (Physikalische Geographie von Griechenland, mit besonderer Berücksichtigung des Altertums, Breslau 1885, S. 255 ff.), sowie von Kretschmer, Die physische Erdkunde im christlichen Mittelalter, Wien-Olmütz 1889, S. 82 ff.). Hierher gehören auch die berühmten Meermühlen von Argostoli (Günther, Handb. d. Geophysik, 2. Band, S. 804 ff.). Die Natur der dalmatinischen Inseln wird behandelt von H. Noë (Dalmatien und seine Inselwelt, Wien 1870, S. 53 ff.) und von K. Hassert (Montenegro, Ergänzungsheft Nr. 115 zu Petermanns Geogr. Mitteil., S. 45 ff.). Der Verf. forderte Dr. F. Fischer in Innsbruck auf, generell „Meer und Binnengewässer in Wechselwirkung" darzustellen, und diese Studie wird sicher noch im Laufe dieses Jahres in den „Abhandlungen" der k. k. Geographischen Gesellschaft zu Wien publiziert werden.

auch schon den Beweis dafür in sich, dass das Meer leicht unterirdisch mit den vom Namen Karst nun einmal unzertrennlichen Hohlräumen des Inneren kommunizieren kann. Sowie dies zugegeben wird, muss auch jede gegen die Küste gerichtete Bewegung ein stossweise erfolgendes Eindringen des Meerwassers in die Klüfte und Adern des anstehenden Gesteines zur Folge haben, und zwar wird sich dieses Aufsteigen, wie am fraglichen Orte des näheren erörtert ward, dem Prinzipe des hydraulischen Widders anpassen.[1]) Eine Umschau in der erdkundlichen Litteratur führt uns eine ganze Anzahl ähnlicher und auch gleichartig bedingter Erscheinungen zu. Der Anprall des Wassers muss für sich allein schon, ohne dass auch nur auf eine heftigere Luftkompression im Sinne Configliacchis bezuggenommen zu werden brauchte, ein dauerndes Dröhnen in kurzen Pausen hervorrufen, und gelegentlich, wenn dieser Anprall ein besonders lebhafter ist, kann es recht wohl auch soweit kommen, dass der Fels zu zittern anfängt, dass ein regelrechtes Erdbeben mit den blossen Detonationen abwechselt. Also gerade der Punkt, der bei jeder anderen Auffassung Schwierigkeiten bereitet, wird jetzt einer einfachen Erklärung zugänglich, dass nämlich die akustischen Erschei-

---

[1]) Einschlägige Nachweisungen lassen sich knüpfen an die Bufaderos oder Strandspringbrunnen der Kanarischen Inseln (Calderon, Études de géologie physique, Bull. de la Soc. Géol. de France, (3) 15. Band, S. 38 ff.); ferner an ein ausgezeichnetes Beispiel intermittierenden Strahlauswurfes, das man auf der Insel Malta beobachtete (Wanderung durch Sizilien und die Levante, 1. Band, Berlin 1834, S. 406; Ann. d. Phys. u. Chem., 33. Band, S. 349 ff.), indem hier das von Stürmen gepeitschte Meer durch ein absichtlich hergestelltes Bohrloch bis zu einer Höhe von 60 Fuss emporspritzte. Pechuel-Loesche hat Bufaderos, die ihm den Eindruck förmlicher Brandungs-Geysirs erweckten, auch an der Küste von Madeira, sowie an derjenigen verschiedener Inseln der Azoren-Gruppe gesehen; andere zur Bildung von Springstrahlen disponierte Oertlichkeiten sind ihm zufolge die Sandwich-Inseln, die Ostspitze von Kuba und, falls die Kalema energisch genug ist, auch die Küste von Kinsembo (Portugiesisch-Westafrika). Und die Ausbrüche des gestauten, in regelmässigen Pausen in die Höhe geschleuderten Wassers sind stets von heftigem „Gurgeln und Donnern“ begleitet.

nungen als das Primäre, die mechanisch-seismischen dagegen als das Sekundäre zu betrachten sind.

Eher möchte man sich, statt dass man diese naturgemässe Theorie verwerfen sollte, über das verhältnismässig seltene Auftreten dieser Wechselbeziehungen zwischen Meer und Festland wundern. Wir sind allerdings der Meinung, dass sie doch bei genauerem Zusehen häufiger aufgedeckt werden können, und dass die Schallphaenomene, die sich in den gegen das Meer hin offenen Nischen und Höhlen manifestieren, eine analoge Ursache haben. Zumal von der bekannten Fingalshöhle auf der Insel Stafa, der ja schon mancher Besucher und Beschreiber mysteriöse Töne zugeschrieben hat, wird sich dies vermuten lassen. An die Stelle der Karstzerklüftung ist hier diejenige getreten, welche den charakteristischen Absonderungsformen des Basaltes entspricht. Und es ist mehr denn wahrscheinlich, dass, wenn erst alle gelegentlich gemachten, aber ungedruckt gebliebenen Beobachtungen verwandten Gepräges das bereits vorhandene Material vermehrt haben würden,[1]) die Detonationen, welche zum Typus von Meleda zu rechnen sind, nicht minder in zahlreichen Fällen als solche zu erkennen wären. —

Unsere Uebersicht über die akustisch-geographischen Vorkommnisse hat hiemit ihren Abschluss erreicht. Als einen nicht unerheblichen Nutzen derselben sind wir vornämlich anzusehen geneigt, dass der bislang auf diesem Gebiete bestehenden Anarchie ein Ende bereitet und eine jede unter den sehr vielen Einzelerscheinungen an den Platz gestellt worden ist, der ihr auf Grund kritischer Prüfung der von ihr han-

---

[1]) Eine solche Wahrnehmung stellten Prof. Rothpletz und Prof. Oberhummer zur Prüfung, die, an einer in den Kochel-See steil abfallenden Felswand hingehend, sonderbar säuselnde Töne vernahmen, für deren Provenienz sich nirgends ein Anhaltspunkt finden lassen wollte. Dass alternierendes Ein- und Ausströmen des mit zerklüftetem Kalkfels sich berührenden Wassers Töne hervorbringen kann, ist gewiss, und ein lokaler Augenschein würde vielleicht darüber vergewissern, ob diese Auffassung des Sachverhaltes stichhaltig ist oder nicht.

delnden Angaben zukommt. Denn die Verwirrung, welche herrschte, war eine fast unglaubliche; Erscheinungen der verschiedensten Art wurden wahllos durcheinandergeworfen; solche dagegen, die wirklich zusammengehörten, mussten sich eine Trennung gefallen lassen. Belege für diese Unordnung sind wiederholt beigebracht worden und könnten noch beliebig vermehrt werden.[1] Einerlei, ob unsere Bestrebungen, jedes akustische Naturphaenomen mit den einfachsten Mitteln zu erklären, vom Glücke begleitet waren oder mit der Zeit als unzureichend sich herausstellen — jedenfalls wird jeder künftige Bearbeiter dieser Probleme sich in den Stand gesetzt sehen, von einer gesicherten, erfahrungsmässigen Grundlage ausgehen und sich über die Zusammengehörigkeit oder Nicht-Zusammengehörigkeit der einzelnen Fragen ohne Mühe ein sicheres Urteil bilden zu können.

---

[1] Insbesondere müssen die Töne des sinaitischen Glockenberges herhalten, wenn irgendwelche spontane Naturklänge dem Verständnis zugänglich gemacht werden sollen. Sogar als Seitenstück der Mistpoeffers hat man sie verwerten wollen (Fry, Barisal Guns, Nature, 54. Band (1896), S. 8). Indessen hat wenigstens in diesem Falle der Irrtum eine unverzügliche Richtigstellung erfahren (B. W. S., Barisal Guns, ebenda, 54. Band, S. 102).



Ueber kosmische Staubmassen und das Zodiacallicht.

Von **H. Seeliger.**

(*Eingelaufen 6. Juli.*)

Die Theorie der Beleuchtung staubförmiger Massen habe ich in zwei Abhandlungen[1]) entwickelt. Veranlasst wurden diese Untersuchungen durch den Wunsch, über die Verhältnisse, welche der Saturnring darbietet, in's Einzelne gehende Aufschlüsse zu erhalten. Hiezu waren ziemlich weitgehende Entwicklungen nöthig, die ich besonders in II in solcher Allgemeinheit durchgeführt habe, dass in der Hauptsache die betreffenden Probleme als gelöst betrachtet werden können.

Unter staubförmigen kosmischen Massen oder kosmischen Staubwolken hat man Aggregate von Massen zu verstehen, deren gegenseitige Entfernungen im Vergleich zu ihren Dimensionen gross sind. Dabei wird man in den meisten Fällen die Theorie nur unter der Voraussetzung zu entwickeln haben, dass das genannte Verhältnis sehr gross ist, da es sich um ganz genaue Formeln nicht handeln kann. Nichts hindert indessen, dass man, ähnlich wie in der kinetischen Gastheorie, einen Schritt weiter geht. Ganz genaue Formeln, die also auch auf Ansammlungen dicht gedrängter Theilchen anwendbar sind, aufzustellen, dürfte indessen bedeutende Schwierigkeiten darbieten. Solche weitergeführte Entwicklungen verlangt die

---

[1]) I. Zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten, insbesondere des Saturnringes. Abhdl. der bayer. Akademie der W. Bd. XVI. München 1887. II. Theorie der Beleuchtung staubförmiger kosmischer Massen etc. Ebenda, Bd. XVIII. München 1893.

Astronomie zunächst nicht, denn die bisher bekannt gewordenen kosmischen Staubwolken enthalten nur sehr dünn vertheilte Materie.

Die Theorie erfordert nicht die Annahme kugelförmiger Gestalt der einzelnen die Staubwolke zusammensetzenden Theilchen, man darf aber diese Annahme machen, ohne die Allgemeinheit zu gefährden. Bei der obigen Definition der Staubwolken, umfassen diese sehr verschiedene kosmische Gebilde z. B. den Saturnring und das Zodiacallicht, aber auch, gewissermaassen als Specialfälle, selbstleuchtende oder theilweise selbstleuchtende Massen, wie die Sternhaufen, wahrscheinlich auch die sogenannten Spiralnebel und schliesslich gehört der ganze sichtbare Fixsterncomplex dazu. Einige Anwendungen auf den letzteren habe ich gelegentlich einer anderen Untersuchung gemacht.[1])

In der vorliegenden Arbeit möchte ich mir erlauben, einige Punkte der früheren Entwicklungen in Betreff der Beleuchtung an sich dunkler Staubwolken näher auszuführen und einige Bemerkungen über das Zodiacallicht hinzuzufügen.

1.

Wir denken uns die Staubwolke — den obigen Bemerkungen gemäss — aus n gleichen Kugeln vom Radius ϱ bestehend und die Lichtquelle sowie den Beobachter in so grosser Entfernung von ihr, dass die Veränderlichkeit dieser Entfernung von Kugel zu Kugel nicht in Frage kommt. Dann wird, wenn zunächst von der gegenseitigen Beschattung und Verdeckung der einzelnen Kugeln abgesehen wird, die Gesammtlichtmenge, welche diese n Kugeln dem Beobachter zusenden,

$$Q = \Gamma' \cdot n\,\varrho^2$$

wo Γ' eine Constante ist. Ist M die Gesammtmasse dieser n Kugeln, so wird

[1]) Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1896.

$$Q = \Gamma \cdot \frac{M}{\varrho} = \gamma \sqrt[3]{M^2 n}, \tag{1}$$

wo γ und Γ weder von M noch von n und ϱ abhängen. Belegt man, woran festgehalten werden soll, stets denselben Raum mit Kugeln, so wird die mittlere Flächenhelligkeit der Staubwolke ebenfalls durch (1) dargestellt, wenn nur γ eine andere Constante, wie früher, bedeutet. Zertheilt man demnach dieselbe Masse M in eine Anzahl Kugeln, so wird die Lichtmenge der entstehenden Staubwolke mit $\frac{1}{\varrho}$ oder $\sqrt[3]{n}$ wachsen, d. h. je kleiner die einzelnen Kugeln sind, desto heller wird unter sonst gleichen Umständen die Staubwolke sein. Die sehr hellen sogenannten leuchtenden Nachtwolken stellen u. A. solche Ansammlungen sehr kleiner Theilchen dar, wofür ja auch ihr sehr langes Verweilen in so überaus grossen Höhen spricht.

Von selbst ist klar, dass die Formel (1) nur innerhalb gewisser Grenzen gelten kann, denn sonst könnte Q über alle Grenzen hinaus wachsen. Der Grund, weshalb das nicht geschieht, ist leicht zu finden. Je kleiner ϱ bei festgehaltenem M wird, desto mehr treten die gegenseitigen Beschattungen und Bedeckungen der einzelnen Kugeln in Wirksamkeit und so kommt es, dass Q über einen gewissen endlichen Betrag nicht hinauswachsen kann.

Sehr leicht zu übersehen sind die Verhältnisse bei einer zweidimensionalen Vertheilung der Kugeln. Wir nehmen z. B. an, die Mittelpunkte der Kugeln liegen innerhalb eines begrenzten ebenen Flächenstückes F. Dann wird Q zunächst bei der Verkleinerung von ϱ wachsen. Bei fortgesetzter Verkleinerung der Kugeln werden diese aber schliesslich das Ebenenstück F so dicht besetzen, dass sie sich gegenseitig berühren und eine weitere Verkleinerung von ϱ kann demnach nicht erfolgen.

Nennt man für diesen Grenzfall σ die Höhe des gleichseitigen Dreiecks, in dessen Spitzen je 3 sich berührende Kugeln stehen, so ist

$$\sigma = 2\,\varrho \sin 60^0 = \varrho\sqrt{3}$$

und je grösser n ist, desto genauer wird die Formel sein

$$2\,n\,\varrho\,\sigma = F.$$

Nennt man noch P das Gesammtvolumen aller Kugeln und δ die Massendichtigkeit einer jeden, so ist

$$P = \tfrac{4}{3}\,n\,\varrho^3\,\pi = \frac{M}{\delta}.$$

Der kleinste zulässige Werth von ϱ ergiebt sich hieraus:

$$\varrho = \frac{3\sqrt{3}}{2\,\pi}\cdot\frac{P}{F} = \frac{3\sqrt{3}}{2\,\pi}\,\frac{M}{F\cdot\delta}$$

und der Maximalwerth vom n ist demnach:

$$n = \frac{2\,\pi^2}{27\sqrt{3}}\cdot\frac{F^3}{P^2}.$$

Nennt man weiter den Maximalwerth von $Q : Q_0$ und den Werth von Q für ein bestimmtes gegebenes $n = n_0 : Q_{n_0}$, setzt man der besseren Uebersicht wegen $F = a^2$ und $V = a^3$, so wird:

$$\frac{Q_0}{Q_{n_0}} = \left(\frac{2\,\pi^2}{27\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{V}{P}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.751\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\cdot\left(\frac{V}{P}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$V : P = \varDelta$ ist umso grösser, je dünner die Massenvertheilung ist. Q_0 wächst also mit $\varDelta^{\frac{2}{3}}$ und kann für grosse $\varDelta$ bedeutend werden. Die Durchsichtigkeit einer solchen Staubschicht nimmt, wie von selbst klar ist, mit der Verkleinerung von ϱ, also der Vergrösserung von n ab.

Ganz ähnliches gilt nun auch für dreidimensionale Staubwolken. Die Entwicklungen in I und II geben hierüber nach jeder Richtung Auskunft. Infolge der gegenseitigen Beschattungen und Verdeckungen der einzelnen Theilchen ergiebt sich auch hier ein Maximalwerth für die Flächenhelligkeit einer Staubwolke, dem man sich durch fortgesetzte Zerstückelung der gegebenen Gesammtmasse nähert. Es tritt aber noch ein

anderer Umstand hinzu. Nennt man die Lichtquelle „Sonne“ und den Winkel an der Kugel im Dreieck Sonne-Kugel-Beobachter, also den Phasenwinkel, a, so wird die Helligkeit einer Staubwolke von a abhängig sein und im Allgemeinen mit Verkleinerung von a zunehmen. Die näheren Umstände dieser Zunahme hängen von dem elementaren Beleuchtungsgesetz für zerstreut reflectirende Substanzen ab und sind deshalb nicht voraussetzungslos angebbar. Die gewöhnlich angewandten photometrischen Elementargesetze für glatte Oberflächen geben für kleine Variationen von a und besonders in der Nähe des Werthes $a = 0$ nur sehr kleine Variationen der Helligkeit. Trotzdem können hier sehr beträchtliche Helligkeitszunahmen stattfinden, die bei nahezu undurchsichtigen Staubwolken ihre Helligkeit auf das Doppelte erhöhen, wenn man von sehr kleinen a zu dem Werthe $a = 0$ übergeht. Dieses Resultat ergiebt sich aus der Ueberlegung, dass für $a = 0$ die beschatteten Theile der Staubwolke zugleich die verdeckten sind und schon bei geringfügiger Vergrösserung von a die beschatteten Theilchen sichtbar werden und somit die mittlere Helligkeit der Staubwolke abschwächen müssen. Die quantitative Verfolgung dieses Phänomenes ist in I und II geschehen. Dasselbe spielt in der Theorie der Beleuchtung des Saturnringes eine besonders wichtige Rolle und ist hier als sehr auffällig durch die Beobachtung constatirt. Bei sehr durchsichtigen Staubwolken ist es dagegen von untergeordneter Bedeutung. Hier soll davon gänzlich abgesehen werden, wodurch eine grosse Vereinfachung in der Betrachtung eintritt.

Bei den folgenden einfachen Rechnungen sollen die in I und II getroffenen Festsetzungen beibehalten werden. Es seien also Δ und Δ_1 die Entfernung einer Kugel vom Beobachter bezw. von der Sonne, deren Radius R sei. Dann ist die Lichtmenge $Q(a)$, welche eine Kugel vom Radius ϱ beim Phasenwinkel a dem Beobachter zusendet:

$$Q(a) = J \cdot \mu \cdot \frac{R^2}{\Delta^2} \frac{\varrho^2}{\Delta_1^2} f(a).$$

Hierbei ist μ die Albedo nach der von mir eingeführten Definition[1]) und ferner:

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} i \, d\, i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \, (\cos i, \, \cos \varepsilon) \sin \varepsilon \, d\, \varepsilon$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\,P} \int_0^{\pi} \sin \vartheta \, d\, \vartheta \int_{\alpha}^{\pi} \varphi \, (\sin \vartheta \sin (\omega - \alpha), \; \sin \vartheta \sin \omega) \, d\, \omega$$

wobei φ das elementare Beleuchtungsgesetz bedeutet. Bei der bekannten Unsicherheit darüber, welchen Ausdruck man für φ am besten anzuwenden hat, empfiehlt es sich mehrere möglichst einfache bezw. mehr oder weniger erprobte Annahmen zu machen. Die neuere Photometrie hat besonders auf drei solche Annahmen hingewiesen, nämlich:

$$1) \quad \varphi = \cos i \cos \varepsilon, \quad 2) \quad \varphi = \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon}, \quad 3) \quad \varphi = \cos i$$

wo i und ε Incidenz- und Emanationswinkel bedeuten. Die drei Annahmen sind als das Lambert'sche Gesetz, das Absorptionsgesetz und das Gesetz von Euler bekannt. Für diese 3 Annahmen ist der Reihe nach $P = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ und 1, wodurch wird:

$$1) \quad f_1(\alpha) = \tfrac{2}{3} \left[\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha\right]$$

$$2) \quad f_2(\alpha) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha} \operatorname{lognat} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{4} \alpha\right]$$

$$3) \quad f_3(\alpha) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass $L = J\pi \cdot \left(\frac{R}{\Delta_1}\right)^2$ die Lichtmenge ist, welche ein senkrecht der Sonnenstrahlung ausgesetztes Flächenelement $= 1$ in der Entfernung Δ_1 erhält. Für genügend grosse Δ_1, für solche nämlich, für welche $4 \sin^2 \frac{\sigma}{2} = \sin^2 \sigma$ gesetzt werden darf. — σ ist der scheinbare

---

[1]) I art. 5.

Sonnenradius — ist $\pi\left(\frac{R}{\varDelta_1}\right)^2$ der scheinbare Flächeninhalt der Sonnenscheibe, von der betr. Kugel aus gesehen, und J ist demnach die scheinbare Flächenhelligkeit der Sonne, also völlig unabhängig von $\varDelta_1$. Bezeichnet J_M die mittlere scheinbare Flächenhelligkeit der Mondscheibe und ist σ_M ihr Radius, so kann man setzen[1]):

$$J \cdot \sigma^2 = J_M\, \sigma_M^2 \cdot 569500.$$

Betrachten wir nun nur — der Einfachheit wegen — eine homogene Staubwolke vom Rauminhalt R_1. Die Zahl aller in R_1 enthaltenen Kugeln sei N. Dann ist die scheinbare Flächenhelligkeit H in einer von einem Punkte ausserhalb der Wolke gezogenen Richtung, welche die Wolke in zwei Punkten 1 und 2 schneidet, wo die Strecke $12 = X$ ist, gegeben durch:

$$H = \Gamma \frac{\varrho^2 N}{R_1} \int_0^X \frac{e^{-\lambda(h+h_1)}}{\varDelta_1^2} \cdot f(a)\, dh. \tag{1}$$

h und h_1 sind die innerhalb der Staubwolke gelegenen Stücke der Geraden, welche von dem betrachteten Punkt in $\overline{12}$ zum Beobachter bezw. zur Sonne gezogen werden. Ferner ist gesetzt worden:

$$\lambda = \frac{N\varrho^2\pi}{R_1}, \quad \Gamma = J \cdot \mu\, R^2. \tag{2}$$

Ist, wie früher, P der Raum, den alle Kugeln zusammen einnehmen, so wird:

$$\lambda = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{P}{R_1} \cdot \frac{1}{\varrho} = \frac{S}{\varrho}; \quad S = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{P}{R_1}.$$

S ist das Maass für die Dichtigkeit der Massenvertheilung. Jetzt kann man H auch schreiben:

$$H = \frac{\Gamma}{\pi} \cdot \lambda \int_0^X \frac{e^{-\lambda(h+h_1)}}{\varDelta_1^2} f(a)\, dh. \tag{3}$$

Wenn der Beobachter und die Sonne soweit von der Staub-

---

[1]) Müller, Photometrie der Gestirne S. 315.

wolke entfernt sind. dass ihre Dimension dieser Entfernung gegenüber sehr klein ist, hat man:

$$H = \frac{\Gamma}{\pi} \cdot \frac{f(a)}{\Delta_1^2} \cdot \Phi(\lambda); \quad \Phi(\lambda) = \lambda \int_0^X e^{-\lambda(h+h_1)} \cdot d\,h.$$

Einer beliebig weit fortgesetzten Zerstückelung der Masse. durch Verkleinerung von ϱ. steht hier nichts im Wege. Aber für $\varrho = 0$ nähert sich H einem endlichen Grenzwerthe, da $\Phi(\lambda)$ für $\lambda = \infty$ endlich bleibt.

Für $\lambda = \infty$ wird aber die Staubwolke unendlich wenig durchsichtig. Zu dem Integrale $\Phi(\lambda)$ können dann nur Schichten einen Betrag liefern. für welche h und h_1 unendlich klein sind. Zieht man an der Stelle der Oberfläche der Staubwolke. auf welche sich die scheinbare Helligkeit H bezieht, die Tangentialebene und nennt man i und ε den Incidenz- bezw. Emanationswinkel der von der Sonne empfangenen bezw. dem Beobachter zugesandten Strahlen. so wird, von etwaigen singulären Punkten der Oberfläche abgesehen:

$$h_1 = \frac{h \cos \varepsilon}{\cos i}$$

und es wird demnach für $\lambda = \infty$:

$$\Phi(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda h \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i}} \, d\,h = \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon}$$

d. h. die Staubwolke reflectirt das Licht wie ein fester glatter Körper, dessen Oberfläche das Absorptionsgesetz (2) befolgt und dessen Albedo vom Phasenwinkel abhängt. Daraus ergiebt sich z. B. die Lichtmenge einer kugelförmigen Staubwolke vom Radius S_1:

$$Q(a) = \frac{\Gamma}{\pi} \cdot \frac{S_1^2}{\Delta^2} \cdot \frac{f(a)}{\Delta_1^2} \cdot f_2(a),$$

wo $f_2(a)$ der obige Ausdruck (S. 270) ist und $f(a)$ das Elementargesetz ausdrückt, welchem die einzelnen Kugeln folgen.

Für zwischen 0 und ∞ gelegene Werthe von λ ist die Ausrechnung des Integrales im Allgemeinen recht verwickelt. wie das Beispiel einer kugelförmigen Staubwolke zeigt. das ich

in II (S. 12 ff.) behandelt habe. Um ein möglichst einfaches Beispiel zu betrachten, soll eine von zwei parallelen Ebenen, im Abstand X, begrenzte Staubschicht vorliegen und es befinde sich sowohl die Sonne als auch der Beobachter auf derselben Seite der Schicht. Bezeichnet wieder i und ε Incidenz- und Emanationswinkel und x die Tiefe des betrachteten Volumelementes unter der oberen Grenzebene, so ist:

$$h_1 = \frac{x}{\cos i}; \quad h = \frac{x}{\cos \varepsilon}.$$

Die Integration ist dann sofort ausführbar und man hat:

$$\Phi(\lambda) = \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon}\left(1 - e^{-\lambda X \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon}}\right).$$

Bezeichnet man also:

$$\nu = S \cdot X \cdot \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cos \varepsilon},$$

so wird:

$$H = \frac{\Gamma}{\pi \Delta_1^2} f(a) \cdot \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} \Psi; \quad \Psi = 1 - e^{-\frac{\nu}{\varrho}}. \tag{4}$$

Ψ nimmt mit abnehmendem ϱ fortwährend zu und erreicht für $\varrho = 0$ sein absolutes Maximum. Sobald $i > 90^0$ gelten die Formeln nicht mehr. Ohne auf diesen leicht zu erledigenden Fall näher einzugehen, sei nur hervorgehoben, dass dann jedenfalls für $\lambda = 0$ und für $\lambda = \infty$ $H = 0$ sein muss — im letzteren Fall liegt eine von hinten beleuchtete undurchsichtige Schicht vor — so dass also das Maximum der Helligkeit für einen dazwischenliegenden Werth von λ stattfinden muss.

Ich betrachte nun den Fall, wo die Sonne innerhalb der Staubwolke, der Beobachter dagegen in sehr grosser Entfernung ausserhalb liegt. Die Formel (3) gilt dann, wenn nur $h_1 = \Delta_1$ gesetzt wird. Da hier $f(a)$ innerhalb des Integrales steht, ist eine weitere Entwicklung der Formel von der Wahl des elementaren Beleuchtungsgesetzes abhängig.

Fällt man von der Sonne eine Senkrechte s auf die vom Beobachter zum betrachteten Volumelement gezogene Gerade

und ist m der Abstand des Fusspunktes dieser Senkrechten von der Eintrittsstelle der genannten Geraden in die Staubwolke, so hat man:

$$h = m + s \operatorname{cotg} a; \quad h + \Delta' = m + s \operatorname{cotg} \frac{a}{2}$$

und es ergiebt sich aus (3):

$$H = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{\lambda}{s} \cdot e^{-\lambda m} \int_{a_1}^{a_0} e^{-\lambda s \operatorname{cotg} \frac{1}{2} a} \cdot f(a)\, d\, a,$$

wo a_0 und a_1 die Werthe von a für die Eintritt- und Austrittsstelle bedeuten. Setzt man noch:

$$\nu = \lambda s; \quad \Psi_\nu(a) = \nu \int_0^a e^{-\nu \operatorname{tg} \frac{a}{2}} f(\pi - a)\, d\, a,$$

so wird:

$$H = \frac{\Gamma}{\pi s^2} e^{+\nu \operatorname{cotg} a_0} \{\Psi_\nu(\pi - a_1) - \Psi_\nu(\pi - a_0)\}. \tag{5}$$

Die Integrale Ψ sind in jedem Falle leicht numerisch auszuwerthen. Ich habe beispielsweise eine kleine Tafel für das Lambert'sche Gesetz berechnet. Hier ist:

$$f(\pi - a) = \tfrac{2}{3}[\sin a - a \cos a].$$

Die am Schlusse mitgetheilte Tafel ist nicht nach dem Argumente ν, sondern nach $\nu_1 = 0.43429\,\nu$ geordnet und giebt eine genügende Uebersicht über den Verlauf der Function Ψ zwischen $\nu_1 = 0$ und $\nu_1 = 1$. Es sollen nun einige numerische Nachweise zu den vorstehenden Formeln gegeben werden.

Da die scheinbaren Durchmesser von Sonne und Mond — von der Erde aus gesehen — nicht wesentlich verschieden sind, so hat man:

$$\Gamma = \mu \cdot J_M \cdot R^2 \cdot 569500.$$

Betrachtet man zuerst eine Scheibe von Staubmaterie, die von ausserhalb beleuchtet wird, so ist nach (4) das Maximum ihrer Helligkeit:

$$H_{\max} = \frac{\Gamma}{\pi \Delta_1^2} f(a) \cdot \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon}$$

oder:

$$\frac{H_{\max}}{J_M} = \frac{\mu}{\pi} \left(\frac{R}{\Delta_1}\right)^2 \cdot 569500 \cdot f(a) \cdot \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon}.$$

Drückt man Δ_1 in Einheiten der Entfernung Sonne-Erde aus, so wird:

$$\frac{H_{\max}}{J_M} = 12.3 \times \mu \cdot \frac{f(a)}{\pi} \cdot \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} \cdot \frac{1}{\Delta_1^2}.$$

$\frac{f(a)}{\pi}$ ist für $a = 0$ für die drei oben betrachteten Beleuchtungsgesetze der Reihe nach $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ und für $a = 90^0$ grösser als $\frac{1}{3}$. Da für $i = \varepsilon$, $\frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} = \frac{1}{2}$ ist, so kommt man leicht auf Maximalhelligkeiten:

$$\frac{H_{\max}}{J_M} > 2 \cdot \frac{\mu}{\Delta_1^2},$$

was für $\Delta_1 = 1000$ (etwa 30 Neptunsweiten):

$$H_{\max} = J_M \cdot 2.10^{-6} \mu$$

ergiebt. Eine solche Flächenhelligkeit würde also z. B. eine Staubwolke haben können, die eine Parallaxe von 0.″01 besitzt und von einem Sterne von der Grösse 10.4 beleuchtet wird, der in einer Entfernung von 10″ sich von ihr befindet. Für schon recht dunklen Oberflächen entsprechende Albedowerthe wird man so, in dem angenommenen Falle, auf Flächenhelligkeiten

$$H = J_M \cdot \gamma \cdot 10^{-7}$$

geführt, wo γ einige Einheiten ausmacht. Diese Zahl vergrössert sich im quadratischen Verhältnis mit der Annäherung des Sternes an die Staubwolke.

Liegt der Stern innerhalb der Staubwolke, so ist nach (5):

$$\frac{H}{J_M} = \mu \times 3.93 \cdot \frac{e^{\nu \operatorname{cotg} a_0}}{s^2} \{\Psi_\nu(\pi - a_1) - \Psi_\nu(\pi - a_0)\}.$$

Nimmt man z. B. α_1 ganz beiläufig in der Nähe von Null, $\alpha_0 = 130^0$, $r_1 = 0.2$, so ergiebt sich mit Hülfe der Tabelle

$$H = \mu\, J_M \cdot \frac{0.94}{s^2}.$$

Ist π'' die jährliche Parallaxe der Staubwolke in Secunden, s'' der in Secunden ausgedrückte Abstand des Sternes, von derselben Leuchtkraft wie die Sonne, von dem betrachteten Theile der Staubwolke, so ist

$$s'' = \pi'' \sqrt{\frac{0.94\,\mu}{H} \cdot J_M}.$$

Setzt man z. B. $\frac{H}{J_M} = \lambda \cdot 10^{-7}$; $\pi'' = 0''01$; $\mu = \frac{1}{4}$ (entsprechend einer Albedo, die zwischen der des Mercur und Mars liegt), so ist ungefähr:

$$s'' = 15'' \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Auch in diesem Falle macht es keine Schwierigkeiten in der Entfernung von mehreren Secunden von einem schwächeren Sterne Flächenhelligkeiten der Staubwolke zu erhalten, die vom Range 10^{-7} der mittleren Flächenhelligkeit der Vollmondscheibe sind. Es ist dabei nicht ausser Betracht zu lassen, dass sehr wahrscheinlicher Weise die meisten Sterne eine viel bedeutendere Leuchtkraft als die Sonne besitzen. Man kann demnach die berechneten Werthe auch für beträchtlich kleinere Parallaxen als 0"01 gelten lassen. In beiden Fällen sieht man also dann Nebelmassen in der Nähe von Sternen. Es fragt sich nun aber, ob Nebelmassen von der angenommenen Flächenhelligkeit überhaupt bemerkbare Objecte sind.

Die Bestimmung der Flächenhelligkeit von ausgedehnten lichtschwachen Gebilden am Himmel ist bisher nur in wenigen Einzelfällen und auch hier nur mit geringer Zuverlässigkeit durchgeführt worden.

Namentlich ist man nur sehr selten über relative Helligkeitsschätzungen von Gebilden unter sich hinausgekommen und

Beziehungen auf bestimmte, also gewissermaassen absolute Einheiten sind fast gar nicht vorhanden. Als eine solche Einheit empfiehlt sich die oben benutzte, nämlich die mittlere Flächenhelligkeit der Vollmondscheibe oder diese Helligkeit mit einer negativen ganzen Potenz von 10 multipliciert. Behält man die erstere als Einheit bei, so werden die reciproken Flächenhelligkeiten, die ich mit A bezeichnen will, selbst der hellsten Nebelflecke und noch mehr minder heller Objecte, wie der Milchstrasse, allerdings durch grosse Zahlen dargestellt, was indessen wohl kaum bedenklich sein dürfte.

Es mag nun das Wenige, was in dieser Beziehung bekannt ist, hier erwähnt werden. Es ist sehr zu bedauern, dass man kaum über sehr vage und unsichere Angaben hinaus gelangen kann, denn die obigen Bemerkungen dürften, abgesehen von andern Fragen, darauf hinweisen, dass mit besser begründeten Feststellungen von solchen Flächenhelligkeiten ein recht erhebliches Interesse verbunden ist.

Der Himmelsgrund ist durch die Sonne oder durch den Vollmond nicht gleichmässig erhellt, vielmehr hängt, wie selbstverständlich, die Flächenhelligkeit der einzelnen Theile des Himmels von ihrer Lage zum erleuchtenden Gestirn und von der Höhe des letzteren über dem Horizont ab. Einen genaueren Nachweis hierüber hat Herr Wild[1]) gegeben. Danach ist z. B. im Azimuthe 90^0 von der Sonne entfernt das Verhältnis der Flächenhelligkeit der Sonnenscheibe zur Flächenhelligkeit des Himmelsgrundes $\gamma \cdot 10^6$, wo γ eine nicht sehr von der Einheit verschiedene Zahl bedeutet. Ungefähr dieselbe Zahl würde hieraus für die in den obigen Einheiten ausgedrückte reciproke Helligkeit des Himmelsgrundes bei Vollmond folgen, da Vollmond und Sonne nahe von gleicher scheinbarer Grösse sind.

Statt dessen führt aber Olbers[2]) — wohl eine der frühesten Angaben in diesem Gebiete — für die Zahl A 10^5 an. Da indessen diese Angabe ohne nähere Begründung gemacht

---

[1]) Bulletin der Akademie in Petersburg. 1876 u. 1877.

[2]) Olbers Werke I. S. 139.

ist, dürfte wohl die erwähnte Wild'sche zuverlässiger sein. Bei Vollmond verschwindet nun aber für das freie Auge, die Milchstrasse überall, vielleicht mit Ausnahme der allerhellsten Partien. Hier ist die Helligkeit des Himmelsgrundes um die der Milchstrasse vermehrt. Bleibt diese Helligkeit unbemerkt, so muss der Quotient aus der genannten Vermehrung dividirt durch die Helligkeit des Himmelsgrundes $< \varepsilon$ sein, wo ε eine Zahl ist, die man wohl kleiner als etwa $\frac{1}{40}$ annehmen kann. Danach würde also für die Milchstrasse für A der Werth $\frac{1}{\varepsilon} \cdot 10^5$ bezw. $\frac{1}{\varepsilon} 10^6$ folgen, also werden voraussichtlich auch die hellen Partien der Milchstrasse ein A aufweisen, das vom Range 10^7 ist.

Die hellen, besonders einige kleine planetarische Nebel, scheinen eine viel grössere Helligkeit zu besitzen, doch lassen sich nur ganz unsichere Angaben in dieser Richtung machen. Die wenigen hierher gehörenden Angaben, deren Nachprüfung und Vermehrung dringend erwünscht wäre, hat Herr G. Müller in seiner Photometrie der Gestirne zusammengestellt.

Nach Herrn E. Pickering sendet der helle planetarische Nebel G. C. 4964 soviel Licht aus, wie ein Stern von der Grösse 8.6.[1]) Die Lichtmenge, welche der mittlere Vollmond der Erde zusendet, ist gleich derjenigen, welche ein Stern von der Grösse — 11.77 besitzen würde.[2]) Der genannte planetarische Nebel ist ungefähr kreisrund und hat nach einer von Herrn Villiger auf mein Ersuchen angestellten Messung einen Durchmesser von 21″. Hiermit ergiebt sich A für diesen Nebel zu rund 18000. Ferner hat Herr Huggins[3]) die Flächenhelligkeit von 3 Nebeln bestimmt, hierbei als Einheit die Flächenhelligkeit einer auf einem nahen Dache aufgestellten Kerzenflamme genommen und hierfür gefunden:

---

[1]) Müller a. a. O. S. 420.

[2]) Müller a. a. O. S. 340.

[3]) Huggins, Philosoph. Transact. Vol. 156, part. I, S. 392 ff. und Müller S. 420.

		A
Nebel G. C. 4628	1 : 1508	618
Ringnebel. Leyer	: 6032	2472
Dumbbellnebel	: 19604	8032.

Ueber das Verhältnis der Helligkeit der benutzten Kerzenflamme zu der des Vollmondes irgendwie zuverlässige Angaben zu finden, ist mir nicht gelungen. Nimmt man die für eine gewöhnliche Normalkerze geltenden Zahlen an, nämlich:[1]) Flächenhelligkeit der Sonne zu der der Flamme 220420 : 1, Lichtmenge der Sonne zu der des Vollmondes 569500, Sonnen- bezw. Monddurchmesser 1919″.5 bezw. 1865″.7, so ergeben sich die bereits angeführten Zahlen *A* für die 3 Nebel. Diese Zahlen sind nun aber so auffallend klein, dass man sie als verfehlt ansehen muss. Es ist nicht gerade wahrscheinlich, dass dies in der allerdings ganz unsicheren Reduction begründet ist. Was die relative Helligkeit der 3 Nebel betrifft, so scheint dieselbe, wie gleich erwähnt werden soll, ziemlich zutreffend bestimmt worden zu sein.

Die genauere Bestimmung der relativen Flächenhelligkeiten nebeliger Objecte, bereitet bekanntlich praktische Schwierigkeiten, die noch nicht überwunden sind. Aber man kann doch mit verhältnismässig einfachen Hülfsmitteln zu einer rohen zahlenmässigen Abschätzung gelangen. Will man dann die Zahlen *A* gewinnen, so wird man gegenwärtig noch am besten den Werth von *A* für den von Herrn Pickering bestimmten Nebel G. C. 4964 zu Grunde legen, da dieser Werth verhältnismässig nicht so grossen Unsicherheiten ausgesetzt zu sein scheint. Die Abschätzung der relativen Flächenhelligkeit anderer Nebel im Vergleich zu dem genannten, kann in der zunächst geforderten Annäherung mit Hülfe eines Keilphotometers erfolgen. Die Bedenken gegen eine solche Anwendung des Keilphotometers sollen dabei, weil allgemein bekannt, ganz unerörtert bleiben und es soll nur erwähnt werden, dass solche Vergleichungen nur auf die hellsten Theile ausgedehnter Ob-

[1]) Müller a. a. O. S. 312.

jecte sich beziehen können.[1]) Ich habe nun Herrn Villiger ersucht, mit dem schönen Töpfer'schen Keilphotometer, welches mit dem $10^1/_2$ zölligen Refractor der Münchener Sternwarte in Verbindung gebracht werden kann, einige passend ausgewählte Nebelobjecte zu vergleichen, was auch im December 1900 und Mai 1901 geschehen ist. Auf die Details dieser Messungen soll hier nicht eingegangen werden. Ich führe nur die resultierenden Mittelwerthe von A an, wobei für den Nebel G. C. 4964 der obige Werth $A = 18000$ angenommen wurde.

	$A =$
G. C. 4628	13900
Ringnebel in der Leyer	61800
Dumbbellnebel	133000
G. C. 4964	18000
G. C. 6826	32100
Andromedanebel	16100
Sternhaufen im Hercules Messier 13	45700

Die mit $A = 13900$ für G. C. 4628 berechneten, oben erwähnten, Messungen von Herrn Huggins ergeben für:

	$A =$
Ringnebel	55700
Dumbbellnebel	181000

was immerhin in passabler Uebereinstimmung mit den Bestimmungen des Münchener Keilphotometers steht.

Zu Gunsten der oben angeführten Zahlen dürfte der für den Sternhaufen im Hercules gefundene Werth von A sprechen. Nach dem von Herrn Scheiner gegebenen Catalog ergiebt sich, dass in dem innersten und dichtesten Theil des Sternhaufens (30 Bogensecunden im Quadrat) im Mittel 0.1067 Sterne von der Grösse 12.7 auf dem Areale einer Quadratsecunde stehen. Hieraus ergiebt sich A zu 22000. Bei der Unsicherheit, die immerhin der Grössenschätzung anhaftet, dürfte die Uebereinstimmung der beiderlei Zahlen befriedigend sein, immer voraus-

[1]) Um ein homogenes Gesichtsfeld zu erzielen wird man zwei gleiche Keile oder Stücke von solchen, deren Spitzen entgegengesetzt liegen, anwenden. Das eine Keilstück wird man am besten fest mit dem Oculare verbinden.

gesetzt, dass man nur die Grössenordnung von A zu bestimmen versucht.

Endlich kann man auf Grund meiner „Betrachtungen über die räumliche Vertheilung der Fixsterne,“ [1]) die mittlere Flächenhelligkeit nicht zu kleiner Theile der Milchstrasse bestimmen. Das ist freilich gegenwärtig nicht ohne Hypothesen möglich, wie ich a. a. O. S. 47 ff. gezeigt habe, aber einiges Interesse dürften doch dergleichen Rechnungen haben.

Bezeichnet λ eine Grösse, die für die Milchstrasse im Mittel 0.25 ist, h_m die Lichtmenge eines Sternes von der Grösse m, n die Sterngrösse, unter welcher die hellsten Sterne an der Grenze des Sternsystems erscheinen, A_m die Anzahl aller Sterne auf einem bestimmten Areale des Himmels, z. B. auf einem Quadratgrad, von den hellsten herab bis zu denen von der Grösse m, dann ist:

$$A_m = A_n \cdot \frac{5 - \lambda - (3 - \lambda)\frac{h_m}{h_n}}{2} \quad \text{wenn } m > n$$

und

$$A_m = A_n \cdot \left(\frac{h_n}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \quad m < n$$

Ferner hat man $h_m = h_n \gamma^{m-n}$, wo $\log \gamma = -0.4$. Damit ergiebt sich, wenn $\gamma' = \log \operatorname{nat} \gamma$ ist, für $m > n$:

$$h_m \, d\, A_m = -\frac{3-\lambda}{2} \cdot A_n h_n \gamma' \cdot \gamma^{2(m-n)} \cdot d\, m$$

und die Lichtmenge aller Sterne zusammen von der Grösse n bis zu den schwächsten wird:

$$-\frac{3-\lambda}{4} A_n h_n \gamma' \int_0^\infty \gamma^x \, d\, x = \frac{3-\lambda}{4} A_n h_n .$$

Ebenso findet sich für $m < n$:

$$h_m \, d\, A_m = -\frac{3-\lambda}{2} A_n h_n \gamma' \cdot \gamma^{\frac{m-n}{2}(\lambda-1)} \cdot d\, m$$

und die Lichtmenge aller Sterne zusammen von den hellsten, für welche offenbar genähert $m - n = -\infty$ gesetzt werden darf:

---

[1]) Abhandlungen der Akademie d. W. zu München. Bd. XIX. 1898.

$$\frac{3-\lambda}{1-\lambda} \cdot A_n h_n \gamma' \cdot \int\limits_{-\infty}^{0} \gamma^x \, dx = A_n h_n \cdot \frac{3-\lambda}{1-\lambda}.$$

Als Gesammtlichtmenge Q ergiebt sich also:

$$Q = A_n h_n \cdot \frac{(3-\lambda)(5-\lambda)}{4(1-\lambda)}.$$

Was man auch, wenn unter m eine Zahl $> n$ verstanden wird, schreiben kann:

$$Q = A_m h_n \cdot \frac{(3-\lambda)(5-\lambda)}{2(1-\lambda)\left[(5-\lambda) - (3-\lambda)\frac{h_m}{h_n}\right]}.$$

Für den typischen Verlauf der Milchstrasse wurde $\lambda = \frac{1}{4}$ gesetzt, wodurch wird:

$$Q = A_m h_n \cdot \frac{11}{6\left[1 - \frac{11}{19} \cdot \frac{h_m}{h_n}\right]}.$$

Nimmt man für m die Grösse der schwächsten W. Herschelschen Sterne und schliesst man sich den weiteren Annahmen, die ich a. a. O. gemacht habe, an, so erhält man für die 4 folgenden verschiedenen Annahmen von m die daneben stehenden Werthe von n:

1)	$m = 13.5$	$n = 13.22$
2)	14.0	12.95
3)	14.5	12.86
4)	15.0	12.81

Für diese 4 Annahmen hat die Grösse:

$$S = \frac{h_n}{h_{12}} \cdot \frac{11}{6\left[1 - \frac{11}{19}\frac{h_m}{h_n}\right]}$$

der Reihe nach die Werthe: 1.08, 0.98, 0.95 und 0.94. Man kann demnach bei Ueberschlagsrechnungen, um die es sich hier handelt, $S = 1$ setzen und es ergiebt sich so:

$$Q = A_m h_{12}.$$

Die Lichtmenge eines Quadratgrades von der Flächenhelligkeit des Vollmondes wäre — 13.46 Grössenklassen. Für A ergiebt sich hieraus:

$$\log A = + 10.184 - \log A_m; \; A = 1.5 \times 10^{10} \cdot \frac{1}{A_m}.$$

A_m ist hier also die Anzahl Herschel'scher Sterne auf dem Quadratgrad. In der typischen Vertheilung ist in der Milchstrasse A_m etwa $= 2000$ und

$$A = 7\tfrac{1}{2} \times 10^6.$$

Für sehr helle Stellen der Milchstrasse mag A auf eine Million oder noch auf weniger herabsinken.

Nach den vorstehenden Erwägungen ist also kaum zu bezweifeln, dass kosmischer Staub in der Nähe leuchtender Massen sich als auf nicht unbeträchtliche Strecken ausgebreitete schwach leuchtende Nebelmaterie darstellen kann. Sind die einzelnen Staubtheilchen überaus klein, vom Range der Wellenlänge des Lichtes, so werden bekanntlich die kurzwelligen Strahlen in stärkerem Maasse reflectirt als die langwelligen und die Staubwolke wird sich dann leichter auf der photographischen Platte zeigen als dem Auge direct bemerkbar machen.

Es scheint nicht unwahrscheinlich, dass gewisse Theile der Spiralnebel, auf solche erleuchtete Staubwolken zurückzuführen sind. Unsere Sonne ist, worauf das Zodiacallicht hindeutet, von einer dünnen Staubwolke umgeben, welche über die Erdbahn hinausreicht. Sie wird den nächsten Fixsternen deshalb als ein nebliger Stern erscheinen. Die Nebelhülle ist freilich wenig ausgedehnt, hat aber, wie leicht zu sehen, für ausserhalb des Sonnensystems gelegene Beobachter durchaus noch merkliche Helligkeit, insoweit sie natürlich nicht durch den in ihrer Nähe stehenden Stern überstrahlt wird.

2.

Wie schon erwähnt wurde, zähle ich zu den staubförmigen kosmischen Massen das Zodiacallicht. Unter den mancherlei Hypothesen, welche zur Erklärung dieses Phänomenes aufge-

stellt worden sind, scheint mir die einfachste folgende zu sein: Der Raum des Sonnensystemes in der Nähe der Sonne bis zu Gegenden, welche die Erdbahn jedenfalls noch umschliessen, ist ausgefüllt mit Theilchen kosmischen Staubes, welche das Sonnenlicht zurückwerfen. Diese Staubwolke wird sich um eine Ebene, in welcher die Axe des Zodiacallichtes liegt, gruppiren, so dass sie in einer auf die Ebene senkrechten Richtung eine relativ geringe Ausdehnung besitzt. In der genannten Ebene selbst wird sie, da das Zodiacallicht ständige Unterschiede im Aussehen, die von der Jahreszeit abhängen, nicht zu zeigen scheint, nach allen Richtungen gleich ausgebreitet sein. In der Hauptsache wird also diese Staubwolke die Form einer Rotationsscheibe aufweisen, deren Mitte in der Sonne liegt und die über die Erdbahn hinausreicht. Die Dichtigkeit der Massenvertheilung wird wahrscheinlich von der Sonne nach Aussen zu abnehmen und es wäre möglich, dass sich die staubförmige Materie bei zu grossen Entfernungen von der Sonne nachweisen liesse, aber in viel grösserer Sonnenentfernung, als die der Erde, wird sie jedenfalls überaus dünn und ihr Einfluss also sehr gering sein müssen.

Ob die Axe des Zodiacallichtes wirklich in der Ekliptik liegt und also die Rotationsaxe der Scheibe senkrecht darauf steht, bleibt dahingestellt. Früher hat man daran nicht gezweifelt, neuerdings aber haben zuverlässige Beobachter dies gethan. So hat Herr Marchand[1]) und ganz neuerdings Herr M. Wolf[2]) gefunden, dass die Axe des Zodiacallichtes eher in der Ebene des Sonnenaequators als in der Ekliptik liegend anzunehmen sei.

Die oben erwähnte Ansicht über das Zodiacallicht drängt sich von selbst auf, wenn man sich erinnert, dass auch sonst verschiedene astronomische Erfahrungen auf die Anwesenheit kosmischen Staubes, namentlich in der Umgebung der Sonne

---

[1]) Compt. Rend. Band CXXI, S. 1134. 1895.

[2]) Ueber die Bestimmung der Lage des Zodiacallichts und den Gegenschein. Sitzb. d. Münchener Akademie d. W. 1900. S. 197—207.

unzweideutig hinweisen. Vor 9 Jahren[1]) habe ich mich ausdrücklich zu dieser Ansicht bekannt, die auch von anderer Seite, so von dem um die Erforschung des Zodiacallichtes hochverdienten A. Searle verfochten worden ist und eine nähere Begründung in Aussicht gestellt. Dass eine solche bisher nicht erfolgt ist, lag einmal darin, dass 1 Jahr später Herr Searle[2]) die Sachlage eingehend beleuchtet hat und ferner darin, dass zuverlässige photometrische Angaben über die Helligkeitsvertheilung im Zodiacallicht nicht zu beschaffen waren und meine eigenen dahin gerichteten Versuche einen Erfolg nicht hatten.

Eine Aenderung dieser Sachlage ist zwar bisher nicht eingetreten, aber es ist durch die neuesten Arbeiten von M. Wolf die Aussicht eröffnet worden eine solche erwarten zu können. Herrn Wolf ist es in der That gelungen, eine photographische Methode zu finden, welche die Helligkeitsvertheilung im Zodiacallichte zu erforschen erlaubt und diese scheint mir demnach einen höchst bedeutungsvollen Fortschritt auf diesem Gebiete anzubahnen. Man darf also hoffen in nicht zu ferner Zeit die erforderlichen photometrischen Daten zu erhalten, welche über die Zulässigkeit oder Unzulässigkeit der einzelnen Ansichten über das Wesen des Zodiacallichts im Grossen und Ganzen zu entscheiden gestatten werden.

In dieser Richtung lässt sich freilich, wie ich glaube, schon jetzt manches sagen und die Ausarbeitung der verschiedenen Theorien im Einzelnen dürfte zur Ausscheidung der einen oder andern von diesen, als unzulässig, führen. Eine solche mehr ins Détail gehende Beleuchtung hat einer meiner Schüler unternommen. Ohne dieser vorgreifen zu wollen, möchte ich mir hier nur einige ganz kurze allgemeine Bemerkungen erlauben mit Zugrundelegung der oben erörterten Ansicht über das Wesen des Zodiacallichtes. Veranlasst werde ich hierzu durch zweierlei Umstände:

---

[1]) Ueber allgemeine Probleme der Mechanik des Himmels. München 1892.

[2]) Researches on the Zodiacal Light. Annales of the Harvard College Observatory. Vol. XIX, II, 1893.

Erstens ist in verschiedenen Publicationen, zum Theil von populärer Tendenz, mein Name mit Ansichten über das Zodiacallicht in Verbindung gebracht worden, die ich niemals gehabt und noch weniger ausgesprochen habe. Dann aber sind auch Einwände gegen die oben erwähnte Ansicht vorgebracht worden, die ich bereits a. a. O. widerlegt habe, ohne freilich diese Widerlegung durch mathematische Formeln unterstützt zu haben. Das letztere möchte ich in allgemeinen Umrissen nunmehr nachholen.

Die Theorie der Beleuchtung von Staubwolken tritt hier in der einfachsten Form auf, denn die gegenseitige Beschattung und Verdeckung der einzelnen Theilchen kann kaum einen bemerkbaren Einfluss ausüben, weil die Masse des Zodiacallichtes jedenfalls ausserordentlich dünn verstreut ist, wie der hohe Grad von Durchsichtigkeit dieses Gebildes beweist. Es wäre möglich, dass hierüber genauere Auskunft durch systematisch ausgeführte photometrische Fixsternbeobachtungen zu erlangen wäre, denn wenn eine merkbare Schwächung der das Zodiacallicht durchquerenden Lichtstrahlen stattfindet, müssten Sterne, die in der Nähe der Axe des Zodiacallichtes stehen, Helligkeiten zeigen, die von der Elongation von der Sonne abhängen. Die Schwierigkeit einer solchen Untersuchung liegt in dem Umstande, dass man die Sterne bis zu beträchtlicher Annäherung an die Sonne verfolgen müsste und somit die Extinction durch die Erdatmosphäre einen bedeutenden Einfluss erhielte. Man würde deshalb wohl ein positives Resultat nur dann erhalten, wenn das Zodiacallicht das Sternlicht um einen nicht zu kleinen Procentsatz schwächen würde. Indessen wäre auch ein negatives Resultat offenbar von wissenschaftlichem Interesse.

Nach dem oben Gesagten werden wir anzunehmen haben, dass die Anzahl der in der Raumeinheit enthaltenen, das Zodiacallicht verursachenden kugelförmigen Körper $\frac{N}{R_1}$ (s. oben) eine Function des Ortes ist. Es soll jetzt mit σ der Radius einer der kleinen Kugeln, mit ϱ und r die Entfernung eines Volumelementes von der Sonne bezw. von der Erde, schliesslich mit

a die Entfernung Erde-Sonne bezeichnet werden. Die Flächenhelligkeit h eines kleinen Theiles des Himmels, wo das Zodiacallicht sichtbar ist, wird man ganz analog dem Früheren erhalten:

$$dh = \Phi \cdot f(\alpha)\, dr.$$

Hierin hat Φ die Bedeutung:

$$\Phi = \tfrac{3}{4} J \mu \frac{R^2}{\varrho^2} \cdot \frac{\delta}{\sigma}; \quad \delta = \tfrac{4}{3} \pi \sigma^3 \frac{N}{R_1},$$

wo also J, μ, R und $f(\alpha)$ die frühere Bedeutung haben und δ als die Dichtigkeit der Massenvertheilung anzusehen ist. Es soll nun hier nur die Lichtvertheilung in der Axe des Zodiacallichtes untersucht werden. Dann wird die Sonne im Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius P liegen, welcher die staubförmige Masse begrenzt. Innerhalb desselben Kreises soll die Erde in der Entfernung a vom Centrum liegen und ferner soll ϑ der Winkel zwischen den Richtungen Erde-Volumelement und Erde-Sonne sein. Die erstere Richtung soll den Kreis in der Entfernung r_1 von der Erde treffen. Wegen der oben erörterten Annahme, dass nämlich die Helligkeit des Zodiacallichtes keine Abhängigkeit von der Jahreszeit zu haben scheint, wird Φ nur als Function von ϱ anzunehmen sein. So ergiebt sich also für die Flächenhelligkeit h in der Elongation ϑ von der Sonne der Ausdruck:

$$h = \int_0^{r_1} \Phi(\varrho) \cdot f(\alpha) \cdot dr. \tag{1}$$

Hierin kann man nach Belieben r, ϱ oder α als Integrationsvariable einführen und jede dieser Formen bietet gewisse Vortheile dar. Dabei sind die Formeln zu benutzen:

$$\varrho^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\vartheta$$

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\vartheta}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\vartheta}}$$

$$r_1 = a\cos\vartheta + \sqrt{P^2 - a^2\sin^2\vartheta}$$

Führt man ϱ als Integrationsvariable in (1) ein, so hat man:

$$d\varrho = \frac{r - a\cos\vartheta}{\varrho} \cdot dr = \cos\alpha \cdot dr$$

und zerlegt man das Integral in (1) für: $\vartheta \cdot \leqq 90^0$ in:

$$\int_0^{r_1} = \int_0^{a\cos\vartheta} + \int_{a\cos\vartheta}^{2a\cos\vartheta} + \int_{2a\cos\vartheta}^{r^1}$$

so ergiebt sich, wenn noch $f(\alpha) + f(\pi - \alpha) = \varphi(\alpha)$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} h &= \int_{a\cos\vartheta}^{a} \frac{\Phi(\varrho)}{\cos\alpha}\,\varphi(\alpha)\,d\varrho + \int_a^P \Phi(\varrho)\cdot\frac{f(\alpha)}{\cos\alpha}d\varrho \quad .\ .\ .\ .\ \vartheta < 90^0 \\ h &= \int_a^P \Phi(\varrho)\cdot\frac{f(\alpha)}{\cos\alpha}\,d\varrho \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \vartheta > 90^0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Hier ist α zu bestimmen durch:

$$\cos\alpha = +\frac{1}{\varrho}\sqrt{\varrho^2 - a^2\sin^2\vartheta}.$$

Führt man schliesslich α als Integrationsvariable ein:

$$dr = -a\sin\vartheta\cdot\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha},$$

so hat man:

$$h = a\sin\vartheta\int_{\alpha_0}^{\pi-\vartheta}\Phi(\varrho)\cdot\frac{f(\alpha)}{\sin^2\alpha}\cdot d\alpha, \quad (3)$$

wo $\varrho = \frac{a\sin\vartheta}{\sin\alpha}$ und α_0 gegeben ist durch $\sin\alpha_0 = \frac{a\sin\vartheta}{P}$ und zwar als spitzer Winkel anzunehmen ist. Man kann übrigens, wenn man will, (3) auch in 2 Formeln zerspalten:

$$\left.\begin{aligned} h &= a\sin\vartheta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\vartheta}\Phi(\varrho)\cdot\frac{\varphi(\alpha)d\alpha}{\sin^2\alpha} + a\sin\vartheta\int_{\alpha_0}^{\vartheta}\Phi(\varrho)\cdot\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\sin^2\alpha}\,..\,\vartheta < 90^0 \\ h &= a\sin\vartheta\int_{\alpha_0}^{\pi-\vartheta}\Phi(\varrho)\cdot\frac{f(\alpha)d\alpha}{\sin^2\alpha} \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \vartheta > 90^0 \end{aligned}\right\} \quad (3^a)$$

Aus (2) ersieht man sofort, dass der Verlauf der Helligkeit des Zodiacallichtes von $\vartheta = 90^0$ bis 180^0, also bis zur

Stelle des Gegenscheines, wesentlich von der Function $\frac{f(a)}{\cos a}$ abhängt, also vom elementaren Beleuchtungsgesetz. Für jedes ϱ nimmt hier nämlich a fortwährend ab mit zunehmendem ϑ. Wenn demnach $\frac{f(a)}{\cos a}$ mit zunehmendem a fortwährend wächst, so wird die Helligkeit des Zodiacallichtes immer abnehmen, wenn man von der Elongation 90° bis zur Elongation 180° fortschreitet. Thatsächlich zeigen manche Beleuchtungsgesetze diese Eigenschaft. So ist für das Lambert'sche und das Euler'sche Gesetz die genannte Function, abgesehen von constanten Factoren:

$$\operatorname{tg} a + \pi - a, \quad \frac{\cos^2 \frac{1}{2} a}{\cos a}.$$

Wenn man also eine dieser Formeln zur Anwendung bringt, könnte der Gegenschein nicht ohne Weiteres erklärt werden. Aber durchaus nicht alle Beleuchtungsgesetze zeigen diese Eigenschaft. So ergiebt das Absorptionsgesetz $\frac{\cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon}$ eine Function $\frac{f(a)}{\cos a}$, welche von $a = 0$ bis $a = 20^0$ (ihr Logarithmus etwa um -0.007) abnimmt und man wird daraus schliessen, dass bei Zugrundelegung dieses Beleuchtungsgesetzes die Helligkeit des Zodiacallichtes bei $\vartheta = 180^0$ etwas grösser sein muss, als in einer etwas kleineren Elongation. Diese Lichtzunahme ist an sich allerdings sehr gering. Es ist aber bekannt, dass die Helligkeit sehr rauher Körper in der Nähe der Opposition viel stärker zunimmt, als alle die gewöhnlich benutzten Beleuchtungsformeln ergeben. So ist diese Thatsache bei der photometrischen Beobachtung der kleinen Planeten besonders deutlich hervorgetreten, worauf u. A. auch Herr Searle sehr nachdrücklich hingewiesen hat. Man wird deshalb wohl behaupten dürfen, dass hier, zunächst wenigstens, ernstliche Schwierigkeiten für die obige Theorie des Zodiacallichtes nicht vorliegen. Zum mindesten müsste doch erst das Zeugnis von

photometrischen Beobachtungen in der Nähe des Gegenscheines abgewartet werden.

Was den Verlauf der Helligkeit für Elongationen $< 90^0$ betrifft, so wird hier die Beschaffenheit der Function Φ von grösstem Einflusse sein. Während für den Theil des Zodiacallichts zwischen 90^0 und 180^0 Elongation nur die Lichtreflexion an Theilchen zwischen $\varrho = a$ bis $\varrho = P$ in Frage kommt, treten für kleinere Elongationen immer neue Theilchen, die näher an der Sonne stehen, mit ins Spiel und daraus folgt eben, dass man h als Function von ϑ durch passende Wahl von Φ innerhalb eines weiteren Spielraumes wird darstellen können. Eine Einschränkung erleidet die Darstellung eines beliebigen Verlaufes von $h(\vartheta)$ schon dadurch, dass die Function Φ ihrer Bedeutung gemäss nur positive Werthe für alle ϱ haben darf. Bei der gegenwärtigen Unkenntnis des thatsächlichen Verlaufes von h kann zunächst nicht auf diesen Punkt eingegangen werden. Vorerst dürfte aber die Behauptung grundlos sein, die hier vertretene Ansicht über das Wesen des Zodiacallichtes könne nicht mit den beobachteten Thatsachen in Einklang gebracht werden.

Mit Sicherheit dürfte anzunehmen sein, dass die Helligkeit des Zodiacallichtes von kleinen Elongationen bis zu solchen von etwa 90^0 fortwährend abnimmt und dies kann durch passende Wahl von Φ erreicht werden. Durch Differentiation von (3) nach ϑ ergiebt sich nämlich leicht:

$$\frac{\partial h}{\partial \vartheta} = -a \sin\vartheta \left[\Phi(a)\frac{f(\pi-\vartheta)}{\sin^2\vartheta} + \frac{a}{P}\Phi(P)\frac{f(a_0)}{\sin^2 a_0}\frac{\cos\vartheta}{\cos a_0}\right]$$

$$+ a\cos\vartheta \int_{a_0}^{\pi-\vartheta} \frac{f(a)}{\sin^2 a}\frac{d}{d\varrho}(\varrho\,\Phi)\cdot d\,a.$$

Wenn demnach Φ stärker wie $\frac{1}{\varrho}$ mit wachsendem ϱ abnimmt, wird zwischen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 90^0$ sicher $\frac{d\,h}{d\,\vartheta}$ negativ sein, welches elementare Beleuchtungsgesetz auch zu Grunde

gelegt werden mag und man kann durch passende Wahl von $\Phi(\varrho)$ die Abnahme von h beliebig gross machen. Ganz in der Nähe von $\vartheta = 90^0$ wird übrigens unter allen Umständen $\frac{dh}{d\vartheta}$ negativ sein, da hier $\cos\vartheta$ sehr klein ist.

Bei einer Vergleichung der Theorie mit der Beobachtung wird man also so zu verfahren haben. Man wird einen Ausdruck für $\Phi(\varrho)$ interpolatorisch anzusetzen haben, der soviele Parameter enthält, dass man durch deren Bestimmung einen genügenden Anschluss an die Beobachtungen zu erzielen hoffen darf. Dabei ist zu beachten, dass die Beschaffenheit der Function $\Phi(\varrho)$ zwischen $\varrho = 0$ bis $\varrho = a$ ganz gleichgültig für die Darstellung der Helligkeit des Zodiacallichtes bei Elongationen $> 90^0$ ist. Es soll hier, wie schon erwähnt, auf diese Angelegenheit nicht näher eingegangen werden, da so gut wie gar nichts sicheres über den quantitativen Verlauf der Helligkeit des Zodiacallichtes bekannt ist. Einige Schwierigkeit wird indessen immer die Wahl des elementaren Beleuchtungsgesetzes verursachen.

Tabelle: $\Psi_\nu(\alpha)$ (Seite 274).

$\alpha \mid \nu_1$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0^0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0^{0}	0^{0}	0^{0}	0^{0}	0^{0}	0^{0}	0^{0}	0^{0}	0^{0}	0^{0}
10	0^{0}	0^{0}	0^{0}	1^{1}	1^{1}	1^{1}	1^{1}	1^{1}	1^{1}	1^{1}
15	1^{1}	1^{1}	2^{2}	2^{1}	3^{2}	3^{2}	4^{3}	4^{3}	4^{3}	5^{4}
20	2^{1}	4^{3}	5^{3}	7^{5}	8^{5}	9^{6}	11^{7}	12^{8}	13^{9}	14^{9}
25	4^{2}	9^{5}	12^{7}	16^{9}	19^{11}	22^{13}	24^{13}	27^{15}	29^{16}	30^{16}
30	9^{5}	17^{3}	25^{13}	31^{15}	37^{18}	43^{21}	47^{23}	51^{24}	55^{26}	58^{28}
35	17^{8}	31^{14}	44^{19}	55^{24}	66^{29}	74^{31}	82^{35}	88^{37}	94^{39}	99^{41}
40	27^{10}	52^{21}	73^{27}	91^{36}	106^{40}	119^{45}	131^{49}	140^{52}	147^{53}	154^{55}
45	43^{16}	81^{29}	112^{39}	139^{48}	161^{55}	180^{61}	195^{64}	207^{67}	217^{70}	224^{70}
50	65^{22}	119^{38}	165^{53}	202^{63}	233^{72}	258^{78}	277^{82}	292^{85}	302^{85}	310^{86}
55	93^{28}	169^{50}	232^{67}	282^{80}	322^{89}	353^{95}	376^{99}	393^{101}	404^{102}	411^{101}
60	129^{36}	233^{64}	316^{84}	381^{99}	431^{109}	468^{115}	494^{118}	512^{119}	522^{118}	527^{116}
65	174^{45}	311^{78}	417^{101}	498^{117}	559^{128}	601^{133}	629^{135}	646^{134}	653^{131}	654^{127}
70	228^{54}	404^{93}	537^{120}	635^{137}	705^{146}	752^{151}	780^{151}	794^{148}	796^{143}	789^{135}
75	293^{65}	514^{110}	676^{139}	792^{157}	870^{165}	919^{167}	945^{165}	953^{159}	947^{151}	931^{142}
80	369^{76}	640^{126}	834^{158}	966^{174}	1052^{182}	1100^{181}	1121^{176}	1120^{167}	1103^{156}	1075^{144}
85	457^{88}	784^{144}	1010^{176}	1158^{192}	1248^{196}	1292^{192}	1304^{183}	1291^{171}	1260^{157}	1218^{143}
90	557^{100}	945^{161}	1203^{193}	1365^{207}	1455^{207}	1492^{200}	1491^{187}	1462^{171}	1414^{154}	1356^{138}
95	670^{113}	1121^{176}	1412^{209}	1584^{219}	1670^{215}	1695^{203}	1676^{185}	1629^{167}	1562^{148}	1485^{129}
100	795^{125}	1314^{193}	1633^{221}	1811^{227}	1889^{219}	1897^{202}	1857^{181}	1788^{159}	1700^{138}	1603^{118}
105	932^{137}	1519^{205}	1865^{232}	2043^{232}	2106^{217}	2092^{195}	2029^{172}	1935^{147}	1824^{124}	1706^{103}
110	1081^{149}	1736^{217}	2102^{237}	2274^{231}	2317^{211}	2278^{186}	2187^{158}	2067^{132}	1932^{108}	1794^{88}
115	1239^{158}	1961^{225}	2342^{240}	2500^{226}	2517^{200}	2448^{170}	2327^{140}	2181^{114}	2023^{91}	1866^{72}
120	1407^{168}	2191^{230}	2577^{235}	2716^{216}	2701^{184}	2599^{151}	2448^{121}	2275^{94}	2096^{73}	1921^{55}
125	1583^{176}	2421^{230}	2805^{228}	2915^{199}	2865^{164}	2728^{129}	2547^{99}	2350^{75}	2151^{56}	1961^{40}
130	1763^{180}	2647^{226}	3017^{212}	3092^{177}	3004^{139}	2833^{105}	2623^{76}	2405^{55}	2190^{39}	1988^{27}
135	1945^{182}	2863^{216}	3209^{192}	3244^{152}	3117^{113}	2913^{80}	2679^{56}	2442^{37}	2215^{25}	2004^{16}
140	2126^{181}	3064^{201}	3375^{166}	3367^{123}	3201^{84}	2969^{56}	2715^{36}	2466^{24}	2229^{14}	2013^{9}
145	2302^{176}	3242^{178}	3510^{135}	3458^{91}	3260^{59}	3005^{36}	2736^{21}	2478^{12}	2237^{8}	2017^{4}
150	2466^{164}	3391^{149}	3612^{102}	3520^{62}	3295^{35}	3024^{19}	2747^{11}	2483^{5}	2240^{3}	2019^{2}
155	2613^{147}	3506^{115}	3680^{68}	3556^{36}	3312^{17}	3032^{8}	2751^{4}	2485^{2}	2240^{0}	2019^{0}
160	2736^{123}	3583^{77}	3717^{37}	3571^{15}	3319^{7}	3035^{3}	2752^{1}	2485^{0}	2240^{0}	2019^{0}
165	2826^{90}	3624^{41}	3731^{14}	3576^{5}	3320^{1}	3035^{0}	2752^{0}	2485^{0}	2240^{0}	2019^{0}
170	2876^{50}	3637^{13}	3733^{2}	3576^{0}	3320^{0}	3035^{0}	2752^{0}	2485^{0}	2240^{0}	2019^{0}
175	2890^{14}	3638^{1}	3733^{0}	3576^{0}	3320^{0}	3035^{0}	2752^{0}	2485^{0}	2240^{0}	2019^{0}
180	2890^{0}	3638^{0}	3733^{0}	3576^{0}	3320^{0}	3035^{0}	2752^{0}	2485^{0}	2240^{0}	2019^{0}

Der Druck des Lichts auf kleine Kugeln und die Arrhenius'sche Theorie der Cometenschweife.

Von **Karl Schwarzschild.**

(Eingelaufen 6. Juli.)

Die eigentümlichen Formen der Cometenschweife lassen sich erklären durch Annahme einer abstossenden Kraft, die von der Sonne auf die äusserst fein verteilte Schweifmaterie ausgeübt wird. Während früher diese Kraft nur ganz vage als elektrischen Ursprungs bezeichnet wurde, hat vor kurzem Herr Sv. Arrhenius[1]) darauf hingewiesen, dass solche abstossende Wirkungen dem Druck entspringen können, welchen nach der Maxwell'schen Theorie die Sonnenstrahlung auf jeden absorbierenden oder reflektierenden Körper ausübt. Ueber die Existenz des Maxwell'schen Drucks der Lichtstrahlen kann kein Zweifel sein, obwohl er experimentell mit hinreichender quantitativer Sicherheit noch nicht nachgewiesen wurde. Er muss bestehen, wofern die Grundauffassung Maxwell's richtig ist, dass in den Lichtschwingungen eben elektrische Kräfte oscillieren, Kräfte, welche die geladenen Jonenpaare der ponderabeln Massen angreifen. Zudem haben sich die Folgerungen, welche sich aus den Hauptsätzen der mechanischen Wärmetheorie in Verbindung mit dem Maxwell'schen Druck ergaben, an der Erfahrung glänzend bestätigt. Es liegt daher in dem Druck der Lichtstrahlen eine causa realis, eine bei der Bildung der Cometenschweife, wie auch bei anderen Himmels-

[1]) Physikalische Zeitschrift. II. Jahrgang. Heft 6—7.

erscheinungen, zweifellos in irgend einem geringeren oder stärkeren Grade mitwirkende Ursache vor. Die Frage ist nur, ob dieser Druck quantitativ hinreichende Beträge erlangen kann, und das ist ein Punkt, in dem die Darlegungen von Arrhenius nicht ganz befriedigend sind.

Fällt eine ebene Welle normal auf eine vollkommen schwarze Platte, so erleidet letztere einen Druck, der nach Maxwell gleich der in der Volumeneinheit enthaltenen Energie E des Wellenzuges ist. Auf eine vollkommen schwarze Kugel vom Radius a, welche das Licht über eine Fläche von der Grösse πa^2 hin abfängt, wird daher ein Druck $\pi a^2 E$ wirken. Die auf dieselbe Kugel wirkende Schwerkraft hat den Betrag $\frac{4\pi}{3} g \cdot s \cdot a^3$, wo g die Schwerebeschleunigung, s das spezifische Gewicht des Kugelmateriales ist. Je kleiner der Kugelradius a, um so stärker wird daher der Druck im Verhältnis zur Schwerkraft. Unter Annahme der Solarkonstante 2.5 und des spezifischen Gewichtes s gleich 0.8 (Kohlenwasserstoff der Cometen) findet man mit Herrn Arrhenius, dass bei einem Kugeldurchmesser von 1.9 μ der Druck gleich der Schwerkraft wird. Sinkt der Kugeldurchmesser bis auf 0.1 μ herab, so übertrifft die abstossende Kraft der Sonnenstrahlung die Schwerkraft um das 18.5fache, und erreicht damit den Höchstbetrag, welcher zur Erklärung der gestrecktesten Cometenschweife erforderlich ist.[1])

In dieser Berechnung des Drucks liegt nun eine Ungenauigkeit. Der Druckwert $\pi a^2 E$ gilt nur, solange die Kugel das auffallende Licht gänzlich abfängt und in dem Raume hinter ihr völliger Schatten ist, solange man also die Beugungserscheinungen vernachlässigt. Das ist bei grossen Kugeln gestattet. Bei Kugeln aber, deren Durchmesser von der Grössenordnung der Wellenlängen des Lichts ist, — und gerade solche kommen nach den eben angeführten Zahlen für die Erklärung der Cometenschweife in Betracht — können

---

[1]) Vgl. Bredichin, Annales de l'Observatoire de Moscou. 1886.

durch die Beugung des Lichts die Verhältnisse sehr wesentlich geändert werden. Um ganz kleine Kugeln, deren Radius auch gegen die Wellenlänge sehr klein ist, schlägt die Lichtwoge herum, ohne in ihrem Verlaufe merklich gestört zu werden, und man kann sich hier durch einfache Ueberlegungen analog denen, auf welche Lord Rayleigh[1]) seine Theorie der blauen Farbe des Himmels gründet, überzeugen, dass mit fortdauernder Verringerung des Kugelradius der Druck des Lichts sogar wieder mehr und mehr unter die Schwerkraft herabsinken muss. Das Verhältnis des Lichtdrucks zur Schwerkraft wächst also nicht immerfort mit Verkleinerung des Kugelradius, sondern erreicht ein gewisses Maximum für Kugeln von der Grössenordnung der Wellenlänge. Es ist erst noch zu untersuchen, ob das maximale mögliche Verhältnis von Lichtdruck zu Schwerkraft wirklich den Wert 18.5 erreicht, den man, wie erwähnt, zur Erklärung der gestrecktesten Cometenschweife braucht.

Ohne auf die schwer diskutabeln Fragen einzugehen, inwieweit eine Anschauung, welche die Cometenschweife aus lauter getrennten Tröpfchen im leeren Raum bestehen lässt, sich unseren sonstigen Kenntnissen von den Cometen anschliesst, will ich hier versuchen, nur über diesen einen quantitativen Punkt zu entscheiden. Irgendwo in der Welt muss es ja vorkommen, dass ein kleines Teilchen im leeren Raum dem Druck des Lichts ausgesetzt ist, und daher ist dem Resultate der Rechnung in jedem Falle die physikalische Anwendbarkeit gewiss, auch wenn sich aus andern Gründen etwa die Arrhenius'sche Theorie der Cometenschweife nicht halten lassen sollte.

Bekanntlich ist der Begriff des vollkommen schwarzen Körpers mathematisch nicht exakt zu fassen und es erscheint auch physikalisch höchst zweifelhaft, ob ein Partikelchen irgend eines gewöhnlichen schwarzen Körpers von 0.1 μ bis 1 μ Durchmesser noch im geringsten Eigenschaften aufweist, nach denen man es als „schwarz" bezeichnen könnte. Zur exakteren Be-

---

[1]) Philosoph. Magazine. 1871.

rechnung der Grösse des Lichtdrucks habe ich daher die kleine Kugel, die wir in den Strahlenzug eingeschaltet denken, nicht als vollkommen schwarz, sondern als vollkommen reflektierend vorausgesetzt. Es ist anzunehmen, dass für vollkommen reflektierendes Material der Lichtdruck besonders gross wird und man daher auf Grund dieser Annahme eben das Gewünschte, nämlich eine obere Grenze für den Lichtdruck, erhält.

Abgesehen von der Beziehung zur Theorie der Cometenschweife darf das Folgende vielleicht auch ein gewisses selbstständiges Interesse für sich in Anspruch nehmen. Bevor der Druck des Lichts auf eine Kugel berechnet werden konnte, musste eine exakte Theorie der Reflexion und Beugung des Lichts durch die Kugel gegeben werden. Es ist das ein Problem, dem schon Clebsch in Bd. 61 des Crelle'schen Journals eine umfangreiche Abhandlung gewidmet hat.[1] Indessen hat Clebsch Grenzbedingungen benutzt, die wir heute nicht mehr als gültig anerkennen. Er nimmt an, dass im Aether neben den transversalen Wellen auch longitudinale auftreten können, verlangt, dass an der Oberfläche der vollkommen spiegelnden Kugel alle drei Componenten der elastischen Verschiebung verschwinden, und wird dann notgedrungen zu der Folgerung geführt, dass aus einfallenden Transversalwellen durch Reflexion an der Kugel Longitudinalwellen entstehen. Clebsch hat ausserdem in die Behandlung dieses speziellen Problems die Ableitung zahlreicher allgemeiner Sätze aus der Theorie der Kugel- und Cylinderfunktionen eingeschachtelt, die damals wohl noch weniger in den festen Wissensbestand übergegangen waren, und das belastet seine Darstellung, so wertvoll jene Ableitungen an und für sich sind. Daher wäre eine Neubehandlung des Problems schon von formalem Gesichtspunkt aus wünschenswert gewesen, wenn sie nicht durch die erwähnte Aenderung der Grenzbedingungen notwendig geworden wäre.

---

[1] Hierauf bin ich erst nach Ausführung dieser Arbeit durch eine freundliche Mitteilung von Herrn Prof. A. Sommerfeld aufmerksam gemacht worden.

§ 1. Mathematische Formulierung des Beugungsproblems.

Das zunächst zu behandelnde Beugungsproblem ist dieses. Eine Kugel vom Radius a habe ihren Mittelpunkt im Nullpunkt des Coordinatensystems. Eine ebene Welle falle in der Richtung der x-Axe von ihrer positiven Seite her ein. Wir wollen zunächst annehmen, dass dieselbe linear polarisiert sei und zwar so, dass die elektrische Kraft in der x, y Ebene schwinge. Für die Componenten X, Y, Z, L, M, N der elektrischen und magnetischen Kraft gelten überall ausserhalb der Kugel die Maxwell'schen Gleichungen:

$$\frac{1}{V}\frac{dL}{dt}=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz} \quad \frac{1}{V}\frac{dX}{dt}=\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy} \quad (V = \text{Licht-geschwindigkeit})$$

nebst den entsprechenden durch cyklische Vertauschung der Coordinaten entstehenden. Die Kugel selbst soll vollkommen reflektierend oder mit anderen Worten ein vollkommener Leiter sein. Dann ist ihre Oberfläche unter allen Umständen eine Niveaufläche der elektrischen Kraft, die in die Oberfläche fallenden Kraftcomponenten müssen verschwinden, es müssen die Beziehungen gelten:

Auf der Kugeloberfläche:

$$Xy - Yx = Xz - Zx = Yz - Zy = 0.$$

Im Unendlichen muss die Componente Y der elektrischen Kraft ein Glied der Form $\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{\tau}\right)$ enthalten, welches die ebene polarisierte einfallende Welle darstellt. Deren Wellenlänge ist zugleich durch diesen Ansatz zu λ, ihre Periode zu τ und ihre Amplitude und Intensität zu 1 festgelegt. Sonst dürfen in X, Y, Z im Unendlichen keine Glieder vorkommen, welche die physikalische Bedeutung einfallender Wellenzüge haben.

Wir setzen nun:

$$
\begin{aligned}
X &= \text{pars real}\,(\xi\, e^{iqt}) & L &= \text{pars real}\,(\lambda\, e^{iqt}) \\
Y &= \text{pars real}\,(\eta\, e^{iqt}) & M &= \text{pars real}\,(\mu\, e^{iqt}) \\
Z &= \text{pars real}\,(\zeta\, e^{iqt}) & N &= \text{pars real}\,(\nu\, e^{iqt})
\end{aligned} \qquad 1)
$$

$$q = \frac{2\pi}{\tau},$$

wobei ξ, η, ζ, λ, μ, ν von der Zeit unabhängige komplexe Grössen sein sollen, und erhalten an Stelle der Maxwell'schen Gleichungen die folgenden:

$$i k \lambda = \frac{\delta \zeta}{\delta y} - \frac{\delta \eta}{\delta z} \quad i k \mu = \frac{\delta \xi}{\delta z} - \frac{\delta \zeta}{\delta x} \quad i k \nu = \frac{\delta \eta}{\delta x} - \frac{\delta \xi}{\delta y} \qquad 2)$$

$$i k \xi = \frac{\delta \mu}{\delta z} - \frac{\delta \nu}{\delta y} \quad i k \eta = \frac{\delta \nu}{\delta x} - \frac{\delta \lambda}{\delta z} \quad i k \zeta = \frac{\delta \lambda}{\delta y} - \frac{\delta \mu}{\delta x} \qquad 3)$$

$$k = \frac{2\pi}{\tau V} = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad 4)$$

Durch Elimination der magnetischen Componenten λ, μ, ν ergiebt sich daraus:

$$k^2 \xi + \Delta^2 \xi = 0 \qquad k^2 \eta + \Delta^2 \eta = 0 \qquad k^2 \zeta + \Delta^2 \zeta = 0. \qquad 5)$$

$$\frac{\delta \xi}{\delta x} + \frac{\delta \eta}{\delta y} + \frac{\delta \zeta}{\delta z} = 0. \qquad 6)$$

Die Randbedingungen auf der Kugeloberfläche gehen durch Einführung von ξ, η, ζ über in:

$$\xi y - \eta x = \xi z - \zeta x = \eta z - \zeta y = 0. \qquad 7)$$

Für das Unendliche folgt, dass η ein Glied:

$$\bar{\eta} = e^{ikx} \qquad 8)$$

entsprechend der ebenen einfallenden Welle enthalten muss und dass sonst in ξ, η, ζ keine Teile vorkommen dürfen, welche physikalisch die Bedeutung aus dem Unendlichen einfallender Wellen besitzen. Unsere Aufgabe ist jetzt, drei „Wellenpotentiale“ (Lösungen der Differentialgleichung $k^2 u + \Delta^2 u = 0$) ξ, η, ζ zu finden, welche durch die Bedingung (6) verknüpft

sind, auf der Oberfläche der Kugel den Bedingungen (7) und im Unendlichen der Bedingung (8) genügen.

§ 2. Ansatz der Lösung in Form von Reihenentwicklungen nach Kugel- und Bessel'schen Functionen.

Man führe Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein durch die Beziehungen:

$$x = r\cos\vartheta \qquad y = r\sin\vartheta\cos\varphi \qquad z = r\sin\vartheta\sin\varphi. \tag{9}$$

Es ist bekannt,[1]) dass die Differentialgleichung $k^2 u + \Delta^2 u = 0$ sog. „Zerfällung" nach den drei Coordinaten r, ϑ, φ gestattet, d. h., dass ein partikuläres Integral gegeben wird durch den Ansatz:

$$u = R \cdot \Theta \cdot \Phi. \tag{10}$$

Hierbei bedeutet Φ eine Funktion von φ allein und zwar in unserem Falle $\cos n\varphi$ oder $\sin n\varphi$ (n ganzzahlig), Θ ist eine Funktion von ϑ allein und zwar die n. Zugeordnete der Kugelfunktion irgend einer Ordnung m, für die wir $P_{m,n}(\cos\vartheta)$ schreiben werden. Schliesslich bedeutet R eine Funktion von r allein und zwar eine Lösung R_m der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 R_m}{d r^2} + \frac{2}{r}\frac{d R_m}{d r} + R_m\left(k^2 - \frac{m(m+1)}{r^2}\right) = 0. \tag{11}$$

Nutzt man die Willkürlichkeit der beiden ganzen Zahlen m und n aus und superponiert alle aus verschiedener Wahl derselben hervorgehenden partikulären Integrale der Form (9), so erhält man das allgemeinere Integral:

$$\begin{aligned} u = \sum_m \sum_n G_{m,n} R_m(r) P_{m,n}(\cos\vartheta)\cos n\varphi \\ + \sum_m \sum_n H_{m,n} R_m(r) P_{m,n}(\cos\vartheta)\sin n\varphi \end{aligned} \tag{12}$$

worin die G und H willkürliche Constanten sind, und es lässt sich zeigen, dass in Rücksicht auf die weitere Willkürlich-

---

[1]) Vgl. Pockels, Ueber die Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Teubner 1891, pag. 109—111.

keit der Integrationskonstanten in den Lösungen R_m der Differentialgleichung (11) dieser neue Ansatz sogar die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung $k^2 u + \Delta^2 u = 0$ giebt, welche nebst ihren ersten Derivierten ausserhalb einer Kugel um den Nullpunkt eindeutig und stetig ist.[1]) Es folgt demnach, dass jedes der drei Wellenpotentiale ξ, η, ζ, die wir zu bestimmen haben, sich durch eine Doppelsumme der Form (12) darstellen lassen muss, und es erübrigt nur, die darin auftretenden willkürlichen Constanten so zu bestimmen, dass den Bedingungen (6) (7) (8) genügt wird.

Diese Aufgabe vereinfacht sich von vornherein beträchtlich durch folgende Bemerkung: Der einzige Umstand, welcher bewirkt, dass die Lichtbewegung in unserem Problem nicht völlig symmetrisch um die x-Axe herum, unabhängig von φ, wird, ist der, dass die Polarisationsebene der einfallenden Lichtwelle in gewisser Weise vor andern durch die x-Axe gehenden Ebenen ausgezeichnet ist. Es ist danach zu vermuten, dass die Abhängigkeit der Lösung von φ immerhin keine komplizierte sein wird, dass also Glieder mit Sinus oder Cosinus höherer Vielfacher von φ nicht vorkommen werden. In der That, versucht man zunächst für ξ, η, ζ Ausdrücke der Form (12) anzusetzen, so bemerkt man alsbald, dass die grosse Mehrzahl der Constanten G und H verschwinden müssen, und wird zu dem folgenden vereinfachten Ansatz geführt:

$$\xi = \alpha \cos\varphi \qquad \eta = e^{ikx} + \beta + \gamma \cos 2\varphi \qquad \zeta = \gamma \sin 2\varphi \qquad 13)$$

wobei α, β und γ drei von φ unabhängige, also nur r und ϑ enthaltende Grössen sind, die in Form folgender Summen dargestellt werden können:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_m (2m+1)\, A_m\, R_m(r)\, P_{m,1}(\cos\vartheta) \\ \beta &= \sum_m (2m+1)\, B_m\, R_m(r)\, P_{m,0}(\cos\vartheta) \qquad 14) \\ \gamma &= \sum_m (2m+1)\, C_m\, R_m(r)\, P_{m,2}(\cos\vartheta) \end{aligned}$$

[1]) Vgl. Pockels (l. c.), pag. 63 und 111.

Die Grössen A_m, B_m, C_m bedeuten hier noch zu bestimmende Constante, denen aus Bequemlichkeitsrücksichten der Faktor $(2\,m + 1)$ beigefügt wurde.

Der Ansatz (13), (14) liefert für ξ, η, ζ an und für sich Wellenpotentiale. Es erübrigt also, die drei Bedingungen (6) (7) (8) zu erfüllen. Die Einführung der Ausdrücke (13) in die Randbedingungen (7) giebt in Rücksicht darauf, dass eine der Bedingungen (7) eine Folge der beiden anderen ist und weggelassen werden kann:

Für $r = a$:

$$e^{ikx} + \beta - \gamma = 0 \qquad \alpha \sin\vartheta - 2\,\gamma\cos\vartheta = 0\,. \tag{15}$$

Die Bedingungen im Unendlichen verlangen — da das Glied (8) im Ausdruck (13) für η schon abgesondert ist — einfach, dass α, β und γ im Unendlichen keine einfallenden Wellen entsprechenden Teile enthalten. Was die Bedingung (6) angeht, welche für den ganzen Raum gilt, so wollen wir zunächst nur fordern, dass sie für Punkte auf der Oberfläche der Kugel a befriedigt werde. Wir werden später zeigen, dass sie dann auch für den ganzen Raum erfüllt ist. Um noch die Grössen α, β, γ und Polarkoordinaten in die auf die Oberfläche der Kugel beschränkte Bedingung (6) einzuführen, stelle man sich ξ, η, ζ für einen Augenblick bildlich als Geschwindigkeitskomponenten einer Flüssigkeit dar. Die Gleichung (6) bedeutet dann bekanntlich, dass in jedes Volumenelement ebensoviel Flüssigkeit ein- als ausströmt. Man betrachte ein Volumenelement von der Form eines Kegelstumpfs, dessen Basis ein kleines Stück $d\,w$ der Oberfläche der Kugel a, dessen Decke ein Stück $d\,w'$ der Oberfläche der Kugel $a + d\,a$ sei und dessen Mantel durch lauter Abschnitte von Kugelradien gebildet werde. Da die Bedingungen (7) im Bilde besagen, dass längs der Oberfläche der Kugel a keine tangentiale Strömung stattfindet, so kann durch die Mantelfläche keine Flüssigkeitsmasse aus- oder einströmen (oder strenger: diese Flüssigkeitsmasse wird von höherer Ordnung klein). Es müssen

sich also nach (6) die Strömungen durch Basis und Decke ausgleichen. Die radiale Strömungskomponente ist nun:

$$\begin{aligned} R &= \xi \cos\vartheta + \eta \sin\vartheta \cos\varphi + \zeta \sin\vartheta \sin\varphi \\ &= \cos\varphi \, \{a \cos\vartheta + [e^{ikx} + \beta + \gamma] \sin\vartheta\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Durch die Basis strömt daher die Masse $d\,w \cdot R$ ein. Durch die Decke $d\,w' = d\,w \left(\frac{a + d\,a}{a}\right)^2$ strömt die Masse $d\,w' \cdot \left(R + d\,a \cdot \frac{\delta R}{\delta r}\right)$ aus. Demnach verlangt (6), dass:

$$R\,d\,w = \left(R + d\,a \cdot \frac{\delta R}{\delta r}\right) d\,w'$$

oder nach einfacher Reduktion:

$$0 = \frac{2}{a} \cdot R + \frac{\delta R}{\delta r}$$

ist. Führt man hierin (16) ein, so erhält man als neue Oberflächenbedingung, welche als Ersatz der Bedingung (6) eintritt:

Für $r = a$:

$$0 = \cos\vartheta \left(r \frac{\delta a}{\delta r} + 2a\right) + \sin\vartheta \left[r \frac{\delta}{\delta r}(\beta + \gamma + e^{ikx}) + 2(\beta + \gamma + e^{ikx})\right]. \tag{17}$$

Nunmehr ist unsere Aufgabe darauf reduziert, die Grössen A_m, B_m, C_m und die noch unbestimmten Integrationskonstanten der Lösungen R_m der Differentialgleichungen (11) so zu bestimmen, dass die Summen (14) den drei Randbedingungen (15) und (17) genügen und im Unendlichen keine Teile enthalten, welche einfallenden Wellen entsprechen.

Zur Vorbereitung der Lösung stelle ich einige Sätze aus der Theorie der Kugel- und Cylinderfunktionen zusammen, welche zum Teil bekannt sind, zum Teil ohne grosse Mühe aus bekannten Sätzen folgen.

§ 3. Aus der Theorie der Kugelfunctionen.

Die gewöhnliche Kugelfunction m. Ordnung wurde durch P_m oder $P_{m,0}$ bezeichnet. Die n. Zugeordnete der Kugelfunction m. Ordnung lässt sich dann definieren durch den Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
P_{m,n}(\cos\vartheta) &= P_{m,n}(x) = (1-x^2)^{n/2}\frac{d^n P_m}{d x^n} \\
&= \frac{1}{2^m \cdot m!}(1-x^2)^{n/2}\frac{d^{n+m}}{d x^{n+m}}(x^2-1)^m.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Zwischen den verschiedenen Zugeordneten verschiedener Ordnung bestehen die folgenden drei Rekurrenzen (vgl. F. Neumann, Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen, Leipzig 1878, pag. 74):

$$(2m+1)\cos\vartheta P_{m,n} = (m+1-n)P_{m+1,n} + (m+n)P_{m-1,n} \tag{19}$$

$$(2m+1)\sin\vartheta P_{m,n-1} = P_{m+1,n} - P_{m-1,n} \tag{20}$$

$$(2m+1)\sin\vartheta P_{m,n+1} = (m+1-n)(n-m)P_{m+1,n} + (m+1+n)(n+m)P_{m-1,n}. \tag{21}$$

Man findet mit Hülfe der eben angegebenen Beziehungen leicht die nachstehende später zu verwendende Relation:

$$(2m+1)\sin\vartheta\frac{dP_{m,1}}{d\vartheta} = m^2 P_{m+1,1} - (m+1)^2 P_{m-1,1}. \tag{22}$$

Ferner lassen sich die folgenden Sätze mit Hülfe von (18)—(22) aus den bekannten Integraleigenschaften der Kugelfunctionen ableiten:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta\cos\vartheta\, P_{m,1} P_{m',1} = 0 \\
&\qquad \text{ausser wenn } m' = m+1 \text{ oder } m' = m-1. \\
&\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta\cos\vartheta\, P_{m,1} P_{m+1,1} = 2\cdot\frac{m(m+1)(m+2)}{(2m+1)(2m+3)}
\end{aligned}
\right\}
\tag{23}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta\cos\vartheta\, P_{m,0} P_{m',0} = 0 \\
&\qquad \text{ausser wenn } m' = m+1 \text{ oder } m-1. \\
&\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta\cos\vartheta\, P_{m,0} P_{m+1,0} = 2\cdot\frac{(m+1)}{(2m+1)(2m+3)}
\end{aligned}
\right\}
\tag{24}
$$

§ 4. Aus der Theorie der Cylinderfunctionen.

Führt man in der Differentialgleichung (11) für r die Variable $\varrho = r k$ ein, so schreibt sie sich:

$$\frac{d^2 R_m}{d \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{d R_m}{d \varrho} + R_m \left[1 - \frac{m(m+1)}{\varrho^2}\right] = 0. \qquad 25)$$

Versucht man diese Differentialgleichung durch einen Ausdruck der Form $e^{-i\varrho} \cdot S$ zu befriedigen, wobei S eine nach negativen Potenzen von ϱ fortschreitende Reihe sein soll, so gelingt dies durch die folgende mit einer endlichen Anzahl von Gliedern abbrechende Reihe:

$$K_m = \frac{e^{-i\varrho}}{\varrho} \left[1 + \frac{m(m+1)}{2} \frac{1}{i\varrho} + \frac{m(m+1)}{2} \frac{[m(m+1) - 1 \cdot 2]}{4} \frac{1}{(i\varrho)^2} \right.$$
$$\left. + \frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{[m(m+1) - 1 \cdot 2]}{4} \cdot \frac{[m(m+1) - 2 \cdot 3]}{6} \cdot \frac{1}{(i\varrho)^3} + \dots \right] \qquad 26)$$

Eine zweite Lösung der Differentialgleichung, die wir K'_m nennen wollen, erhält man natürlich, indem man in diesem Ausdruck $+i$ mit $-i$ vertauscht. Die allgemeine Lösung würde sich dann linear aus K_m und K'_m zusammensetzen.

Andrerseits kann man Lösungen von (25) in Form aufsteigender Potenzreihen darzustellen suchen und findet dadurch die folgenden beiden Funktionen:

$$\chi_m(\varrho) = \frac{(i\varrho)^m}{1 \cdot 3 \dots (2m+1)} \left\{1 + \frac{(i\varrho)^2}{2(2m+3)} + \frac{(i\varrho)^4}{2 \cdot 4(2m+3)(2m+5)} + \dots \right\}$$
$$\varphi_m(\varrho) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{(i\varrho)^{m+1}} \left\{1 - \frac{(i\varrho)^2}{2(2m-1)} + \frac{(i\varrho)^4}{2 \cdot 4(2m-1)(2m-3)} - \dots \right\} \qquad 27)$$

wobei die Coeffizienten des ersten Gliedes in Rücksicht auf die spätere Anwendung gewählt sind.

Auch durch χ_m und φ_m muss sich jede andere Lösung von (25) linear darstellen lassen. Führt man dies speziell für K_m aus, so erhält man:

$$i^{2m+1} K_m(\varrho) = \chi_m(\varrho) + (-1)^{m+1} \varphi_m(\varrho)$$

oder:

$$i^{m+1} K_m(\varrho) = \frac{\varrho^m}{1 \cdot 3 \ldots . 2m+1} \left\{ 1 - \frac{\varrho^2}{2(2m+3)} + \frac{\varrho^4}{2 \cdot 4(2m+3)(2m+5)} - \ldots \right\}$$

$$+ i \frac{1 \cdot 3 \ldots . (2m-1)}{\varrho^{m+1}} \left\{ 1 + \frac{\varrho^2}{2(2m-1)} + \frac{\varrho^4}{2 \cdot 4(2m-1)(2m-3)} - \ldots \right\} \quad 28)$$

ein Ausdruck, der sich auch durch direkte Entwicklung von K_m nach Potenzen von ϱ gewinnen liesse. Umgekehrt kann man aber auch z. B. χ_m linear durch K_m und K'_m ausdrücken und zwar findet man:

$$2\, i\, \chi_m(\varrho) = K'_m(\varrho) - (-1)^m K_m(\varrho). \qquad 29)$$

Ferner besteht zwischen irgend zwei Lösungen R_m und R'_m von (25) die Beziehung:

$$R_m \frac{d\, R'_m}{d\, \varrho} - R'_m \frac{d\, R_m}{d\, \varrho} = \frac{C}{\varrho^2},$$

wobei C eine Constante ist. Speziell für K_m und χ_m nimmt die Constante den Wert 1 an, sodass also gilt:

$$K_m \frac{d\, \chi_m}{d\, \varrho} - \chi_m \frac{d\, K_m}{d\, \varrho} = \frac{1}{\varrho^2}. \qquad 30)$$

Die verschiedenen K_m stehen durch folgende Rekurrenzen mit einander in Verbindung:

$$(2\, m + 1)\, K_m = i\, \varrho\, (K_{m+1} - K_{m-1}) \qquad 31)$$

$$\varrho \frac{d\, K_m}{d\, \varrho} = m\, K_m - i\, \varrho\, K_{m+1} = -(m+1)\, K_m - i\, \varrho\, K_{m-1}$$
$$= -i\, \varrho \left[\frac{(m+1)\, K_{m+1} + m\, K_{m-1}}{2\, m + 1} \right]. \qquad 32)$$

Schliesslich gilt nach Heine, Hdb. d. Kugelfunctionen, 2. Aufl., I, pag. 82 die Entwicklung:

$$e^{i \varrho \cos \vartheta} = \sum_{m=0}^{\infty} (2\, m + 1)\, \chi_m(\varrho)\, P_{m,0}(\cos \vartheta). \qquad 33)$$

§ 5. Explicite Darstellung der Componenten der electrischen Kraft.

Wir beginnen damit, die Entwicklungen (14) für α, β, γ zuvörderst so zu spezialisieren, dass dieselben im Unendlichen keine Teile enthalten, welche einfallenden Wellenzügen entsprechen. Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, dass R_m sich linear aus K_m und K'_m zusammensetzt, sodass man etwa schreiben kann:

$$R_m = c_1 K_m + c_2 K'_m = c_1 e^{-i\varrho} S + c_2 e^{+i\varrho} S'. \ (c_1, c_2 \text{ Konstante.})$$

S und S' sind beide nach absteigenden Potenzen von ϱ fortschreitende Reihenentwicklungen, welche sich in sehr grosser Entfernung vom Nullpunkt, für grosses ϱ auf ihr erstes Glied $\frac{1}{\varrho}$ reduzieren. Demnach wird z. B. ein Glied der Entwicklung (14) von α in grosser Entfernung vom Nullpunkt lauten:

$$(2m+1) A_m \left(c_1 \frac{e^{-i\varrho}}{\varrho} + c_2 \frac{e^{+i\varrho}}{\varrho} \right) P_{m,1}(\cos\vartheta).$$

Um den daraus entspringenden Beitrag zur x-Componente der elektrischen Kraft zu finden, hat man nach (1) mit e^{iqt} zu multiplizieren und vom Resultat den reellen Teil zu nehmen. Setzt man:

$$(2m+1) A_m c_1 = d_1 e^{i\delta_1}, \ (2m+1) A_m c_2 = d_2 e^{i\delta_2}, \ d_1, d_2, \delta_1, \delta_2 \text{ reell,}$$

so wird dieser reelle Teil gleich:

$$\left[\frac{d_1}{\varrho} \cos(\delta_1 + qt - \varrho) + \frac{d_2}{\varrho} \cos(\delta_2 + qt + \varrho) \right] P_{m,1}(\cos\vartheta)$$

oder:

$$\left[\frac{d_1}{kr} \cos\left(\delta_1 + \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) + \frac{d_2}{kr} \cos\left(\delta_2 + \frac{2\pi t}{\tau} + \frac{2\pi r}{\lambda}\right) \right] P_{m,1}(\cos\vartheta).$$

Man sieht sofort, dass das erste Glied eine zu grösserem r fortschreitende, das zweite hingegen eine aus dem Unendlichen einlaufende Welle darstellt. Laut der Bedingung für das Un-

endliche muss also das zweite Glied verschwinden, es muss d_2 und c_2 gleich null sein und R_m sich auf die einfache Form: $R_m = c_1 K_m$ reduzieren. Die Constante c_1 wollen wir noch so bestimmen, dass R_m auf der Kugeloberfläche $r = a$ gleich 1 wird. Ist zur Abkürzung:

$$k r = \varrho \qquad k a = \varrho_0 \tag{34}$$

so soll also sein:

$$R_m(r) = \frac{K_m(\varrho)}{K_m(\varrho_0)}. \tag{35}$$

Hiermit ist jede Willkürlichkeit in den R_m beseitigt und die Bedingungen im Unendlichen sind erfüllt.

Nachträgliche Bemerkung zu § 2. Der Ausdruck

$$\frac{\delta \xi}{\delta x} + \frac{\delta \eta}{\delta y} + \frac{\delta \zeta}{\delta z} = \sigma$$

ist ein Wellenpotential, welches im Unendlichen keine einfallenden Wellenzüge enthält — sobald ξ, η, ζ Wellenpotentiale sind und unseren Bedingungen für das Unendliche genügen. In Rücksicht auf die eben durchgeführte Betrachtung der Funktionen R_m wird also σ nach (12) und (35) in folgender Weise entwickelbar sein:

$$\sigma = \sum_m \sum_n \frac{K_m(\varrho)}{K_m(\varrho_0)} P_{m,n}(\cos\vartheta)\,[G_{m,n}\cos n\varphi + H_{m,n}\sin n\varphi].$$

Für $x = a$ geht diese Entwicklung über in:

$$\sigma = \sum_m \sum_n P_{m,n}(\cos\vartheta)\,[G_{m,n}\cos n\varphi + H_{m,n}\sin n\varphi].$$

Fordert man jetzt, dass σ für $r = a$ verschwinde, so folgt, dass alle Coeffizienten G und H null sein müssen, und damit, dass σ überall identisch verschwindet. Hiermit ist der oben benutzte Satz erwiesen, dass es genügt, die Bedingung $\sigma = 0$ auf der Oberfläche der Kugel zu erfüllen, um das Verschwinden von σ im ganzen Raum herbeizuführen.

Wir suchen weiter durch geeignete Wahl der Constanten A_m, B_m, C_m in (14) die Randbedingungen (15) und (17) zu

erfüllen. Setzt man die Entwicklungen (14) in diese Randbedingungen ein, berücksichtigt (35) und ersetzt $e^{ikx} = e^{i\varrho\cos\vartheta}$ durch die Reihe (33), so erhält man die drei Gleichungen:

$$\sum_m (2m+1)\left[P_{m,0}(B_m + \chi_m(\varrho_0)) - P_{m,2}\, C_m\right] = 0 \qquad 36)$$

$$\sum_m (2m+1)\left[A_m P_{m,1} \sin\vartheta - 2\, C_m P_{m,2} \cos\vartheta\right] = 0 \qquad 37)$$

$$\sum_m (2m+1)\left[A_m S_m P_{m,1} \cos\vartheta \right.$$
$$\left. + \sin\vartheta\,\{B_m S_m P_{m,0} + C_m S_m P_{m,2} + T_m P_{m,0}\}\right] = 0. \qquad 38)$$

In der letzten dieser Gleichungen habe ich noch folgende Abkürzungen eingeführt:

$$S_m = \left[r\frac{d R_m}{d r} + 2 R_m\right]_{r=a} = 2 + \left[\frac{\varrho\dfrac{d K_m}{d\varrho}}{K_m}\right]_{\varrho=\varrho_0} \qquad 39)$$

$$T_m = \left[\varrho\frac{d\chi_m}{d\varrho} + 2\chi_m(\varrho)\right]_{\varrho=\varrho_0}. \qquad 40)$$

Man multipliziere (36) mit $\sin\vartheta$. Dann kann man nach (20) und (21) sowohl $\sin\vartheta\, P_{m,0}$, als $\sin\vartheta\, P_{m,2}$ mit Hülfe der ersten Zugeordneten $P_{m,1}$ ausdrücken, sodass die ganze Summe dann nur noch erste Zugeordnete enthält, und zwar findet man:

$$\sum_m (B_m + \chi_m(\varrho_0))(P_{m+1,1} - P_{m-1,1})$$
$$- C_m\left[-(m-1)\, m\, P_{m+1,1} + (m+1)(m+2)\, P_{m-1,1}\right] = 0.$$

Ordnet man hier in der Weise, dass man Glieder, welche Grössen $P_{m,1}$ mit gleichem Index m enthalten, zusammenfasst, so folgt:

$$\sum_m P_{m,1}\left[(m+2)(m+3)\, C_{m+1} + B_{m+1} + \chi_{m+1}\right.$$
$$\left. - (m-1)(m-2)\, C_{m-1} - B_{m-1} - \chi_{m-1}\right] = 0. \qquad 36')$$

Aehnlich kann man in der Summe (37) mit Hülfe der Rekurrenzen (19) und (20) sowohl $\sin\vartheta\, P_{m,1}$ als $\cos\vartheta\, P_{m,2}$ allein durch zweite Zugeordnete $P_{m,2}$ ausdrücken und nach diesen ordnen. Man erhält dann:

$$\sum_m P_{m,2}[A_{m-1} - 2(m-2)C_{m-1} - A_{m+1} - 2(m+3)C_{m+1}] = 0. \quad 37')$$

Schliesslich lassen sich in (38) die drei Produkte $\cos\vartheta\, P_{m,1}$, $\sin\vartheta\, P_{m,0}$ und $\sin\vartheta\, P_{m,2}$ alle nach (19)—(21) durch erste Zugeordnete $P_{m,1}$ ausdrücken. Wiederum nach letzteren ordnend erhält man:

$$\sum_m P_{m,1}\left[\begin{array}{l} S_{m-1}\{(m-1)A_{m-1}+B_{m-1}-(m-1)(m-2)C_{m-1}\}+T_{m-1} \\ +S_{m+1}\{(m+2)A_{m+1}-B_{m+1}+(m+2)(m+3)C_{m+1}\}-T_{m+1}\end{array}\right]=0. \quad 38')$$

Es ist zu beachten, dass, wie aus (18) sofort ersichtlich, die drei Grössen $P_{0,1}$, $P_{0,2}$ und $P_{1,2}$ gleich null sind. Daher beginnen die Summen (36′) und (38′) mit $m = 1$, die Summe (37′) mit $m = 2$.

Wir haben hier nun drei Entwicklungen nach zugeordneten Kugelfunktionen, die zur Summe die Null haben sollen. Dies ist aber nach einem bekannten Satze nicht anders möglich, als indem jeder einzelne Entwicklungkoeffizient verschwindet, und damit ergeben sich die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der A_m, B_m, C_m:

$$\begin{aligned}(m+2)(m+3)\,C_{m+1} + B_{m+1} + \chi_{m+1} \\ = (m-1)(m-2)\,C_{m-1} + B_{m-1} + \chi_{m-1} \quad m \geqq 1 \quad 41)\end{aligned}$$

$$A_{m+1} + 2\,(m+3)\,C_{m+1} = A_{m-1} - 2\,(m-2)\,C_{m-1} \quad m > 2 \quad 42)$$

$$\begin{aligned}S_{m+1}\,[(m+2)\,A_{m+1} - B_{m+1} + (m+2)\,(m+3)\,C_{m+1}] - T_{m+1} \\ + S_{m-1}\,[(m-1)\,A_{m-1} + B_{m-1} - (m-1)\,(m-2)\,C_{m-1}] \\ + T_{m-1} = 0 \quad m \geqq 1. \quad 43)\end{aligned}$$

Zur Auflösung dieses unendlichen Gleichungssystems erweist es sich als nützlich, die folgenden Grössen als Unbekannte einzuführen:

$$\begin{aligned} A_m + 2\,(m+2)\,C_m &= p_m \\ B_m + (m+1)\,(m+2)\,C_m &= q_m \quad 44) \\ 2\,(2\,m+1)\,C_m &= r_m \end{aligned}$$

Es ist hier voraus zu bemerken, dass man, da $P_{0,1}$, $P_{0,2}$ und $P_{1,2}$ verschwindet, in den Entwicklungen (14) von vorn-

herein auch A_0, C_0 und C_1 gleich null setzen darf, woraus dann folgt:

$$p_0 = r_0 = r_1 = 0 \qquad 45)$$

Durch Einführung dieser neuen Unbekannten verwandeln sich die Gleichungen (41) bis (43) in die nachstehenden:

$$q_{m+1} + \chi_{m+1} = q_{m-1} + \chi_{m-1} - r_{m-1} \quad m \geqq 1 \qquad 46)$$

$$p_{m+1} = p_{m-1} - r_{m-1} \quad m \geqq 2 \qquad 47)$$

$$S_{m+1}[(m+2)\,p_{m+1} - q_{m+1}] + S_{m-1}[(m-1)\,p_{m-1} + q_{m-1} - m\,r_{m-1}]$$
$$+ T_{m-1} - T_{m+1} = 0 \quad m \geqq 1. \qquad 48)$$

Subtrahiert man hier zunächst (47) von (46), so folgt:

$$q_{m+1} + \chi_{m+1} - p_{m+1} = q_{m-1} + \chi_{m-1} - p_{m-1} \quad m \geqq 2$$

und daraus ergiebt sich, dass für

$$\left.\begin{array}{ll} \text{gerades } m: & q_m + \chi_m = p_m + g_2 \quad m \geqq 2 \\ \text{ungerades } m: & q_m + \chi_m = p_m + g_1 \quad m \geqq 1 \end{array}\right\} \qquad 49)$$

sein muss, wobei g_1 und g_2 zwei vom Index m unabhängige Constante sind.

Schreiben wir (47) noch in der Form:

$$r_m = p_m - p_{m+2} \quad m \geqq 1, \qquad 50)$$

so sehen wir, dass die Bestimmung der q_m und r_m auf die der p_m zurückgeführt ist. Ersetzt man jetzt in dem Gleichungssystem (48) die q_m und r_m durch die Ausdrücke (49) und (50), so erhält man nicht etwa Rekurrenzen zwischen den p_m, vielmehr fällt merkwürdiger Weise aus jeder Gleichung p_{m-1} heraus und es ergiebt sich zur unmittelbaren Bestimmung von p_{m+1}:

$$p_{m+1}\,[(m+1)\,S_{m+1} + m\,S_{m-1}] + S_{m+1}\,(\chi_{m+1} - g)$$
$$- S_{m-1}\,(\chi_{m-1} - g) + T_{m-1} - T_{m+1} = 0 \quad m \geqq 2, \qquad 51)$$

wobei g gleich g_1 oder gleich g_2 zu setzen ist, jenachdem m gerade oder ungerade ist.

Die erste für $m = 1$ entstehende Gleichung des Systems (48) konnte hier noch nicht ausgenutzt werden und man darf in dem vorstehenden Systeme erst mit $m = 2$ beginnen, weil q_0 nicht nach Art der Formel (49) auf p_0 zurückgeführt werden kann.

Ueberblickt man das bisher erlangte Resultat, so lassen sich nach (51) alle p von p_3 an berechnen. Nach (45) verschwindet p_0. Ferner folgt aus $r_1 = 0$ und der ersten (für $m = 1$ entstehenden) Gleichung des Systems (50):

$$p_1 = p_3. \tag{52}$$

Von allen Grössen p bleibt daher allein noch p_2 unbekannt. Sowie man auch p_2 hätte, erhielte man aus (45) und (50) alle r und aus (49) alle q — abgesehen von q_0. So bleiben einerseits im Grunde nur die beiden Unbekannten q_0 und p_2, andererseits enthält das System (46) bis (48) aber auch noch zwei unbenutzte Gleichungen. Bei der Subtraktion der Gleichungen (47) von (46) konnte die erste (für $m = 1$ entstehende) Gleichung (46) nicht mitbenutzt werden, weil die entsprechende Gleichung (47) fehlt, und ähnlich lag es mit der ersten Gleichung (48). Die beiden restierenden Gleichungen lauten daher:

Aus (46) für $m = 1$:

$$q_2 + \chi_2 = q_0 + \chi_0 - r_0.$$

Aus (48) für $m = 1$:

$$S_2\,[3\,p_2 - q_2] + S_0\,q_0 + T_0 - T_2 = 0.$$

In Rücksicht auf (45) und (49) erhält man aus diesen beiden Gleichungen:

$$q_0 + \chi_0 = p_2 + g_2 \tag{53}$$

$$p_2\,[2\,S_2 + S_0] + S_2\,(\chi_2 - g_2) - S_0\,(\chi_0 - g_2) + T_0 - T_2 = 0. \tag{54}$$

Damit sind denn alle Gleichungen befriedigt und alle Unbekannten gefunden — bis auf eine eigentümliche durchgehende Unbestimmtheit, die in der Willkürlichkeit der beiden Constanten g_1 und g_2 liegt. Es ist schwer zu ersehen, woher die Fixierung dieser beiden Constanten noch kommen soll, nachdem sich bei ganz beliebiger Wahl derselben alle Randbedingungen im Endlichen und Unendlichen haben erfüllen lassen, und doch ist physikalisch evident, dass unser Problem nur e i n e Lösung besitzen kann.

Der Schlüssel zur Ueberwindung der Schwierigkeit und zur Bestimmung von g_1 und g_2 liegt in Folgendem: Man nehme einmal an, dass keine einfallende Welle vorhanden sei. Dann verschwinden in unseren Gleichungen alle Grössen χ_m und T_m, welche aus der Entwicklung des die einfallende Welle darstellenden Ausdrucks e^{ikx} entsprangen. Es bleiben daher in den Gleichungen (51) die Glieder übrig:

$$p_{m+1}\left[(m+1)\,S_{m+1}+m\,S_{m-1}\right]-g\,(S_{m+1}-S_{m-1})=0. \qquad 55)$$

Es soll hieraus p_{m+1} berechnet werden für den Fall, dass der Kugelradius a gegen die Wellenlänge sehr klein ist. Für sehr kleines ϱ wird K_m nach (28) näherungsweise dargestellt durch:

$$i^m\,K_m(\varrho)=\frac{1\cdot 3\ldots\ldots(2m-1)}{\varrho^{m+1}} \qquad 56)$$

und daraus folgt nach (34), (35) und (39):

$$R_m(r)=\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)^{m+1}=\left(\frac{a}{r}\right)^{m+1}\quad S_m=1-m. \qquad 57)$$

Dies giebt in (55) eingesetzt:

$$p_{m+1}=\frac{g}{m\,(2m-1)}. \qquad 58)$$

Nunmehr kann man nach (50) r_m, nach den Gleichungen:

$$q_m=p_m+g$$

die aus (49) durch Weglassung der χ-Glieder entstehen, die q_m und, nachdem p_m, q_m und r_m bekannt sind, aus (44) die A_m, B_m, C_m berechnen. Es genügt, das Resultat für B_m anzuführen:

$$B_m=g\left[1-\frac{3}{(2m-3)\,(2m+1)^2}\right].$$

Damit erhält man nach (14) folgende Entwicklung von β:

$$\beta=\sum_m g\left[2m+1-\frac{3}{(2m-3)\,(2m+1)}\right]R_m(r)\,P_{m,0}(\cos\vartheta).$$

Für $r = a$ und $\vartheta = 0$ wird $R_m = 1$ und $P_{m,0} = 1$ und damit wird β:

$$\beta = \sum_m g \left[2m + 1 - \frac{3}{(2m-3)(2m+1)} \right]$$

also unendlich. Mit anderen Worten: Aus den Grössen g entspringen Ausdrücke für die Componenten der elektrischen Kraft, welche mit Unstetigkeiten behaftet sind. Die Bedingung, welche zur Fixierung der Grössen g führt, ist daher die, dass die Componenten der elektrischen Kraft stetig bleiben sollen, und zwar verlangt sie, dass g_1 und g_2 null sind.

Lässt man jetzt alle Glieder g aus den Gleichungen (49) bis (54) weg, so kann man sie so zusammenfassen:

$$\begin{aligned} & p_{m+1} \left[(m+1) S_{m+1} + m S_{m-1} \right] \\ & + (S_{m+1} \chi_{m+1} - T_{m+1}) - (S_{m-1} \chi_{m-1} - T_{m-1}) = 0 \quad m > 1 \end{aligned} \tag{59}$$

$$q_m = p_m - \chi_m \quad m \geqq 1 \qquad r_m = p_m - p_{m+2} \quad m \geqq 2 \tag{60}$$

$$p_0 = 0 \quad p_1 = p_3 \quad q_0 = p_2 - \chi_0 \quad r_0 = r_1 = 0. \tag{61}$$

Die Gleichungen (59) gestatten noch eine beträchtliche Vereinfachung.

Nach der Definition (39) war:

$$S_m = \left[2 + \frac{\varrho \frac{d K_m}{d \varrho}}{K_m} \right]_{\varrho = \varrho_0} \quad T_m = \left[2 \chi_m(\varrho) + \varrho \frac{d \chi_m}{d \varrho} \right]_{\varrho = \varrho_0}.$$

Daher ist:

$$S_m \chi_m - T_m = \left[\frac{\varrho}{K_m} \left(\chi_m \frac{d K_m}{d \varrho} - K_m \frac{d \chi_m}{d \varrho} \right) \right]_{\varrho = \varrho_0}$$

oder nach (30):

$$S_m \chi_m - T_m = - \left[\frac{1}{\varrho K_m} \right]_{\varrho = \varrho_0}. \tag{62}$$

Ferner wird:

$$\begin{aligned} & (m+1) S_{m+1} + m S_{m-1} = 2(2m+1) \\ & + \left[(m+1) \frac{\varrho \frac{d K_{m+1}}{d \varrho}}{K_{m+1}} + m \varrho \frac{\frac{d K_{m-1}}{d \varrho}}{K_{m-1}} \right]_{\varrho = \varrho_0}. \end{aligned}$$

Nach (31) und (32) bestehen die Rekurrenzen:

$$\varrho \frac{d K_{m+1}}{d \varrho} = -(m+2) K_{m+1} - i \varrho K_m$$

$$\varrho \frac{d K_{m-1}}{d \varrho} = (m-1) K_{m-1} - i \varrho K_m$$

$$(2m+1) \varrho \frac{d K_m}{d \varrho} = -i \varrho [(m+1) K_{m+1} + m K_{m-1}]$$

$$(2m+1) \quad K_m \quad = i \varrho [K_{m+1} - K_{m-1}]. \qquad 63)$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $\frac{m+1}{K_{m+1}}$, die zweite mit $\frac{m}{K_{m-1}}$, die dritte und vierte je mit $-\frac{K_m}{K_{m-1} K_{m+1}}$ und addiert, so erhält man:

$$\frac{(m+1)}{K_{m+1}} \varrho \frac{d K_{m+1}}{d \varrho} + \frac{m}{K_{m-1}} \varrho \frac{d K_{m-1}}{d \varrho}$$

$$-(2m+1) \frac{K_m}{K_{m-1} K_{m+1}} \left(K_m + \varrho \frac{d K_m}{d \varrho} \right) = -2(2m+1)$$

und damit:

$$(m+1) S_{m+1} + m S_{m-1} = (2m+1) \frac{K_m}{K_{m-1} K_{m+1}} \left(K_m + \varrho \frac{d K_m}{d \varrho} \right). \qquad 64)$$

Führt man jetzt (62) und (64) im Ausdruck von p_{m+1} ein, so folgt:

$$p_{m+1} = \frac{K_{m-1} K_{m+1}}{(2m+1) K_m} \frac{1}{K_m + \varrho \frac{d K_m}{d \varrho}} \left(\frac{1}{\varrho K_{m+1}} - \frac{1}{\varrho K_{m-1}} \right) \text{ für } \varrho = \varrho_0.$$

oder in Rücksicht auf (63):

$$p_{m+1} = -\left[\frac{i}{\varrho^2 \left(K_m + \varrho \frac{d K_m}{d \varrho} \right)} \right]_{\varrho = \varrho_0} . \qquad 65)$$

Es bleibt nur noch übrig, mit Hülfe der p_m nach (60) und (61) die q_m und r_m und dann nach (44) die A_m, B_m, C_m abzuleiten, um nach einer leichten Zwischenrechnung die voll-

ständige Lösung des Beugungsproblems zu erhalten, welche, wenn man alles zusammenstellt, durch folgende Formeln gegeben wird:

Der Kugelradius sei a. Man setze:

$$\varrho = k r \quad \varrho_0 = k a \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Man berechne die endlichen Ausdrücke (26):

$$K_m = \frac{e^{-i\varrho}}{\varrho}\left[1 + \frac{m(m+1)}{2}\frac{1}{i\varrho} + \frac{m(m+1)}{2}\cdot\frac{m(m+1)-1\cdot 2}{4}\frac{1}{(i\varrho)^2} + \ldots\right] \tag{66}$$

und

$$\chi_m = -\frac{K_m(-\varrho_0) + (-1)^m K_m(\varrho_0)}{2i} \tag{67}$$

und bilde damit:

$$p_{m+1} = -\left[\frac{i}{\varrho^2 \frac{d(\varrho K_m)}{d\varrho}}\right]_{\varrho=\varrho_0} \tag{68}$$

sowie:

$$R_m(r) = \frac{K_m(\varrho)}{K_m(\varrho_0)}. \tag{69}$$

Dann gelten die Entwicklungen:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{m=1}^{\infty} (2m+1) A_m R_m(r) P_{m,1}(\cos\vartheta) \\ \beta &= \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) B_m R_m(r) P_{m,0}(\cos\vartheta) \\ \gamma &= \sum_{m=2}^{\infty} (2m+1) C_m R_m(r) P_{m,2}(\cos\vartheta) \end{aligned} \tag{70}$$

mit den folgenden Entwicklungskoeffizienten:

$$\begin{aligned} (2m+1)A_m &= (m-1)p_m + (m+2)p_{m+2} \\ 2(2m+1)B_m &= (m+1)(m+2)p_{m+2} - m(m-1)p_m - 2(2m+1)\chi_m \\ 2(2m+1)C_m &= p_m - p_{m+2} \end{aligned} \tag{71}$$

und die Componenten der elektrischen Kraft für die durch die vollkommen reflektierte Kugel gestörte Lichtbewegung werden erhalten aus:

$$
\begin{aligned}
X &= \text{pars real}\,(e^{iqt}\,\alpha\cos\varphi)\\
Y &= \text{pars real}\,(e^{iqt+ikx} + e^{iqt}\,[\beta + \gamma\cos 2\varphi]) \qquad 72)\\
Z &= \text{pars real}\,(e^{iqt}\,\gamma\sin 2\varphi).
\end{aligned}
$$

§ 6. Bemerkungen über die Verwendung dieser Darstellung.

Die Reihen, durch die wir hier die Verteilung der elektrischen Kraft und damit der Lichtintensität dargestellt haben, sind zwar unter allen Umständen konvergent, indessen wird, wie leicht zu sehen, die Convergenz um so langsamer, je grösser die Kugel ist, welche das Licht reflektiert. Dies Verhalten liegt insofern günstig, als man für grosse Kugeln die Lichtverteilung in rohen Zügen aus der geometrischen Optik, mit grösserer Schärfe aus der Kirchhoff'schen Beugungstheorie ableiten kann. In den Fällen, wo diese beiden Hülfsmittel versagen, nämlich für Kugeln, deren Durchmesser nicht über wenige Wellenlängen hinausgeht, wird aber gerade die numerische Rechnung nach obigen Formeln durchführbar und man könnte sich an ihrer Hand überzeugen, wie sich mit dem Kleinerwerden der Kugel z. B. der Schatten hinter ihr allmählich auflöst. Ich will mich hier begnügen nur die Grenzwerte anzuführen, in die ξ, η, ζ übergehen, wenn der Kugelradius äusserst klein auch gegen die Wellenlänge wird:

$$
\xi = -k^3 a^3 \sin\vartheta\cos\varphi\left[\tfrac{1}{2}K_1(kr) + \cos\vartheta\, K_2(kr) - \frac{k^2a^2}{6}K_3(kr)(\cos^2\vartheta - \tfrac{1}{5})\right]
$$

$$
\eta = e^{ikx} + k^3a^3\left[\tfrac{2}{3}K_0(kr) + \tfrac{1}{2}K_1\cos\vartheta + K_2(\tfrac{1}{3} - \sin^2\vartheta\cos^2\varphi) + K_3\frac{k^2a^2}{6}\cos\vartheta(\sin^2\vartheta\cos^2\varphi - \tfrac{1}{5})\right] \qquad 73)
$$

$$
\zeta = -k^3a^3\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\left[K_2(kr) - \frac{k^2a^2}{6}K_3(kr)\cos\vartheta\right]
$$

wobei:

$$K_0 = \frac{e^{-ikr}}{kr} \quad K_1 = \frac{e^{-ikr}}{kr}\left(1 + \frac{1}{ikr}\right)$$

$$K_2 = \frac{e^{-ikr}}{kr}\left(1 + \frac{3}{ikr} + \frac{3}{(ikr)^2}\right) \tag{74}$$

$$K_3 = \frac{e^{-ikr}}{kr}\left(1 + \frac{6}{ikr} + \frac{15}{(ikr)^2} + \frac{15}{(ikr)^3}\right).$$

In grosser Distanz r von der Kugel gehen diese Formeln über in:

$$\xi = -\frac{k^2 a^3}{2} \sin\vartheta \cos\varphi\,(1 + 2\cos\vartheta)\,\frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$\eta = e^{ikx} + k^2 a^3 \frac{e^{-ikr}}{r}\left[1 + \frac{\cos\vartheta}{2} - \sin^2\vartheta \cos^2\varphi\right] \tag{75}$$

$$\zeta = -k^2 a^3 \frac{e^{-ikr}}{r} \sin^2\vartheta \sin\varphi \cos\varphi.$$

Lord Rayleigh hat gefunden (l. c.), dass bei sehr kleinen Kugeln aus durchsichtigen Medien die Intensität des zerstreuten Lichts umgekehrt proportional der vierten Potenz der Wellenlänge wird und dass in Richtungen, die einen rechten Winkel mit der Richtung der einfallenden Welle machen, vollständige Polarisation des zerstreuten Lichts eintritt. Ersteres Verhalten gilt nach den Gleichungen (75) (da k umgekehrt proportional zur Wellenlänge ist) offenbar auch für das von einer kleinen vollkommen reflektierenden Kugel zerstreute Licht, hingegen erfolgt in keiner Richtung vollständige Polarisation. Man erhält für $\vartheta = 90^0$:

$$\xi = -\frac{k^2 a^3}{2}\frac{e^{-ikr}}{r}\cos\varphi \quad \eta - e^{ikx} = k^2 a^3 \frac{e^{-ikr}}{r}\sin^2\varphi$$

$$\zeta = -k^2 a^3 \frac{e^{-ikr}}{r}\sin\varphi\cos\varphi$$

und daraus für die Intensität der x-Componente:

$$\text{Mod}\,\xi^2 = \tfrac{1}{4}\frac{k^4 a^6}{r^2}\cos^2\varphi$$

und für die Intensität der senkrecht zur x-Axe stehenden Componente des zerstreuten Lichts:

$$\text{Mod}\,[(\eta - e^{ikx})^2 + \zeta^2] = \frac{k^4\,a^6}{r^2}\sin^2\varphi\,.$$

Ist das einfallende Licht nicht, wie bisher vorausgesetzt wurde, polarisiert, sondern natürliches Licht, so muss man in diesen Ausdrücken alle möglichen Werte von φ einsetzen und das Mittel nehmen und findet dann:

für die Schwingungskomponente parallel zur x-Axe: $\frac{1}{4}\,\frac{k^4\,a^6}{r^2}$

" " " senkrecht " " $\frac{k^4\,a^6}{r^2}$

d. h. „das von sehr kleinen vollkommen reflektierenden Kugeln in Richtungen senkrecht zur Normale der einfallenden Welle zerstreute Licht ist zu drei Vierteln polarisiert.“

Schliesslich sei noch ein Umstand hervorgehoben. Da die Intensität des zerstreuten Lichts von der Wellenlänge abhängt, so wird, wenn das einfallende Licht weiss ist, das zerstreute eine andere Farbe zeigen. Nur bei sehr grossen Kugeln kommt die Abhängigkeit von der Wellenlänge nicht in Betracht und das reflektierte Licht bleibt farblos. Bei sehr kleinen Kugeln entsteht, wie Lord Rayleigh gezeigt hat, das tiefe Blau des Himmels. Bei Kugeln von der Grössenordnung der Wellenlänge bilden sich noch andere Farbennüancen aus, die sogar ein wenig von der Richtung des reflektierten Lichts abhängen und die sich alle aus den obigen Formeln ableiten liessen.

Nach diesen Andeutungen über die anderweitige Verwendbarkeit der Lösung des Beugungsproblems gehen wir an unsere eigentliche Aufgabe, die Berechnung des Maxwell'schen Drucks, welchen das Licht auf die Kugel ausübt. Hierzu ist zunächst erforderlich die

§ 7. Ableitung der magnetischen Kraftcomponenten aus den electrischen.

Man wähle irgend einen Punkt 0 der Kugeloberfläche zum Nullpunkt eines neuen rechtwinklichen Coordinatensystemes x_1, y_1, z_1, dessen x-Axe in den durch 0 gehenden Radiusvektor falle, dessen y-Axe den durch 0 gehenden Meridian $\varphi =$ const. und dessen z-Axe den durch 0 gehenden Parallelkreis $\vartheta =$ const. tangiere. Es werde y_1 zu wachsendem ϑ, z_1 zu wachsendem φ positiv gezählt. Die Kraftcomponenten (oder genauer die komplexen Grössen, aus denen sich nach (1) die Kraftcomponenten ableiten) in Richtung der neuen Axen mögen heissen $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$. Für ξ_1, η_1, ζ_1 erhält man durch Coordinatendrehung die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi \cos\vartheta_0 + \eta \sin\vartheta_0 \cos\varphi_0 + \zeta \sin\vartheta_0 \sin\varphi_0 \\ \eta_1 &= -\xi \sin\vartheta_0 + (\eta \cos\varphi_0 + \zeta \sin\varphi_0) \cos\vartheta_0 \\ \zeta_1 &= -\eta \sin\varphi_0 + \zeta \cos\varphi_0. \end{aligned} \tag{76}$$

Die magnetischen Kraftcomponenten in Richtung der neuen Axen sind aus den Gleichungen, welche den (2) entsprechen, abzuleiten:

$$i k \lambda_1 = \frac{\delta \zeta_1}{\delta y_1} - \frac{\delta \eta_1}{\delta z_1} \quad i k \mu_1 = \frac{\delta \xi_1}{\delta z_1} - \frac{\delta \zeta_1}{\delta x_1} \quad i k \nu_1 = \frac{\delta \eta_1}{\delta x_1} - \frac{\delta \xi_1}{\delta y_1}. \tag{77}$$

Wir wollen diese Gleichungen verwenden, um speziell die magnetische Kraft im Punkte 0 zu bestimmen. Im Punkte 0 sind η_1 und ζ_1 gleich null, weil auf der Oberfläche der Kugel keine tangentialen elektrischen Kräfte existieren, und es gilt, da die y_1- und z_1-Axe die Oberfläche tangieren, auch:

$$\frac{\delta \eta_1}{\delta y_1} = \frac{\delta \eta_1}{\delta z_1} = \frac{\delta \zeta_1}{\delta y_1} = \frac{\delta \zeta_1}{\delta z_1} = 0.$$

Ferner ist geometrisch evident, dass im Punkte 0:

$$\frac{\delta}{\delta x_1} = \frac{\delta}{\delta r} \quad \frac{\delta}{\delta y_1} = \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta \vartheta} \quad \frac{\delta}{\delta z_1} = \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\delta}{\delta \varphi}$$

ist. Damit geht (77) über in:

$$\lambda_1 = 0 \quad i k \mu_1 = \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\delta \xi_1}{\delta \varphi} - \frac{\delta \zeta_1}{\delta r} \quad i k \nu_1 = \frac{\delta \eta_1}{\delta r} - \frac{1}{r} \frac{\delta \xi_1}{\delta \vartheta}.$$

Wir erfahren also zunächst, dass der magnetischen Kraft die radiale Componente fehlt, dass sie in der Kugeloberfläche liegt.

Drückt man nach (13) ξ, η, ζ durch a, β, γ aus, so folgt ferner:

$$\xi_1 = \cos\varphi \{a \cos\vartheta + \sin\vartheta [e^{ikx} + \beta + \gamma]\}$$
$$\eta_1 = \cos\varphi \{- a \sin\vartheta + \cos\vartheta [e^{ikx} + \beta + \gamma]\}$$
$$\zeta_1 = - \sin\varphi \{e^{ikx} + \beta - \gamma\}.$$

Auf der Kugeloberfläche wird in Folge der Relationen (15):

$$\eta_1 = \zeta_1 = 0 \quad \xi_1 = a \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\vartheta} = 2 \gamma \frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta} \tag{78}$$

und damit:

$$ik\mu_1 = + \sin\varphi \left[- \frac{a}{r \sin\vartheta \cos\vartheta} + \frac{\delta}{\delta r} (e^{ikx} + \beta - \gamma) \right]$$

$$ik\nu_1 = \quad \cos\varphi \left[- \frac{\delta a}{\delta r} \sin\vartheta + \cos\vartheta \frac{\delta}{\delta r} (e^{ikx} + \beta + \gamma) - \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta\vartheta} \left(\frac{a}{\cos\vartheta} \right) \right]$$

Nun gilt weiter an der Oberfläche der Kugel die Gleichung (17):

$$0 = \cos\vartheta \left(r \frac{\delta a}{\delta r} + 2 a \right) + \sin\vartheta \left[r \frac{\delta}{\delta r} (e^{ikx} + \beta + \gamma) + 2 (e^{ikx} + \beta + \gamma) \right]$$

welche sich in Rücksicht auf (15) auch so schreiben lässt:

$$0 = r \frac{\delta a}{\delta r} \cos\vartheta + \sin\vartheta \, r \frac{\delta}{\delta r} (e^{ikx} + \beta + \gamma) + \frac{2 a}{\cos\vartheta}$$

und damit lassen sich die Ausdrücke von μ_1 und ν_1 in die folgenden verwandeln:

$$i k \mu_1 = \sin\varphi \left[- \frac{\delta a}{\delta r} \operatorname{cotg}\vartheta - \frac{3 a}{r \sin\vartheta \cos\vartheta} - 2 \frac{\delta \gamma}{\delta r} \right]$$

$$i k \nu_1 = \cos\varphi \left[- \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\delta a}{\delta r} - \frac{2 a}{r \sin\vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta\vartheta} \left(\frac{a}{\cos\vartheta} \right) \right]$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}
-i\,\varrho_0\,\mu_1\frac{\sin\vartheta}{\sin\varphi} &= r\frac{\delta\,\alpha}{\delta\,r}\cos\vartheta+\frac{3\,\alpha}{\cos\vartheta}+2\sin\vartheta\,r\frac{\delta\,\gamma}{\delta\,r}\\
&=\cos\vartheta\left(r\frac{\delta\,\alpha}{\delta\,r}+2\,\alpha\right)+2\sin\vartheta\left(r\frac{\delta\,\gamma}{\delta\,r}+2\,\gamma\right)+\frac{\alpha}{\cos\vartheta}\\
-i\,\varrho_0\,\nu_1\frac{\sin\vartheta}{\cos\varphi} &= r\frac{\delta\,\alpha}{\delta\,r}+2\,\alpha+\sin\vartheta\frac{\delta}{\delta\,\vartheta}\left(\frac{\alpha}{\cos\vartheta}\right),
\end{aligned}\right\}\quad 79)$$

wobei die frühere Abkürzung $k\,a=\varrho_0$ benutzt ist. Da wir es übrigens fortan nur mit Punkten auf der Kugel selbst zu thun haben, werden wir nicht mehr eigens auf diesen Umstand hinweisen müssen und dürfen uns erlauben, den Index 0 wegzulassen, sowie beliebig r und a zu vertauschen.

Hier führen wir nun unsere Entwicklungen (70) für α, β, γ ein, die wir aber zunächst ein wenig umformen. Es ist auf der Kugeloberfläche:

$$\alpha=\sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)\,A_m\,P_{m,1}(\cos\vartheta),\quad \gamma=\sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)\,C_m\,P_{m,2}(\cos\vartheta)$$

und nach der Bezeichnungsweise (39):

$$\begin{aligned}
2\,\alpha+r\frac{\delta\,\alpha}{\delta\,r} &= \sum\,(2\,m+1)\,A_m\,S_m\,P_{m,1}(\cos\vartheta)\\
2\,\gamma+r\frac{\delta\,\gamma}{\delta\,r} &= \sum_{m=1}^{\infty}(2\,m+1)\,C_m\,S_m\,P_{m,2}(\cos\vartheta)
\end{aligned}\qquad 80)$$

Setzt man für A_m und C_m die Ausdrücke (71) durch die p_m ein, so wird:

$$\alpha=\sum_{m=1}^{\infty}\left[(m-1)\,p_m+(m+2)\,p_{m+2}\right]P_{m,1}(\cos\vartheta)$$

oder durch eine leichte Umstellung der Summe:

$$\alpha=\sum_{m=1}^{\infty}p_{m+1}\left[m\,P_{m+1,1}(\cos\vartheta)+(m+1)\,P_{m-1,1}(\cos\vartheta)\right].$$

Da aber nach (19):

$$(2\,m+1)\cos\vartheta\,P_{m,1}=m\,P_{m+1,1}+(m+1)\,P_{m-1,1}$$

ist, so erhält man das einfache Resultat:

$$\frac{\alpha}{\cos\vartheta}=\sum_{m=1}^{\infty}(2\,m+1)\,p_{m+1}\,P_{m,1}(\cos\vartheta).\qquad 81)$$

Hieraus folgt noch mit Hülfe von (22):

$$\sin\vartheta \frac{\delta}{\delta\vartheta}\left(\frac{a}{\cos\vartheta}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} p_{m+1}\left[m^2 P_{m+1,1} - (m+1)^2 P_{m-1,1}\right]$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} P_{m,1}\left[(m-1)^2 p_m - (m+2)^2 p_{m+2}\right]. \qquad 82)$$

Ferner notieren wir die nach (80) folgende Formel:

$$r\frac{\delta a}{\delta r} + 2a = \sum P_{m,1}(\cos\vartheta) S_m\left[(m-1)p_m + (m+2)p_{m+2}\right]. \qquad 83)$$

Wir bilden weiter die in dem Ausdruck (79) für μ_1 auftretende Grösse:

$$\cos\vartheta\left(r\frac{\delta a}{\delta r} + 2a\right) + 2\sin\vartheta\left(r\frac{\delta\gamma}{\delta r} + 2\gamma\right)$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)S_m\left[A_m\cos\vartheta P_{m,1}(\cos\vartheta) + 2C_m\sin\vartheta P_{m,2}(\cos\vartheta)\right].$$

Drückt man sowohl $\cos\vartheta P_{m,1}$, als $\sin\vartheta P_{m,2}$ nach (19) und (21) durch $P_{m,1}$ aus, so geht diese Summe über in:

$$\sum_{m=1}^{\infty} S_m\left[A_m\{m P_{m+1,1} + (m+1)P_{m-1,1}\}\right.$$
$$\left. + 2C_m\{(m+1)(m+2)P_{m-1,1} - m(m-1)P_{m+1,1}\}\right]$$

und wenn man A_m und C_m durch die p_m ausdrückt, in:

$$\sum_{m=1}^{\infty} S_m\left[m p_{m+2} P_{m+1,1} + (m+1)p_m P_{m-1,1}\right]$$

oder nach den $P_{m,1}$ geordnet:

$$\cos\vartheta\left(r\frac{\delta a}{\delta r} + 2a\right) + 2\sin\vartheta\left(r\frac{\delta\gamma}{\delta r} + 2\gamma\right)$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} P_{m,1}\, p_{m+1}\left[(m+2)S_{m+1} + (m-1)S_{m-1}\right]. \qquad 84)$$

Die Einführung der Entwicklungen (81) bis (84) in (79) liefert jetzt:

$$-i\varrho\mu_1\sin\vartheta$$
$$= \sin\varphi\sum_{m=1}^{\infty} P_{m,1}\, p_{m+1}\left[2m+1+(m+2)S_{m+1}+(m-1)S_{m-1}\right]$$

$$- i \varrho \nu_1 \sin \vartheta = \cos \varphi \sum_{m=1}^{\infty} P_{m,1} \left[(m-1)^2 p_m - (m+2)^2 p_{m+2} \right.$$
$$\left. + S_m \{(m-1) p_m + (m+2) p_{m+2}\}\right].$$

Hiermit sind die Grössen $\mu_1 \sin \vartheta$ und $\nu_1 \sin \vartheta$ nach Kugelfunktionen entwickelt. Für das folgende werden wir aber nötig haben, μ_1 und ν_1 selbst in Form solcher Entwicklungen zu besitzen, und das wird erreicht durch folgenden Ansatz. Sei:

$$(C_{m+1} - C_{m-1}) = p_{m+1}[2m + 1 + (m+2) S_{m+1} + (m-1) S_{m-1}] \quad 85)$$

$$(D_{m+1} - D_{m-1}) = (m-1) p_m (m - 1 + S_m) + (m+2) p_{m+2} (S_m - m - 2). \quad 86)$$

Dann wird:

$$i \varrho \mu_1 \sin \vartheta = \sin \varphi \sum P_{m,1} (C_{m-1} - C_{m+1})$$
$$= \sin \varphi \sum_{m=1}^{\infty} C_m (P_{m+1,1} - P_{m-1,1}).$$

Es gilt aber nach (20):

$$(2m + 1) \sin \vartheta \, P_{m,0} = P_{m+1,1} - P_{m-1,1}$$

und damit:

$$i \varrho \mu_1 = \sin \varphi \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 1) C_m P_{m,0}. \quad 87)$$

Genau ebenso folgt:

$$i \varrho \nu_1 = \cos \varphi \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 1) D_m P_{m,0}. \quad 88)$$

Das sind die gewünschten Entwicklungen von μ_1 und ν_1 nach Kugelfunktionen.

Es erübrigt nur noch, die C_m und D_m aus den Rekurrenzen (85) und (86) zu bestimmen.

Zunächst lassen sich die rechten Seiten derselben vereinfachen. Die Gleichung (59) schreibt sich in Rücksicht auf (62):

$$p_{m+1} [(m+1) S_{m+1} + m S_{m-1}] - \frac{1}{\varrho K_{m+1}} + \frac{1}{\varrho K_{m-1}} = 0 \quad 89)$$

und damit folgt:

$$C_{m+1} - C_{m-1} = \frac{1}{\varrho K_{m+1}} - \frac{1}{\varrho K_{m-1}} + p_{m+1} [2m + 1 + S_{m+1} - S_{m-1}].$$

Ferner wird nach der Definition (39) von S_m:

$$2m+1+S_{m+1}-S_{m-1}=2m+1+\frac{\varrho\frac{dK_{m+1}}{d\varrho}}{K_{m+1}}-\frac{\varrho\frac{dK_{m-1}}{d\varrho}}{K_{m-1}}$$

und dieser Ausdruck lässt sich mit Hülfe von (32) reduzieren auf:

$$(2m+1)\cdot\frac{K_m^2}{K_{m+1}\cdot K_{m-1}}.$$

Demnach:

$$C_{m-1}-C_{m+1}=\frac{1}{\varrho K_{m-1}}-\frac{1}{\varrho K_{m+1}}-(2m+1)p_{m+1}\frac{K_m^2}{K_{m+1}K_{m-1}}.$$

Bildet man diese Gleichung für $m+1$, $m+3$, $m+5$ u. s. w. und addiert alle entstehenden Relationen, so ergiebt sich zur Bestimmung von C_m:

$$C_m=\frac{1}{\varrho K_m}-\sum_{\nu=0}^{\infty}(2m+4\nu+3)\frac{K^2_{m+2\nu+1}}{K_{m+2\nu}\cdot K_{m+2\nu+2}}p_{m+2\nu+2}. \qquad 90)$$

Die Convergenz der hier auftretenden Summe lässt sich ohne Schwierigkeit erweisen.

Um die Grössen D_m zu finden, ersetze man in (85) m durch $m+1$ und addiere die entstehende Relation zu (86). Es ergiebt sich:

$$(D_{m+1}+C_{m+2})-(D_{m-1}+C_m)=(m-1)p_m(m-1+S_m)$$
$$+p_{m+2}[2(m+1)S_m+(m+3)S_{m+2}-(m+1)^2].$$

Subtrahiert man hiervon die Gleichung (89), nachdem man in ihr m durch $m+1$ ersetzt und mit 2 multipliziert hat, so bleibt:

$$(D_{m+1}+C_{m+2})-(D_{m-1}+C_m)$$
$$=(m-1)p_m(m-1+S_m)-(m+1)p_{m+2}(m+1+S_{m+2})$$
$$+\frac{2}{\varrho K_{m+1}}-\frac{2}{\varrho K_{m-1}}$$

und man sieht, dass dieser Gleichung genügt wird, wenn für jeden Wert von m gilt:

$$D_{m-1}+C_m=\frac{2}{\varrho K_{m-1}}-(m-1)p_m(m-1+S_m).$$

Führt man wiederum für S_m seinen Wert (39) ein und drückt den Differentialquotienten von K_m nach (32) durch die K_m selbst aus, so erhält man leicht:

$$D_{m-1} + C_m = \frac{2}{\varrho K_{m-1}} + (m-1)\, i\, \varrho\, p_m \frac{K_{m-1}}{K_m}. \qquad 91)$$

Nachdem die C_m aus (90) gefunden sind, giebt diese Gleichung unmittelbar die D_m und damit kann man die Entwicklungen (87) und (88) für die Componenten der magnetischen Kraft wirklich bilden.

Es ist für die weitere Anwendung noch erforderlich, von den bisher verwandten komplexen Grössen zu den reellen Schwingungskomponenten überzugehen. Zu dem Zweck setze man:

$$\xi_1 = F\, e^{if} \cos\varphi \qquad \mu_1 = G\, e^{ig} \sin\varphi \qquad \nu_1 = H\, e^{ih} \cos\varphi$$

$$p_{m+1} = F_m\, e^{if_m} \qquad C_m = i\, \varrho\, G_m\, e^{ig_m} \qquad D_m = i\, \varrho\, H_m\, e^{ih_m},$$

wo sämtliche Buchstaben auf den rechten Seiten reelle Grössen sein sollen.

Dann erhält man einerseits:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \text{pars real}\,(F\, e^{if} e^{iqt} \cos\varphi) = F \cos(f+qt)\cos\varphi \\ \text{ebenso: } M_1 &= G\cos(g+qt)\sin\varphi,\ N_1 = H\cos(h+qt)\cos\varphi \end{aligned}\right\} 92)$$

und hierbei bedeutet X_1 die radiale Componente der elektrischen Kraft, M_1 und N_1 die tangentialen Componenten der magnetischen Kraft. Andrerseits folgt aus (78), (81), (87) und (88), indem man überall Reelles und Imaginäres trennt:

$$\left.\begin{aligned} F\cos f &= \sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)P_{m,1}F_m\cos f_m, & F\sin f &= \sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)P_{m,1}F_m\sin f_m \\ G\cos g &= \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)P_{m,1}G_m\cos g_m, & G\sin g &= \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)P_{m,1}G_m\sin g_m \\ H\cos h &= \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)P_{m,0}H_m\cos h_m, & H\sin h &= \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)P_{m,0}H_m\sin h_m \end{aligned}\right\} .93)$$

Damit ist der Uebergang zu reellen Schwingungskomponenten vollzogen und die Berechnung der an der Oberfläche der Kugel wirkenden elektrischen und magnetischen Kräfte ermöglicht.

§ 8. Der Maxwell'sche Druck.

Nach Maxwell herrscht im Aether ein Druck senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien und ein Zug in Richtung der elektrischen Kraft, beide numerisch gleich der in der Volumeneinheit enthaltenen elektrischen Energie, also gleich

$$\sigma (X^2 + Y^2 + Z^2),$$

wo σ ein Proportionalitätsfaktor ist, der von der Wahl der Einheit der elektrischen Kraft abhängt. Ein ebensolcher Druck und Zug herrscht senkrecht und parallel zur magnetischen Kraft und ist wiederum numerisch gleich der in der Volumeneinheit enthaltenen magnetischen Energie $\sigma (L^2 + M^2 + N^2)$. Um die vollen Drucke im Aether zu erhalten, hat man das elektrische und das magnetische Drucksystem zu superponieren.

Nun steht die elektrische Kraft überall senkrecht auf unserer Kugel. Demnach wirkt auf jedes Oberflächenelement derselben zunächst ein senkrechter Zug, dessen Grösse gleich σX_1^2 ist, weil hier die elektrische Kraft nur aus ihrer Normalkomponente X_1 besteht. Die magnetische Kraft hingegen liegt in der Oberfläche unserer Kugel. Daher erfährt jedes Oberflächenelement derselben zweitens einen senkrechten Druck gleich $\sigma (M_1^2 + N_1^2)$. Der Gesamtdruck auf ein Oberflächenelement wird daher: $\sigma (M_1^2 + N_1^2 - X_1^2)$ oder nach (92) gleich:

$$\sigma \{ G^2 \cos^2 (g + q \cdot t) \sin^2 \varphi + H^2 \cos^2 (h + qt) \cos^2 \varphi - F^2 \cos^2 (f + qt) \cos^2 \varphi \}.$$

Der Druck ändert sich hiernach periodisch mit der halben Schwingungsperiode des Lichts. Der uns allein interessierende Durchschnittswert für Zeiten, welche viele Perioden umfassen, wird:

$$\frac{\sigma}{2} (G^2 \sin^2 \varphi + H^2 \cos^2 \varphi - F^2 \cos^2 \varphi).$$

Bildet man durch Multiplikation mit $\cos \vartheta$ die in die x-Richtung fallende Componente dieses Drucks und integriert über die ganze Kugelfläche, so erhält man für den in Richtung der einfallenden Welle auf die Kugel wirkenden Druck D:

$$D = \frac{\sigma}{2} \int a^2 \, d\vartheta \, d\varphi \sin\vartheta \cos\vartheta \, (G^2 \sin^2\varphi + H^2 \cos^2\varphi - F^2 \cos^2\varphi),$$

wobei, wie früher, a den Kugelradius bedeutet. Da F, G und H nicht von φ abhängen, lässt sich die Integration nach φ ausführen und das Integral auf folgende Form bringen:

$$D = \frac{\sigma \pi a^2}{2} \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta \, [(G \cos g)^2 + (G \sin g)^2 + (H \cos h)^2 + (H \sin h)^2 - (F \cos f)^2 - (F \sin f)^2].$$

Hier sind nun die Summen (93) einzusetzen. Beginnen wir beispielsweise mit der Summe für $G \cos g$, so folgt:

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta \, (G \cos g)^2$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} (2m+1)(2m'+1) G_m G_{m'} \cos g_m \cos g_{m'} \int_0^\vartheta d\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta \, P_{m,0} P_{m',0}.$$

Die in der vorstehenden Formel rechts auftretenden Integrale sind null, ausser wenn $m' = m + 1$ ist. Daher reduziert sich die Doppelsumme auf die einfache:

$$2 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(2m+3) G_m G_{m+1} \cos g_m \cos g_{m+1} \int_0^\vartheta d\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta \, P_{m,0} P_{m+1,0}$$

und wenn man hier für die Integrale nach (24) die Werte

$$\frac{2(m+1)}{(2m+1)(2m+3)}$$

einsetzt, so wird:

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \cos\vartheta \, (G \cos g)^2 = 4 \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) G_m G_{m+1} \cos g_m \cos g_{m+1}.$$

Ganz ähnlicher Umformungen sind die übrigen Glieder des Ausdrucks von D fähig (bei den Gliedern mit F hat man die Integralformel (23) zu benutzen) und man erhält schliesslich durch Addition der sechs entstehenden Summen die Schlussformel für den Druck des Lichts:

$$D = 2\sigma\pi a^2 \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\, G_m\, G_{m+1} \cos(g_m - g_{m+1}) \right.$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\, H_m\, H_{m+1} \cos(h_m - h_{m+1}) \qquad 94)$$
$$\left. - \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)(m+2)\, F_m\, F_{m+1} \cos(f_m - f_{m+1}) \right\}.$$

Der Proportionalitätsfaktor σ lässt sich leicht aus der durchschnittlichen Energie pro Volumeneinheit E der einfallenden Welle berechnen. Die elektrische Schwingung der einfallenden Welle war $Y = \cos(kx + qt)$, dementsprechend ihre elektrische Energie gleich $\sigma Y^2 = \sigma \cos^2(kx + qt)$. Der Mittelwert dieses Ausdrucks für Vielfache der Schwingungsperiode ist $\frac{\sigma}{2}$. Es ist bekannt, dass in ebenen Wellen die Energie der magnetischen und die Energie der elektrischen Schwingung gleich sind. Daher habe ich noch einmal $\frac{\sigma}{2}$ hinzuzufügen, um die ganze Energie pro Volumeneinheit zu erhalten, und finde damit:

$$\sigma = E. \qquad 95)$$

§ 9. Formeln zur numerischen Rechnung.

Um eine etwaige Controlle der späteren numerischen Angaben zu erleichtern, will ich die Formeln angeben, die ich zur numerischen Berechnung des Drucks benutzt habe und die aus den oben abgeleiteten auf die einfachste Weise hervorgehen, indem man von vorneherein für Trennung des Reellen und Imaginären sorgt.

a Kugelradius. $\qquad \varrho = \frac{2\pi a}{\lambda}.$

Man bilde die endlichen Ausdrücke:

$$k_m \cos \chi_m = 1 - \frac{(m-1)\,m\,(m+1)\,(m+2)}{2 \cdot 4} \frac{1}{\varrho^2}$$

$$+ \frac{(m-3)\,(m-2) \ldots (m+3)\,(m+4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{1}{\varrho^4} - \ldots$$

$$k_m \sin \chi_m = \frac{1}{\varrho} \frac{m(m+1)}{2} - \frac{1}{\varrho^3} \frac{(m-2)(m-1)\ldots(m+2)\,(m+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \ldots$$

sowie:

$$l_m \cos \psi_m = 1 - \frac{1}{\varrho^2} \frac{m(m+1)}{2} \cdot \frac{m\,(m+1) + 1 \cdot 2}{4}$$

$$+ \frac{1}{\varrho^4} \frac{(m-2)(m-1)\ldots(m+2)(m+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{m(m+1) + 3 \cdot 4}{8} - \ldots$$

$$l_m \sin \psi_m = \frac{1}{\varrho} \frac{m(m+1)}{2} - \frac{1}{\varrho^3} \frac{(m-1)\,m\,(m+1)(m+2)}{2 \cdot 4} \cdot \frac{m(m+1)+2 \cdot 3}{6} + \ldots$$

und berechne hieraus k_m, l_m, χ_m, ψ_m für eine Reihe von Werten des Index m.

Wünscht man für den Druckwert etwa eine zweistellige Genauigkeit, so gehe man dabei bis zu einem Index $\overline{m}$, für welchen k_m und l_m grösser als 100 werden, und vernachlässige auch in den späteren Formeln alle Glieder, in welchen k_m oder l_m mit höherem Index als $\overline{m}$ vorkommen. Für $\varrho = \frac{1}{4}$, bei einem Kugeldurchmesser gleich etwa $^1/_{12}$ Wellenlänge, genügt es, $\overline{m} = 3$ zu nehmen, so dass die Berechnung des Drucks sehr leicht auszuführen ist; für $\varrho = 4$ hingegen, wenn also der Kugeldurchmesser die Wellenlänge schon um einiges übertrifft, muss man bereits bis zu $\overline{m} = 7$ oder 8 gehen und für Kugeln, deren Durchmesser mehrere Wellenlängen beträgt, wird die Rechnung praktisch undurchführbar, aber, wie sich unten zeigen wird, auch nicht mehr erforderlich.

Man berechne weiter die Hülfsgrössen:

$$\frac{1}{\varrho k m} = r_m \quad \frac{2m+1}{\varrho^3 l_m} \frac{k_m^2}{k_{m-1} k_{m+1}} = s_m \quad \frac{m}{\varrho^2 l_m} \frac{k_m}{k_{m+1}} = t_m \quad \frac{1}{\varrho^2 l_m} = F_m$$

und die Hülfswinkel:

$$\chi'_m = \chi_m + \varrho - \frac{\pi m}{2} \quad \psi'_m = \frac{\pi}{2}(m+1) - \varrho - \psi_m$$

$$\tau_m = \psi'_m + \chi'_m - \chi'_{m+1} \quad \sigma_m = \chi'_{m-1} - \chi'_m - \tau_m .$$

Dann gilt:

$$G_m \cos g'_m + G_{m+2} \cos g'_{m+2} = r_m \cos \chi'_m + r_{m+2} \cos \chi'_{m+2} + s_{m+1} \cos \sigma_{m+1}$$

$$G_m \sin g'_m + G_{m+2} \sin g'_{m+2} = r_m \sin \chi'_m + r_{m+2} \sin \chi'_{m+2} + s_{m+1} \sin \sigma_{m+1} .$$

Man kann aus diesen beiden Gleichungssystemen die G_m und g'_m durch Rekurrenz berechnen, indem man mit einem hinreichend hohen Wert des Index $m = \overline{m}$ beginnt und G_{m+1} sowie G_{m+2} gleich null setzt. Ist das ausgeführt, so findet man H_m und h'_m nach den Formeln:

$$H_m \cos h'_m = t_m \cos \tau_m - 2\, r_m \sin \chi'_m + G_{m+1} \cos g'_{m+1}$$

$$H_m \sin h'_m = t_m \sin \tau_m - 2\, r_m \cos \chi'_m - G_{m+1} \sin g'_{m+1} .$$

Die F_m, G_m und H_m stimmen überein mit den im vorigen § so bezeichneten Grössen.

Das Verhältnis des Drucks der Strahlung D zu der Strahlungsenergie in der Volumeneinheit wird dann erhalten aus der Summe:

$$\frac{D}{E} = 2\pi a^2 \Bigg[\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\, G_m\, G_{m+1} \sin(g'_m - g'_{m+1}) \\ + (m+1)\, H_m\, H_{m+1} \sin(h'_{m+1} - h'_m) \\ + m(m+1)(m+2)\, F_m\, F_{m+1} \sin(\psi'_m - \psi'_{m+1}) \Bigg] .$$

§ 10. Grenzwerte des Drucks.

In den beiden Fällen, dass die Kugel entweder sehr klein oder sehr gross gegen die Wellenlänge ist, lassen sich einfache geschlossene Ausdrücke für den Druck angeben.

Wenn der Kugelradius und damit ϱ sehr klein ist, kann man sich in der Entwicklung (28) von K_m:

$$i^{m+1} K_m = i \cdot \frac{1\cdot 3 \ldots (2m-1)}{\varrho^{m+1}} \left\{ 1 + \frac{\varrho^2}{2(2m-1)} + \frac{\varrho^4}{2\cdot 4(2m-1)(2m-3)} \cdots \right\}$$
$$+ \frac{\varrho^m}{1\cdot 3 \ldots 2m+1} \left\{ 1 - \frac{\varrho^2}{2(2m+3)} + \frac{\varrho^4}{2\cdot 4(2m+3)(2m+5)} \cdots \right\}$$

auf die paar ersten Glieder beschränken. Wo dann in den obigen Formeln ein Faktor oder Divisor K_m oder ein Differentialquotient dieser Grössen auftritt, kann man stets nach Potenzen von ϱ entwickeln und enthält schliesslich den Druck D selbst in Form einer Potenzreihe nach ϱ, deren erstes Glied den gesuchten Grenzwert darstellt. Die Rechnungen, die hierzu führen, sind ziemlich umständlich, aber ganz elementar; man muss sich nur hüten, zu früh höhere Glieder wegzulassen, da sich zum Schluss solche niederer Ordnung herausheben. Man erhält als Grenzwert des Drucks für sehr kleine Kugeln:

$$\frac{D}{E} = \frac{14}{3} \pi a^2 \varrho^4 = \frac{224}{3} \pi^5 \frac{a^6}{\lambda^4}. \tag{96}$$

Für sehr grosse Kugeln findet man den Druck folgendermassen. Fällt eine ebene Welle unter einem Winkel ψ auf eine vollkommen reflektierende ebene Platte auf, so erleidet letztere einen senkrechten Druck: $P = 2E\cos^2\psi$, wobei E wiederum die Energie pro Volumeneinheit der einfallenden Welle bedeutet. (Vgl. für die einfache Ableitung dieser Regel aus Maxwell's Druckannahmen Goldhammer, Annalen der Physik, Bd. 4, 1901, pag. 844 und Boltzmann, Wied. Annalen, 22). Betrachten wir die Oberflächenelemente unserer Kugel als eben, so folgt, dass überall auf dieselbe ein senkrechter Druck gleich $2E\cos^2\vartheta$ — in unserer Bezeichnung — wirkt. Die x-Componente dieses Drucks ist $2E\cos^3\vartheta$ und der Gesamtdruck auf die Kugel wird durch Integration über die Vorderfläche gewonnen, da die beschattete Hinterfläche natürlich keine Einwirkung erleidet. Es ergiebt sich daher:

$$D = a^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\vartheta \sin\vartheta \cdot 2E\cos^3\vartheta$$

oder:

$$\frac{D}{E} = \pi a^2. \tag{97}$$

Es ist im ersten Augenblick auffällig, dass dieser für eine vollkommen reflektierende grosse Kugel geltende Wert genau übereinstimmt mit dem von Herrn Arrhenius benutzten für eine vollkommen schwarze Kugel gültigen. Doch lässt sich dieses Resultat leicht aufklären. An der Stelle, welche von der einfallenden Welle zuerst getroffen wird ($\vartheta = 0$), erleidet eine vollkommen reflektierende Kugel allerdings einen doppelt so starken Druck, als eine vollkommen schwarze. Indessen nimmt nach den Seiten hin bei der vollkommen reflektierenden Kugel der Druck viel rascher ab, weil bei flachen Incidenzen die Druckwirkung der reflektierten Welle die der einfallenden zum Teil wieder aufhebt.

§ 11. Ergebnis.

Nachdem der Druck für sehr grosse wie sehr kleine Kugeln aus den Formeln des vorigen Paragraphen bekannt war, erübrigte noch die Berechnung für Kugeln von der Grössenordnung der Wellenlänge. Ich will zur Bequemlichkeit das Verhältnis von D zu $\pi a^2 E$ mit V bezeichnen. Die Berechnung von V habe ich nach den Formeln § 9 für einige Werte des Kugelradius numerisch ausgeführt mit folgendem Resultat:

$\frac{2\pi a}{\lambda} = \varrho$	$1/4$	$1/2$	$\sqrt{1/2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4
$2a$	0.08 λ	0.16 λ	0.22 λ	0.32 λ	0.45 λ	0.64 λ	1.27 λ
$V = \frac{D}{\pi a^2 E}$	0.018	0.35	1.07	2.42	2.16	1.31	1.22
$\frac{14}{3}\varrho^4$	0.018	0.29	1.17	4.67			

Zur Vergleichung wurden die Werte von V, wie sie aus der Näherungsformel (96) folgen, mitangesetzt. Man sieht: „Beschränkt man sich auf eine Genauigkeit von etwa 20%, so genügt die Formel: $D = \frac{14}{3}\pi a^2 \varrho^4 E$ zur Berechnung des Drucks von unendlich kleinen Kugeln

an bis herauf zu Kugeln von ein Viertel Wellenlänge Durchmesser.“ Andrerseits muss nach (97) für sehr grosse Kugeln das Verhältnis von D zu $\pi a^2 E$ gleich 1 werden. Man sieht aus der Tabelle: Bei derselben Genauigkeit gilt die Formel $D = \pi a^2 E$ bis herab zu Kugeln von etwa anderthalb Wellenlängen Durchmesser.

Das Verhalten des Drucks für dazwischen liegende Werte wird durch Curve Fig. 1 veranschaulicht. Um dieselbe etwas sicherer zeichnen zu können, habe ich einige Punkte zwischen den oben berechneten bestimmt, indem ich die einfach verlaufende Grösse $\log V - 4 \log \varrho$ als Funktion von $\log \varrho$ numerisch interpolierte. Das Verhalten des Drucks lässt sich hiernach etwa so beschreiben: „Das Verhältnis V des Drucks zur „auffallenden Energiemenge“ $\pi a^2 E$ steigt von dem für grosse Kugeln gültigen und auch von Herrn Arrhenius benutzten Werte 1 zunächst langsam an, wenn man den Kugelradius verkleinert. Ist der Kugeldurchmesser auf etwa $^2/_3$ Wellenlänge herabgesunken, so erfolgt ein merkwürdiges rapides Anwachsen von V, welches bei etwa $^1/_3$ Wellenlänge Durchmesser zu einem Maximum gleich 2.5 führt. Bei weiterer Verkleinerung des Kugeldurchmessers sinkt V noch plötzlicher ab, als es vorher angestiegen ist. Für $2a = {}^1/_5 \lambda$ ist es bereits wieder unter die Einheit zurückgegangen und nimmt alsbald verschwindend kleine Werte an.“

Vergleichen wir nun den Druck des Lichts mit der Schwerkraft. Ist G die auf die Masseneinheit, also z. B. das Gramm, wirkende Schwerkraft der Sonne, s das spezifische Gewicht des Kugelmateriales, so hat die auf die ganze Kugel wirkende Schwerkraft den Betrag:

$$S = \tfrac{4}{3} \pi a^3 s \cdot G,$$

wobei a in Centimetern zu messen ist.

Der Druck des Lichts hat den Wert $\pi a^2 E \cdot V$ und das Verhältnis beider wird:

$$\frac{D}{S} = W = \frac{3}{4} \frac{E}{G} \cdot \frac{V}{a s}.$$

Nimmt man die Solarkonstante zu 2.5 (Grammkalorien pro Minute und Quadratcentimeter) an, so findet man mit Herrn Arrhenius (l. c. pag. 83) die Energiedichte der Sonnen-

Fig. 1.

Verhältnis des Drucks zur auffallenden Energie.

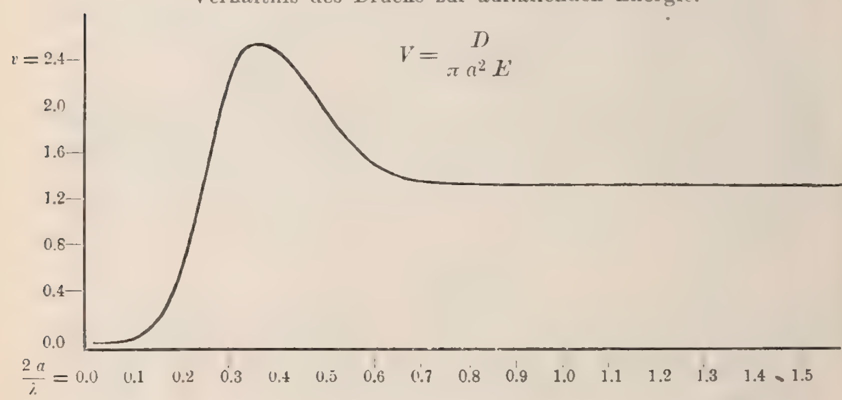
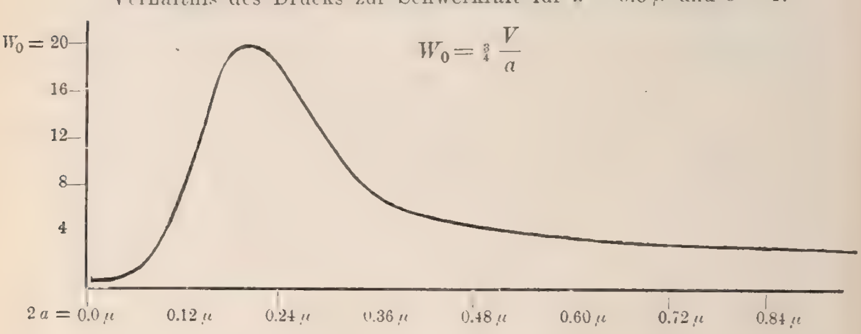


Fig. 2.

Verhältnis des Drucks zur Schwerkraft für $\lambda = 0.6\,\mu$ und $s = 1$.



strahlung an der Oberfläche der Sonne zu $27.5 \cdot 10^{-4}\,g\,\mathrm{cm}^{-2}$ (g bedeutet das Grammgewicht). Andrerseits ist die Schwere auf der Sonnenoberfläche 27.5 mal grösser als auf der Erde, daher:

$$G = 27.5\,g$$

und damit:

$$\frac{D}{S} = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{27.5\, 10^{-4}}{27.5} \frac{V}{a\, s} = 0.75\, 10^{-4} \frac{V}{a\, s},$$

wobei immer noch a in cm zu messen ist. Zieht man es vor, a in Tausendstel mm (μ) zu messen, so gilt:

$$W = \frac{D}{S} = 0.75 \frac{V}{a\, s}.$$

Wir wollen zunächst den Normalfall betrachten, dass die ganze Sonnenstrahlung aus Wellen der Länge $0.6\,\mu$ bestehe, wie sie der hellsten Stelle des Spektrums entsprechen, und das spezifische Gewicht s gleich 1 sei, und wollen das diesem Fall entsprechende Verhältnis von Druck zu Schwere mit W_0 bezeichnen.

Dann ist:

$$W_0 = \frac{D}{S} = \tfrac{3}{4} \frac{V}{a}. \tag{98}$$

Die Werte des Verhältnisses W_0, welche aus Formel (98) hervorgehen, sind in Fig. 2 graphisch dargestellt. Für grössere Werte von a, als die Figur giebt, kann man einfach $V = 1$ und:

$$W_0 = \frac{3}{4\, a}$$

setzen. Aus dieser Formel und der Figur entnimmt man folgendes: Im Normalfall wird der Druck des Lichts gleich der Schwerkraft, sobald der Kugeldurchmesser bis auf $2.5\,\lambda = 1.5\,\mu$ herabsinkt. Bei weiterer Verkleinerung der Kugel wächst der Druck über die Schwerkraft hinaus, bis er sie bei einem Kugeldurchmesser von $0.3\,\lambda = 0.18\,\mu$ um das 18-fache übertrifft. Von diesem Maximalwert sinkt er schnell wieder ab und wird bereits für den Kugeldurchmesser $0.12\,\lambda = 0.07\,\mu$ wieder der Schwerkraft gleich, um sich sodann rasch der Null zu nähern.

„Ein Ueberwiegen des Drucks der Strahlung über die Schwerkraft findet also nur für gewisse zwischen

verhältnismässig engen Grenzen liegende Kugelgrössen ($0.07 - 1.5\,\mu$) statt, innerhalb dieses Bereichs wächst aber der Druck bis auf das 18-fache der Schwerkraft an."

Bei der practischen Anwendung des vorstehenden Ergebnisses hat man vor allem zu berücksichtigen, dass die Strahlung der Sonne in Wirklichkeit nicht auf die Wellenlänge $0.6\,\mu$ konzentriert, sondern über alle möglichen Wellenlängen verteilt ist. Setzt man die Intensität der Sonnenstrahlung zwischen den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ gleich $E\,J(\lambda)\,d\lambda$, wobei:

$$\int_0^\infty J(\lambda)\,d\lambda = 1 \tag{99}$$

sein muss, damit der richtige Betrag der Gesamtenergie herauskommt, so hat man strenge den Druck zu berechnen nach der Formel:

$$D = \pi a^2 E \int_0^\infty J(\lambda)\,V\,d\lambda$$

und erhält für das Verhältnis von Druck zu Schwerkraft:

$$\frac{D}{S} = \frac{3}{4\,a\,s} \int_0^\infty J(\lambda)\,V\,d\lambda. \tag{100}$$

Die genauere Kenntnis der Funktion $J(\lambda)$, der Intensität der Sonnenstrahlung für die verschiedenen Wellenlängen vor ihrer Absorption durch die irdische Atmosphäre, ist noch ein Desideratum. Um einen beiläufigen Anhalt zu gewinnen, setze ich für $J(\lambda)$ die nach Wien für den vollkommenen Radiator geltende Formel an:

$$J(\lambda) = \frac{1}{30\,\lambda_m}\left(\frac{5\,\lambda_m}{\lambda}\right)^5 e^{-5\frac{\lambda_m}{\lambda}}, \tag{101}$$

wobei der willkürliche Faktor, mit dem $J(\lambda)$ im allgemeinen multipliziert ist, gleich so bestimmt ist, dass die Gleichung (99) erfüllt wird, und wobei für λ_m die Wellenlänge maximaler Intensität, also bei der Sonne $0.6\,\mu$ einzusetzen ist. Die Mes-

sungen von Langley[1]) zeigen, dass man durch diesen Ansatz den wirklichen Verlauf der Funktion $J(\lambda)$ jedenfalls im Groben trifft. Ich habe nun den Ausdruck (101) für $J(\lambda)$ in (100) eingeführt und den Wert des Integrals durch mechanische Quadratur abgeschätzt. Dabei hat sich herausgestellt, dass durch die Verteilung der Sonnenenergie auf verschiedene Wellenlängen der Maximalwert des Verhältnisses von Druck zu Schwerkraft etwa auf die Hälfte des für den obigen Normalfall gültigen Wertes, also beiläufig auf 10 reduziert wird.

Auf der andern Seite sind aber auch Umstände in Betracht zu ziehen, welche die Druckwerte vergrössern. Es ist erstens möglich, dass die Materie der Cometenschweife ein geringeres spezifisches Gewicht hat als 1, etwa das spezifische Gewicht 0.8 der Kohlenwasserstoffe. Zweitens ist die Solarkonstante mit 2.5 für die Strahlung der Atmosphäre ausserhalb der Sonne zweifellos zu gering angesetzt und nach neueren Versuchen etwa auf 3.5—4 zu vermehren. Beides zusammen bewirkt eine Vergrösserung des Drucks auf nahezu das Doppelte, sodass man schliesslich auf einen Maximalwert von W in der Nähe von 20 zurückkommt.

Dass die Teilchen eine Constitution besitzen sollten, bei welchen grössere Drucke auftreten, als bei vollkommen reflektierenden Kugeln, ist, wenn nicht unmöglich, so doch unwahrscheinlich. Fasst man alles zusammen, so kommt man daher zu folgendem Schluss: „Die Theorie der Cometenschweife von Arrhenius erfährt insofern eine Bestätigung, als eine Zurückführung der grössten beobachteten abstossenden Kräfte auf den Druck der Sonnenstrahlung eben noch möglich erscheint. Noch grössere derartige Kräfte, welche die Schwere um mehr als das 20- oder 30-fache übertreffen, würde man aber nicht erklären können, ohne unwahrscheinlich kleine spezifische Gewichte für die Schweifteilchen anzunehmen.

[1]) Memoirs of the National Akad. of Science. Washington Vol. IV.

Schliesslich noch eine Bemerkung über einen Punkt der Sonnenphysik. Herr Arrhenius führt auch das radial gefaserte Aussehen der Sonnenkorona auf den Druck der Sonnenstrahlung zurück, indem er annimmt, dass der aus der Sonne bei Eruptionen emporgeschleuderte Staub unter seinem Einfluss nahezu radial von der Sonne wegströmt (l. c. pag. 85). Ein Zurücksinken der Teilchen in mehr parabolischen Curven, wie sie schon beobachtet worden sind, kann nach der Ansicht von Herrn Arrhenius dadurch bewirkt werden, dass zwei Teilchen sich zufällig treffen und zusammenbacken, mit dem Effekt, dass die Schwerkraft nun den Strahlendruck überwindet. Nach dem oben festgestellten rapiden Absinken des Drucks für sehr kleine Kugeln ist es einfacher, anzunehmen, dass die emporgeschleuderten Körperchen sich durch Verdunstung verkleinern und sich dadurch dem Strahlendruck mehr und mehr entziehen, sodass sie schliesslich samt ihren gasförmigen Verdunstungsprodukten unter dem Einfluss der Schwerkraft zur Sonne zurückfallen.

Beiträge zur Sonnentheorie.

Von **R. Emden.**

(Eingelaufen 6. Juli.)

Helmholtz[1]) hat gezeigt, dass verschieden dichte, mit ungleicher Geschwindigkeit strömende Luftschichten in scharf ausgeprägten Diskontinuitätsflächen aneinander grenzen können; dann sind ähnliche Bedingungen gegeben, wie wenn der Wind über eine Wasseroberfläche streicht, und jene Trennungsfläche wird zur Bildung gewaltiger, paralleler, in Richtung der rascher bewegten Schicht vorwärts eilender Wellenzüge veranlasst. Diese, meistens unsichtbar, können der Beobachtung zugänglich werden durch parallele, in den aufsteigenden Wellenbergen entstehende Wolkenstreifen, welche oft grosse Flächen des Firmaments bedecken; durch stürmische Regenschauer, die von Perioden heiteren Wetters unterbrochen, in gleichen Zwischenräumen mehrmals im Tage wiederkehren, sowie durch die Bewegung, die sie einem zufällig von ihnen erfassten Luftballon mittheilen. Ein glücklicher Zufall gestattete mir, bei einer Ballonfahrt die Längen dieser Wellen, sowie die Beschaffenheit der beiden sich berührenden Luftschichten zu messen und Uebereinstimmung der von der Helmholtz'schen Theorie geforderten und der gemessenen Wellenlänge zu konstatiren.[2])

In einer Reihe von Abhandlungen hat Helmholtz die Bedeutung dieser Wellenbildung für die allgemeine Zirkulation

---

[1]) Helmholtz, Gesammelte Abhandlungen. Bd. I u. III.

[2]) R. Emden, Eine Beobachtung über Luftwogen. Wied. Annal. LXII. pag. 62. 1897.

der Atmosphäre dargelegt. Die Wärmemenge, welche die Atmosphäre in den äquitorialen Gegenden empfängt und in mächtiger Strömung in den obern Schichten den Polen zuführt, müssen auch der Erdoberfläche in mittleren Breiten zugeführt werden. Ein einfaches Niedersteigen jener obern Schichten ist ausgeschlossen, denn, ihr Rotationsmoment beibehaltend, würden schon in niedern Breiten regelmässig Stürme auftreten, von einer Heftigkeit, wie sie selbst ausnahmsweise nicht beobachtet werden. Der Koefficient der Wärmeleitung ist viel zu klein, dass sich der Wärmegehalt durch Leitung, der Reibungskoefficient zu klein, dass sich Rotationsmomente durch innere Reibung ausgleichen können. Vielmehr werden sich die am Aequator mit Energie gespeisten, polwärts strömenden Luftmassen in immer neu sich bildenden Diskontinuitätsflächen von den untern, an Energie ärmeren, zurück zum Aequator strömenden Luftmassen absondern. Die immer mächtiger sich ausbildenden Wellen werden mit immer steiler werdender Wellenfront weitereilen, sie werden schliesslich, wie Wasserwellen, überhängend und branden; und an Stelle jedes Wellenzuges bildet sich ein gewaltiger, horizontalgelagerter Wirbel, indem sich schliesslich die beiden Luftschichten mischen. Indem durch Bildung von Diskontinuitätsflächen die Unstetigkeit erst auf die Spitze getrieben wird, bewirkt das Aufrollen derselben stetige Uebergänge in Bezug auf Rotationsmoment und Wärmegehalt, die ohne diesen Vorgang bei der Kleinheit der Koefficienten für Wärmeleitung und Reibung unmöglich wäre.

Aehnliche Verhältnisse werden auch im Innern der flüssig gedachten, rotirenden und Wärme ausstrahlenden Sonne eintreten müssen. Dies näher auszuführen ist der Zweck der nachfolgenden Betrachtungen.[1])

---

[1]) Auf die im Folgenden zu beschreibende Schichtenbildung hat, wie ich sehe, bereits M. Brillouin hingewiesen in einer kurzen Anmerkung zur französischen Uebersetzung der Abhandlung von W. Thomson: Ueber die Sonnenwärme. W. Thomson: Conférences scientifiques et allocutions. pag. 241, Anmerkung.

Wir betrachten die Sonne zur grösseren Bequemlichkeit als rotirende Kugel; die sich ergebenden Schlüsse lassen sich ohne Weiteres auch auf ein rotirendes Ellipsoid übertragen. Um eine zu rasche Abkühlung der äussersten Schichten zu verhüten, sind wir, da Wärmeleitung zu geringe Wärmemengen nach der Oberfläche transportiren würde, genöthigt, die Sonne ganz oder bis in beträchtliche Tiefen hinab als flüssige Masse aufzufassen, die durch Wärmeabgabe dichter wird, so dass durch Wärmeausstrahlung auf- und absteigende Strömungen und durch deren Mischung mehr oder minder gleichmässige Wärmeabgabe derselben bewirkt werden. Ob die Flüssigkeit kompressibel oder inkompressibel ist, ist hierbei gleichgültig. Wir behandeln den ersten Fall, als den Allgemeineren. Da wir die Zustandsgleichung so hoch temperirter und stark komprimirter Gase nicht kennen, legen wir der Rechnung die Hypothese zu Grunde, dass der ganze Theil der Sonne, den wir betrachten, die Zustandsgleichung p (Druck) $\times$ v (Masse der Volumeinheit) $= H$ (Gaskonstante) $\times$ T (absolute Temperatur) gehorcht.

Wir nehmen ferner an, dass die Masse der g a n z e n Sonne den Gasgesetzen gehorcht, der Durchkühlungsprocess durch Konvektionsströmung durch die g a n z e Masse hindurch erfolgt. Hätte die Sonne einen f e s t e n Kern, so wäre dies für das Folgende gleichgültig: die eintretende Schichtenbildung würde dann eben nur bis zur Oberfläche dieses festen Kernes hinabreichen. Diese Gaskugel soll anfangs im adiabatischen (indifferenten) Gleichgewichte stehen, d. h. Dichte, Druck und Temperatur soll durch die ganze Masse hindurch so variiren, dass ein beliebiges Sonnentheilchen bei beliebiger, vor Wärmeaustausch geschützter Verschiebung im Sonneninnern in Bezug auf Dichte, Druck und Temperatur stets mit dem augenblicklich verdrängten Theilchen übereinstimmt. In einer nicht rotirenden Kugel muss durch Mischung auf- und absteigender Strömungen dieser Zustand stets herbeigeführt werden.

Reibungskräfte sollen nur an Stellen mit endlichen Geschwindigkeitsdifferenzen zur Wirkung gelangen.

Wir betrachten die Sonne vom Nordpole aus und bezeichnen eine Bewegung im Sinne der Rotation als Vorwärtsbewegung.

Die Massen an der Oberfläche der Sonne geben Wärme ab, werden dichter und müssen in die Tiefe sinken. Würde die Sonne nicht rotiren, so würden bei dem angenommenen Gleichgewichtszustande der Sonne diese Massen bis zum Sonnenmittelpunkt herabsteigen und daselbst eine gleiche Menge Materie verdrängen, die den freigewordenen Platz an der Oberfläche ausfüllt. Dies Strömungsbild wird aber durch die Rotation der Sonne vollständig geändert.

Aus Symetriegründen sind die Flächen gleichen Druckes Rotationsflächen, die Druckkräfte schneiden die Sonnenachse und die durch Abkühlung dichter gewordenen, einwärts sinkenden Massen müssen ihr Rotationsmoment beibehalten. Der Sonnenachse sich nähernd werden sie immer rascher vorwärts eilen und ihr Abtrieb durch Wachsen der Winkelgeschwindigkeit (Zentrifugalkraft) abnehmen. Die aufsteigenden Massen werden, ihr kleineres Rotationsmoment beibehaltend, immer rascher rückwärts eilen, mit abnehmendem Auftriebe. Wir erhalten so ungleich dichte, verschieden rasch rotirende Gasmassen, die in einer ausgeprägten Diskontinuitätsfläche an einander vorbeigleiten können. Wir erhalten so Diskontinuitätsflächen, die an beliebigen Stellen im Sonneninnern auftreten können. Ueber ihre Gestalt wissen wir a priori nichts, als dass wir es wegen Symetriegründen mit Rotationsflächen, in den meisten Fällen aber wohl nur mit mehr oder minder grossen Stücken von solchen zu thun haben werden. An diese Diskontinuitätsflächen sind nun die Bedingungen für das Zustandekommen mächtiger Wellen gegeben. Zur Sonnenachse nicht windschief gelegene Wellen oder Wellenzüge werden immer gewaltiger sich ausbilden, vorwärtseilend werden sie überhängend und an Stelle jeder Welle bildet sich durch deren Brandung ein mächtiger Wirbel, in dem sich der Ausgleich der Rotationsmomente und des Wärmegehaltes der beiden Schichten vollzieht. Nur auf diese Weise kann ein gleich-

mässiger Durchkühlungsprocess der **rotirenden** Sonne zu Stande kommen, denn die Verschiedenheit der Rotationsmomente verhindert das Zustandekommen beträchtlicher Konvektionsströme in radialer Richtung; die innere Reibung genügt bei der Kleinheit des Reibungskoefficienten nicht, in genügend kurzer Zeit die Rotationsmomente auszugleichen, ebensowenig wie die Wärmeleitung den verschiedenen Wärmegehalt.

Dieser geschilderte Mischungsprocess soll näher untersucht werden. Wir haben in erster Linie die Gestalt und Lage dieser Diskontinuitätsflächen und dadurch die Lagerung der durch sie getrennten Sonnenschichten festzustellen.

Wir bezeichnen mit R den Abstand eines Theilchens vom Sonnenmittelpunkt, mit r dessen Abstand von der Sonnenachse; der Durchmesser der Sonne sei $= D$. Das Rotationsmoment der Masseneinheit, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Sonne rotirt, sei:

$$\Omega = \omega r^2. \tag{1}$$

Bezeichnen p und ϱ Druck und Dichte, X, Y, Z, u, v, w Beschleunigungen und Geschwindigkeiten in Richtung der $x\,y\,z$-Achsen, so lauten die hydrodynamischen Gleichungen:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \\ Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\ Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t} - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0. \tag{2a}$$

Der Anfangspunkt des Coordinatensystems werde in den Sonnenmittelpunkt gelegt; die x-Achse falle mit der Sonnenachse zusammen, die y-Achse geht durch Vorwärtsbewegung in die Z-Achse über. $X\ Y\ Z$ sind die Beschleunigungen, welche die Sonnenmasse einer im Innern liegenden Masseneinheit ertheilt.

Liegt diese im Abstande R vom Sonnenmittelpunkt, so ist das Potential der Gesammtmasse der Sonne auf dieselbe:

$$V = -4\pi \left\{ \frac{1}{R} \int_0^R \varrho R^2 dR + \int_R^{\frac{D}{2}} \varrho R dR \right\}.$$

Dabei ist es gleichgültig, ob wir die Sonne mit festem Kerne oder durch die ganze Masse hindurch gasförmig annehmen. (Durch den gasförmigen Theil hindurch ist ϱ als Funktion von R bekannt, sobald die Adiabate, welche dessen indifferentes Gleichgewicht darstellt, und die Natur des Gases gegeben sind.) Würden wir die Sonne nicht als Kugel, sondern Ellipsoid betrachten, so wäre für das Folgende V als das Potential dieses Ellipsoides aufzufassen. Stets ist:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Wir beobachten nur rotirende Bewegungen um die Sonnenachse. Dann ist:

$$u = 0,$$

$$v = -\omega z = -\frac{\Omega}{r^2} z,$$

$$w = \omega y = \frac{\Omega}{r^2} y.$$

Die 3 Gleichungen 2) vereinfachen sich, wenn die Bewegung stationär geworden, in die beiden Gleichungen:

$$3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial X} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\Omega^2}{r^2} \end{aligned}$$

2^a ist identisch erfüllt.

Der Ausdruck $\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s}$, worin s eine beliebige Richtung bedeutet, lässt bei adiabatischen Processen eine wichtige Umformung zu. Der Zustand der Gasmasse sei in einem be-

stimmten Momente definirt durch die Werthe p_0 u. ϱ_0. Behandeln wir die Gasmasse adiabatisch, so sind sämmtliche Werthe von p und ϱ, welche die Gasmasse durchläuft, abhängig von p_0 u. ϱ_0 nach der Gleichung:

4) $$\frac{p}{\varrho^{\varkappa}} = \frac{p_0}{\varrho_0^{\varkappa}}$$

(wenn $\varkappa$ das Verhältniss der spezifischen Wärmen) und in jedem Momente muss sein:

4ª) $$\frac{p}{\varrho} = H\,T.$$

Der Wärmegehalt einer Gasmasse wird gemessen durch deren potentielle Temperatur. Dieselbe wird gewöhnlich definirt als diejenige Temperatur, die ein Gas erlangt, wenn es adiabatisch auf einen näher festzusetzenden Normaldruck gebracht wird. Da im Gegensatz zu einem solchen willkürlichen Normaldruck die Dichte eins eine durch das absolute Messsystem unmittelbar und eindeutig festgesetzte Grösse ist, dürfte die folgende Definition der potentiellen Temperatur zweckmässiger sein, da sie ausserdem die Formeln sehr vereinfacht, so oft die potentielle Temperatur in dieselbe eintritt:

Potentielle Temperatur ist diejenige Temperatur, die ein Gas erlangt, wenn es adiabatisch auf die Dichte eins gebracht wird. Diese Temperatur bezeichnen wir mit Θ.

Durch diese Festsetzung ist ohne weiteres auch ein potentieller Druck definirt als derjenige Druck, den das Gas ausübt, wenn es adiabatisch auf die Dichte eins gebracht wird. Dieser sei mit Π bezeichnet. Π und Θ ändern sich bei adiabatischer Behandlung nicht. Ist die Sonne im adiabatischen Gleichgewicht, so haben Π und Θ durch die ganze Sonnenmasse hindurch konstante Werthe. Strahlt ein Sonnentheilchen Wärme aus, so sinken dessen Π und Θ.

Nach 4ª) stehen Π und Θ in der Beziehung:

$$\Pi = H \cdot \Theta.$$

Wählen wir in Gl. 4 für ϱ_0 und p_0 die Werthe

$$\varrho_0 = 1 \text{ u. } p_0 = \Pi,$$

so lautet die Gleichung der Adiabate:

$$p = \varrho^{\varkappa} \cdot \Pi\, \Theta.$$

Diese Festsetzungen benützend können wir schreiben:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s} = (\Pi \cdot \Theta)^{\frac{1}{\varkappa}}\, p^{-\frac{1}{\varkappa}} \frac{\partial p}{\partial s}$$

$$= \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot (\Pi \cdot \Theta)^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{\partial p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{\partial s}.$$

Setzen wir:

$$5) \qquad \vartheta = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} (\Pi\, \Theta)^{\frac{1}{\varkappa}}, \quad \pi = p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}},$$

so wird:

$$6) \qquad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s} = \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial s}, \quad \vartheta = \text{constans}.$$

Da $\varkappa > 1$, so ändert sich ϑ gleichsinnig mit Θ, und kann deshalb ebenfalls als Mass für den Wärmegehalt einer Gasmasse dienen. Ebenso ändert sich π gleichsinnig mit p. An Stelle der beiden Variabeln ϱ und p haben wir nur noch Eine, π, da ϑ bei adiabatischen Processen konstant bleibt. Bei adiabatischem Gleichgewicht hat ϑ durch die ganze Sonnenmasse hindurch denselben Werth.

Durch den oben geschilderten Abkühlungs- und Strömungsvorgang können sich in der Sonne Schichten bilden, innerhalb welchen Wärmegehalt und Rotationsmoment konstante Werthe besitzen, während beide Grössen von einer Schicht zur andern sprungweise sich ändern. Eine solche Schicht, innerhalb welcher ϑ und Ω konstante Werthe besitzen, nennen wir eine homogene Schicht.

Mit Benutzung der eingeführten Bezeichnungen lauten die Gleichungen 3):

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \vartheta \frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\Omega^2}{r^3}.$$

Innerhalb einer homogenen Schicht gilt also die Beziehung:

$$\text{I.} \qquad V + \vartheta\,\pi = -\tfrac{1}{2}\frac{\Omega^2}{r^2} + C.$$

Wir betrachten nun zwei aneinander grenzende Schichten 1 und 2 und unterscheiden danach $\vartheta_1\ \Omega_1\ C_1$ von $\vartheta_2\ \Omega_2\ C_2$.

Damit eine Diskontinuitätsfläche bestehen kann, muss zu beiden Seiten derselben der Druck, und somit auch π, denselben Werth haben. An jeder Stelle der Grenzfläche muss also sein:

$$\pi_1 - \pi_2 = 0,$$

wobei längs derselben π_1 und π_2 variiren und an der Oberfläche der Gaskugel die Werthe $\pi_1 = \pi_2 = 0$ annehmen.

Wir erhalten demnach als Gleichung der Meridiankurve der Diskontinuitätsfläche (Berührungsflächen zweier homogenen Schichten), ausgedrückt durch r und R:

$$\text{II.} \qquad V\left(\frac{1}{\vartheta_2} - \frac{1}{\vartheta_1}\right) = \tfrac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} - \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2}\right) - \frac{C_1}{\vartheta_1} + \frac{C_2}{\vartheta_2}.$$

Die Tangentenrichtung dieser Meridiankurve ergiebt sich durch Differenziren nach r und R zu:

$$\frac{d\,V}{d\,R}\,d\,R = \frac{d\,r}{r^3}\left(\frac{\Omega_1^2\,\vartheta_2 - \Omega_2^2\,\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}\right)$$

oder:

$$\text{III.} \qquad \frac{d\,r}{d\,R} = r^3\,\frac{d\,V}{d\,R}\cdot\left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Omega_1^2\,\vartheta_2 - \Omega_2^2\,\vartheta_1}\right).$$

Der Differentialquotient hat also stets dasselbe Vorzeichen wie $\dfrac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Omega_1^2\,\vartheta_2 - \Omega_2^2\,\vartheta_1}$.

Verschwindet dieser Ausdruck, was für $\vartheta_2 = \vartheta_1$, $\Omega_1 = \Omega_2$ der Fall ist, so geht die Meridiankurve über in eine Parallele zur Sonnenachse.

Die Trennungsfläche von Schichten, die bei gleichem Wärmegehalt verschiedenes Rotationsmoment besitzen, sind in diesem Specialfalle Kreis-Cylinder-

flächen, parallel und zentrisch zur Sonnenachse gelegen.[1])

Um im allgemeineren Falle weiteren Einblick in die Formen dieser Flächen und die Lagerung der Schichten 1 und 2 zu erhalten, benützen wir das von Helmholtz bei Behandlung der Diskontinuitätsflächen der Atmosphäre angewendete Verfahren.

Die Gleichung der Trennungsfläche lautet $\pi_1 - \pi_2 = 0$ und für jede Richtung s innerhalb der Trennungsfläche ist deshalb

$$\frac{\partial (\pi_1 - \pi_2)}{\partial s} = 0 .$$

Ertheilen wir der Fläche einer Stelle eine kleine Deformation, so werden π_1 und π_2 sich ändern, und ebenfalls $\pi_1 - \pi_2$, falls das Gleichgewicht der Fläche nicht zufällig indifferent ist. Entfernen wir uns auf der Fläche auf der Normalen um die kleine Strecke ∂n, so kann der Quotient $\frac{\partial (\pi_1 - \pi_2)}{\partial n}$ positiv oder negativ sein, und dasselbe Vorzeichen hat bei stetiger Druckvertheilung auf jeder Seite der Fläche auch der Quotient $\frac{\partial (\pi_1 - \pi_2)}{\partial h}$, wobei ∂h in beliebiger Richtung zurückgelegt wird. Ist der Differentialquotient positiv, so wird bei dieser Deformation nach dieser Seite hin ein Ueberdruck entstehen, der die Fläche wieder zurückdrängt; das Gleichgewicht der Fläche ist dann stabil. Wäre der Differentialquotient negativ, so würde die auftretende Druckdifferenz die Deformation vergrössern und das Gleichgewicht wäre labil. Zur Entscheidung des Gleichgewichts genügt es, den Differentialquotienten nach den beiden Richtungen $d\,r$ und $d\,R$ zu bilden und zu sehen, in welche Schicht bei stabilem Gleichgewicht $d\,r$ oder $d\,R$ hineinragt.

Wir bilden erst $\frac{\partial (\pi_1 - \pi_2)}{\partial R}$ bei konstantem r, d. h. wir gehen parallel zur Sonnenachse nach aussen. Gleichung I. liefert:

$$\frac{\partial (\pi_1 - \pi_2)}{\partial R} = \frac{\partial V}{\partial R} \left(\frac{1}{\vartheta_2} - \frac{1}{\vartheta_1} \right). \tag{7}$$

[1]) Vergl. E. J. Wilczynski: Hydrodynamische Untersuchungen mit Anwendungen auf die Theorie der Sonnenrotation. Inauguraldissertation, Berlin 1897, pag. 8.

Der Differentialquotient ist $+$, wenn $\vartheta_1 > \vartheta_2$, also: wenn die wärmehaltigere Schicht in Richtung nach dem Sonnenpol höher liegt, ist das Gleichgewicht der Fläche stabil.

Dabei bleiben noch zwei Möglichkeiten offen. Gehen wir auf der Trennungsfläche nach aussen, so können wir uns der Sonnenachse nähern oder von ihr entfernen. Im ersten Falle müsste die wärmehaltigere Schicht auf der der Achse abgewendeten Seite der Fläche liegen; im zweiten Falle wäre die Lage derselben auf der der Sonnenachse zugewendeten Seite. Um dies zu entscheiden, bilden wir aus I. $\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial r}$ bei konstantem R und erhalten:

$$\frac{\partial(\pi_1 - \pi_2)}{\partial r} = \frac{1}{r^3}\left(\frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} - \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2}\right). \tag{8}$$

Der Differentialquotient ist positiv, wenn $\frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} > \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2}$, d. h. wenn zum grössern Rotationsmoment Ω_1 der kleinere Wärmegehalt ϑ_1 oder ein höchstens gleicher Wärmegehalt ϑ_2 gehört. In der vor Ausstrahlung geschützten Sonne hat ϑ überall denselben Werth, Ω nimmt von der Achse nach dem Aequator hin zu. Bei der Ausstrahlung nimmt ϑ gleichmässig über die ganze Oberfläche ab, so dass $\frac{\Omega^2}{\vartheta}$ vom Pol zum Aequator hin und von der Sonnenachse senkrecht nach aussen wächst. Auch tritt die Abkühlung, Abnahme von ϑ, ein für die an der Oberfläche liegenden, niedersinkenden Massen, also grösseres Ω, während die aufsteigenden Massen mit grösserem ϑ und kleinerem Ω beladen sind. In den Schichten der Sonne wird deshalb stets zum grössern Ω das kleinere ϑ gehören.

Bewegen wir uns auf einer Kugelfläche, die wir um den Sonnenmittelpunkt legen, so liegt bei stabilem Gleichgewicht die Schicht mit grösserem Wärmegehalt und kleinerem Rotationsmoment auf der der Sonnenachse zugewandten Seite der Trennungsfläche.

Die Trennungsflächen der Schichten, die sich in der rotirenden Sonne durch Wärmeausstrahlung bilden müssen, liegen also der Art, dass wir bei der Bewegung auf derselben uns von der Sonnenachse entfernen, wenn wir nach aussen gehen. Dabei liegt die an Wärme reichere, mit kleinerem Rotationsmoment behaftete Schicht auf der der Sonnenachse zugewandten Seite.

In Uebereinstimmung damit zeigt III, dass $\frac{dr}{dR}$ positiv ist.

Gehen wir parallel zur Sonnenachse nach aussen, so treffen wir stets auf wärmereichere Schichten, ebenso, wenn wir auf einer Kugelfläche von der Aequatorebene her uns der Sonnenachse nähern. Auf keinem dieser beiden Wege können wir deshalb dieselbe Trennungsfläche zweimal durchqueren. Daraus folgt:

Die Trennungsflächen sind keine geschlossenen Flächen, sondern Rotationsflächen, welche die Sonnenoberfläche schneiden.

Der Schnittwinkel ist bestimmt durch den Werth von $\frac{dr}{dR}$ an der Sonnenoberfläche.

Ueber die Gestalt dieser Fläche lässt sich im Allgemeinen wenig aussagen; sie ist bestimmt durch $\frac{dr}{dR}$. Aus III. folgt:

$$\frac{dr}{dR} = r^3 \frac{dV}{dR} \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\Omega_1^2 \vartheta_2 - \Omega_2^2 \vartheta_1} = r^3 \cdot f \cdot (R) \cdot q\,(\Omega \cdot \vartheta).$$

Die Funktion $f(R) = \frac{dV}{dR}$ kann, wenn die Gaskonstante und das Verhältniss der specifischen Wärme der Sonnenmassen bekannt ist, für den adiabatischen Gleichgewichtszustand mit genügender Genauigkeit berechnet werden.[1]) Vom Werthe 0 im Mittelpunkte steigt sie, um nach Ueberschreitung eines

---

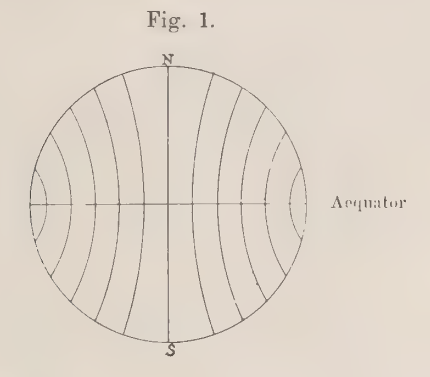
[1]) Ritter, Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Konstitution gasförmiger Weltkörper. Wied. Annal. XI. pag. 332. 1880.

Maximums, dessen Lage auf dem Radius durch $\varkappa$ bedingt ist, bis zum Werthe $-g$ auf der Oberfläche abzunehmen. Ueber den Werth der Funktion $\varphi(\Omega\,\vartheta)$ können wir ohne Kenntniss der Grösse Ω und ϑ nichts aussagen, als dass sie $+$ ist und mit steigender Differenz des Wärmegehaltes beider Schichten zunimmt. Legen wir eine Ebene durch die x (Sonnen-) und y-Achse, so können wir die Gleichung für $\frac{dr}{dR}$ auch schreiben

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{x}\left(\frac{R}{r^3 f(R)\,\varphi(\Omega\,\vartheta)} - y\right)$$

und sehen daraus, dass die Trennungsflächen die Aequatorebene senkrecht durchsetzen und an derselben Stelle im Sonnen-

Fig. 1.



innern die Tangente an der Meridiankurve um so steiler auf der Aequatorebene steht, je kleiner $\varphi(\Omega\,\vartheta)$ ist. Die Trennungsflächen sind also um so gekrümmter, je mehr sich die beiden benachbarten Schichten in Bezug auf Wärmegehalt und Rotationsmoment unterscheiden. Wären nur die Rotationsmomente, nicht auch die potentiellen Temperaturen derselben verschieden, so wären die Trennungsflächen Cylinderflächen parallel zur Sonnenachse.

Die Form der Trennungsflächen ist in vorstehender Figur angedeutet.

Ein Zerfallen der rotirenden Sonne in eine beliebig grosse Zahl solcher homogener Schichten würde einen stabilen Gleichgewichtszustand derselben darstellen, falls wir die Reibung an den Trennungsflächen vernachlässigen, und die Schichten so geordnet sind, dass bei Bewegung auf der Aequatorebene nach aussen stets Schichten mit grösserem Ω und kleinerem ϑ angetroffen werden.

Jede dieser rotirenden Schichten zeigt nun gänzlich anderes Verhalten wie die als Ganzes rotirend gedachte Sonne. Während letztere durch die ganze Masse hindurch dieselbe potentielle Temperatur besitzt, ist diese hier nur innerhalb einer Schicht konstant und wechselt von einer Schicht zur andern sprungsweise. In jeder Schicht ist das Rotationsmoment ebenfalls konstant; der kleinste Impuls genügt daher, um ein Massentheilchen eine Schicht in beliebiger Richtung durchqueren zu lassen. In jeder Schicht existirt ein Geschwindigkeitspotential, während die Rotation der Sonne eine Wirbelbewegung darstellt. Innerhalb einer Schicht wächst die Winkelgeschwindigkeit umgekehrt wie das Quadrat des Rotationsradiuses, die lineare Geschwindigkeit umgekehrt wie die erste Potenz, die Zentrifugalkraft umgekehrt wie die dritte Potenz desselben. Die Differenzen der linearen Geschwindigkeit an der Berührungsfläche zweier Schichten ist deshalb nicht konstant, sondern nimmt in dem Masse zu, wie sich die Trennungsfläche der Achse nähert. Je tiefer sich eine Trennungsfläche in das Sonneninnere hinabzieht, um so grösser wird die Differenz der sich tangirenden Geschwindigkeit und deshalb der Effekt der Reibung längs der Trennungsfläche.

Die Bildung dieser Schichten und die Gestalt der Trennungsflächen ist offenbar vollständig unabhängig von der Anwesenheit eines festen Kernes in der Sonne. In letzterem Falle wird sich die Schichtbildung eben nur bis zur Oberfläche hinabziehen und der feste Sonnenkern mit der zur Photosphäre reichenden, geschichteten Gashülle vollständig der Erde mit der geschichteten Atmosphäre entsprechen. Der Unterschied ist nur der, dass die Lagerung der Schichten und der Trennungs-

flächen, wie sie der Sonne entsprechen, in der Atmosphäre der Erde, wo in der Regel die Tangente an die Meridiankurve der Trennungsfläche der Schichten das Himmelsgewölbe zwischen Horizont und Pol schneidet, nur ausnahmsweise und lokal beschränkt auftreten kann. Der Grund hierfür liegt darin, dass in der am Aequator geheizten Atmosphäre beinahe stets zum grössern Rotationsmoment der grössere Wärmegehalt gehört, durch Heizung der Quotient $\frac{\Omega}{\vartheta}$ abnimmt, während in den sich berührenden Schichten der Sonne zum grössern Rotationsmoment der geringere Wärmegehalt gehört, da durch Abkühlung $\frac{\Omega}{\vartheta}$ zunimmt.

Tritt an der Trennungsfläche solcher Schichten Mischung ein zwischen den Mengen m_1 und m_2 der durch $\Omega_1\,\vartheta_1$ und $\Omega_2\,\vartheta_2$ charakterisirten Schichten, so lassen sich das Rotationsmoment Ω (da nur innere Kräfte wirken) und die potentielle Temperatur ϑ der Mischung nach dem Schwerpunktssatze berechnen zu:

$$(m_1 + m_2)\,\Omega = m_1\,\Omega_1 + m_2\,\Omega_2$$
$$(m_1 + m_2)\,\vartheta = m_1\,\vartheta_1 + m_2\,\vartheta_2.$$

Gleichung III lautete:

$$\frac{dV}{dR}\cdot\frac{dR}{dr} = \frac{1}{r^3}\left(\frac{\Omega_1^2\,\vartheta_2 - \Omega_2^2\,\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}\right).$$

Der Index 1 beziehe sich auf die wärmehaltigere Schicht. Um die Lage der Grenzfläche der Mischung gegen Schicht 1 zu finden, die durch $\frac{dr_1}{dR_1}$ bezeichnet werden möge, haben wir in dieser Gleichung an Stelle von Ω_2 und ϑ_2 Ω und ϑ zu setzen und finden:

$$\frac{dV}{dr}\left(\frac{dR_1}{dr_1} - \frac{dR}{dr}\right) = \frac{m_1\,\vartheta_1}{m_1 + m_2}\,\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)^2}{\vartheta_2 - \vartheta_1},$$

da $\vartheta_1 > \vartheta_2$ ist:

$$\frac{dr_1}{dR_1} > \frac{dr}{dR}.$$

Die neue Trennungsfläche gegen Schicht 1 ist also stärker gegen die Aequatorebene geneigt, wie die ursprüngliche. Ebenso erhalten wir für $\frac{d R_2}{d r_2}$, welches die Lage der Trennungsfläche der Mischung gegen Schicht 2 angiebt, nach demselben Verfahren:

$$\frac{d V}{d r}\left(\frac{d R_2}{d r_2} - \frac{d R}{d r}\right) = \frac{m_2 \vartheta_2}{m_1 + m_2} \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)^2}{\vartheta_1 - \vartheta_2},$$

also:

$$\frac{d r_2}{d R_2} < \frac{d R}{d r}.$$

Die neue Trennungsfläche gegen Schicht 2 steht also steiler auf der Aequatorebene wie die ursprüngliche. Von dem beliebigen Punkte der Trennungsfläche an, an dem die Mischung sich vollzieht, suchen sich also zwei neue Trennungsflächen in die Schichten 1 und 2 hineinzuziehen, einen dachförmigen, gegen die Aequatorebene hin offenen Raum abgrenzend. Die gemischten Partieen müssen sich deshalb längs der ursprünglichen Trennungsfläche äquatorwärts (in der Atmosphäre der Erde unter normalen Verhältnissen polwärts) in Bewegung setzen. In dem Masse, wie immer mehr Massen zur Mischung gelangen, wird die gemischte Schicht auch längs der Trennungsfläche nach aussen an Raum gewinnen und zwischen die ursprünglichen sich berührenden Schichten lagert sich eine neue Schicht mit mittlerem Rotationsmoment und Wärmegehalt ein.

Nun ist es wohl ausgeschlossen, dass die Sonne oder der gasförmige Theil derselben vollständig in eine mehr oder minder grosse Anzahl solcher homogener Schichten zerfällt. Wir haben uns die in Wirklichkeit eintretenden Verhältnisse vielmehr so vorzustellen, dass bei der von aussen her stattfindenden Abkühlung der rotirenden Sonne mehr oder minder ausgedehnte Stücke dieser Diskontinuitätsflächen sich bilden werden. Die Verschiedenheit der linearen Geschwindigkeit zu beiden Seiten der Trennungsfläche regt dieselbe zu immer mächtigerer Wellenbildung an, Wellen, die schliesslich überhängend werden und branden und sich dadurch in gewaltige

Wirbel verwandeln, innerhalb deren sich die Mischung eines grossen Theils der Massen beider Schichten vollzieht. Inzwischen werden sich an anderen Stellen neue Trennungsflächen neu entstandener Schichten gebildet haben, an denen sich derselbe Mischungsprocess wiederholt. Einzig und allein durch diesen Mechanismus, der nichts Hypothetisches an sich hat und in einer flüssigen, rotirenden, Wärme ausstrahlenden Masse mit Nothwendigkeit sich einstellen muss, kann eine gleichmässige Durchkühlung der Sonnenmasse eintreten und ein viel zu rasches Erkalten der äusseren Schichten verhindert werden. Denn Wärmeleitung und innere Reibung der Gase sind zu gering, den Ausgleich des Wärmegehaltes und der Rotationsmomente zu besorgen. Nur durch die geschilderte Bildung von Diskontinuitätsflächen und deren Aufrollen können durch Mischung verschiedene Rotationsmomente und potentielle Temperaturen ausgeglichen werden.

Wir haben bereits gezeigt, dass in einer homogenen Schicht die Winkelgeschwindigkeit im Quadrat des Abstandes von der Rotations- (Sonnenachse) abnimmt. Daraus folgt, dass es unmöglich ist, von einer Winkelgeschwindigkeit der rotirenden Sonne zu sprechen. Würde die Sonne zufällig einmal überall mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiren, so würde diese Konstanz durch die auftretende Schichtenbildung und Mischung gestört werden. Die Winkelgeschwindigkeit muss variabel sein sowohl durch die ganze Sonnenmasse hindurch, als an derselben Stelle im Laufe der Zeit. Sie braucht in einem bestimmten Moment auch nicht stetig durch die Masse zu variiren, sondern wird an einer Diskontinuitätsfläche sich sprungweise ändern. Schneidet eine Diskontinuitätsfläche die Sonnenoberfläche (Photosphäre), so erhalten wir Partien, die daselbst mit ungleicher Winkelgeschwindigkeit aneinander vorbeigleiten. Dieselbe Ueberlegung gilt aber auch hinsichtlich der potentiellen Temperaturen. Wäre $\varkappa$ für die Sonnenmasse und jene Funktion $\varphi\,(\Omega\,\vartheta)$ bekannt, so liesse sich eine mittlere Ver-

theilung der Winkelgeschwindigkeiten (Rotationsmomente) und potentiellen Temperaturen angenähert berechnen. In Ermanglung dessen müssen wir uns mit folgendem allgemeinen Raisonnement begnügen.

Kühlt sich die nicht rotirende Sonne von aussen her ab, so wird die Wirkung der Abkühlung auf die ganze Oberfläche gleichförmig sein, da die durch Konvektionsströmung bewirkte Mischung bis in gleiche Sonnentiefen hinabreicht. Rotirt die Sonne, so werden jene Strömungen, die sich an den Polen längs der Sonnenachse vollziehen, in keiner Weise gestört. Je näher wir aber dem Aequator kommen, desto weniger tief kann die Strömung hinabgehen, desto näher der Oberfläche wird sie durch Bildung von Diskontinuitätsflächen gehemmt und der Wärmeaustausch kann nur durch Aufrollen derselben und Bildung neuer ungleich langsamer in die Tiefe fortschreiten. Der Wärmeverlust der äquatorialen Partien wird deshalb langsamer ersetzt als der polaren Gegenden, die potentiellen Temperaturen der letzteren müssen deshalb verhältnissmässig höher werden. Da aber unter gleichen Drucken die wirklich beobachteten Gastemperaturen mit den potentiellen Temperaturen wachsen, so würde der Satz folgen:

a) Die Sonnenoberfläche muss in den polaren Gegenden höhere Temperaturen besitzen wie am Aequator.

Ob diese Temperaturdifferenz gross genug ist, um durch Strahlungsmessungen festgestellt zu werden, muss die Erfahrung lehren.

Ganz dieselben Ueberlegungen können wir anstellen bezüglich den Austausch der Rotationsmomente (Winkelgeschwindigkeiten) in polaren und äquatorialen Gegenden. Die äusseren Sonnenportionen ziehen sich durch Abkühlung zusammen, ihre Winkelgeschwindigkeit vergrössert sich und die Hülle muss dem Kern voraneilen. Die in polaren Gegenden ungestört in grösste Tiefen hinabreichenden Konvektionsströme sorgen für Ausgleich der Winkelgeschwindigkeit. Je näher wir dem Aequator kommen, desto bälder wird die Strömung durch Diskontinuitätsflächen gehemmt und desto langsamer theilt sich

durch fortwährendes Aufrollen und Neubildung derselben die von aussen wachsende Winkelgeschwindigkeit den tiefern Partien mit. Daraus folgt der bekannte Satz:

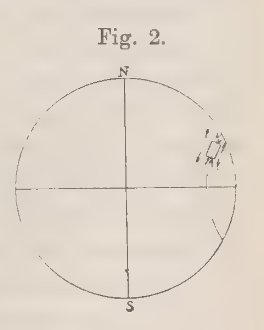
b) Die Sonnenoberfläche muss in ihren äquatorialen Gegenden grössere Winkelgeschwindigkeiten besitzen wie in den polaren Gegenden.

Sätze a) und b) sind Parallelsätze, die auf derselben Ursache basiren.

Ausser durch die Verhinderung einer gleichmässigen Winkelgeschwindigkeit der rotirenden Sonne machen sich diese Diskontinuitätsflächen, namentlich der Process ihres Aufrollens, noch in anderer Weise bemerkbar.

Die Verschiedenheit der linearen Geschwindigkeiten veranlassen die Flächen und Wellen, die schliesslich überhängend werden und branden. An Stelle jeden Wellenzuges entsteht ein gewaltiger Wirbel, der im Sinne der Rotationsbewegung der Sonne rotirt und nicht windschief zur Sonnenachse liegt. Die Differenz der linearen Geschwindigkeit zu beiden Seiten dieser Trennungsfläche wächst (pag. 352) mit deren Annäherung an die Sonnenachse. Der Ort maximaler Wellen- und Wirbelbildung wird deshalb im Innern der Sonne, nicht an der Oberfläche derselben zu suchen sein. In Fig. 2 ist ein solcher Wirbel seiner Lage nach skizzirt. Die Theorie der Wirbel lehrt, dass in seiner Achse der Druck sinkt. In Richtung der Achse saugt der Wirbel deshalb Masse ein, um sie in andern Theilen wieder auszuwerfen. Diese Saugwirkung der Cyklone der Atmosphäre ist bekannt; jeder vertikale Wirbel in einem Flusse macht sich in einer Depression der Oberfläche geltend. Liegt der Wirbel, der sich durch Aufrollen der Diskontinuitätsfläche bildet, der Sonnenoberfläche nicht zu fern, so wird er sich in jener ebenso bemerkbar machen, wie der Wasserwirbel in der Oberfläche des Wassers. Giebt man die Wilson'sche

Fig. 2.



Theorie der Beschaffenheit der Sonnenflecke als Vertiefungen in der Sonnenoberfläche zu, so brauchen wir die Ursache derselben nur in diesen Wirbeln im Sonneninnern zu suchen, um eine befriedigende Erklärung des Meisten zu erhalten, was wir über die Flecken und ihre Begleiterscheinungen wissen.

Es kann nicht im Rahmen dieser Abhandlung liegen, das ganze ungeheure Beobachtungsmaterial über Sonnenflecke in Hinsicht auf diesen Erklärungsversuch eingehend zu behandeln. Es genüge hier zu zeigen, dass die charakteristischen Erscheinungen, welche die Sonnenflecken darbieten, beinahe a priori vorausgesagt werden können, wenn wir sie mit diesen Wirbeln im Sonneninnern in Verbindung bringen.

Rollt sich eine Diskontinuitätsfläche nicht zu entfernt von der Sonnenoberfläche auf, so wird der sich ausbildende Wirbel sich allmählich auch auf derselben bemerkbar machen. Unruhe der Oberfläche, vermehrte Fackelbildung sind Vorboten des sich bildenden Fleckes, nach unserer Auffassung ein Beweis, dass die Mühle im Innern der Sonne bereits im Gange ist. Die Saugwirkung des Wirbels wird bald die an der Oberfläche der Photosphäre gelegenen Massen ergreifen. An einem oder mehreren Punkten beginnt die Masse einzusinken. Es bildet sich ein höchst unregelmässiger Krater aus; die Strömung wird allmählich stationär, und in demselben Grade wird der Krater regelmässigeren Querschnitt annehmen. In radialen Strömen stürzen die photosphärischen Massen in diesen Krater hinein, das Aussehen der Absorptionslinien im Spektrum zeigt die heftige Bewegung im Innern dieses Strudels an. „Dunklere Theile, wie der übrige Kern, sind wahrscheinlich Oeffnungen röhrenartiger Vertiefungen, welche in unbekannte Tiefen eindringen“ (Dawes).

Die eingesogenen Massen müssen durch Massen aus dem Sonneninnern ersetzt werden, und der Sonnenfleck wird deshalb von einem an Fackeln und Protuberanzen reichen Gebiete umgeben sein. „Ein Fleck ist thatsächlich in der Regel von einem Ringe von Eruptionen umgeben, und es hat den An-

schein, als ob die ausbrechenden Massen sämmtlich in ein und dieselbe Vertiefung strömten, als ob die Massen wirklich hinabgesogen würden, als ob der Fleck eine saugende Wirkung ausübte, die stark genug ist, um die in der Umgebung des Fleckes hervorbrechenden Massen in das Innere des Fleckes hinabzuziehen" (Young).

Erschöpft sich allmählich im Sonneninnern der Wirbel durch innere Reibung, so lässt dessen Saugwirkung nach, der Krater an der Sonnenoberfläche füllt sich aus und nur die noch einige Zeit andauernde, vermehrte Fackelthätigkeit an dieser Stelle zeigt, dass im Sonneninnern an dieser Stelle noch Kräfte thätig sind, die allmählich erlöschen. Wird, während der Wirbel noch in Thätigkeit ist, durch eintretende Unsymmetrie das Zuströmen nicht in Richtung der Achse erfolgen, so kann der Krater an der Sonnenoberfläche verschwinden, um nach Erneuerung des symmetrischen Zuflusses wieder zu erscheinen. Auf diese Weise können Sonnenflecke mehrmals verschwinden und an derselben Stelle der Sonne wieder aufbrechen. Entstehen die Wellen und Wirbel in zu grosser Tiefe, so wird sich ihr Auftreten auf der Sonnenoberfläche nur in vermehrter Fackelthätigkeit, nicht mehr in Kraterbildung, bemerkbar machen. Auf diese Weise lassen sich auch die „verschleierten Flecke" erklären, auf die Trouvelot aufmerksam machte. (Vgl. Young, Die Sonne, pag. 129.)

Entsteht der Wirbel nahe der Sonnenoberfläche, so wird sich sein Rotationssinn (im Sinne der Sonnenrotation) auch in einer gleichsinnigen Drehbewegung des Flecks bemerkbar machen müssen, wie sie auch zuweilen beobachtet wird. In den meisten Fällen entsteht der Wirbel in beträchtlichem Abstand von der Sonnenoberfläche, so dass der Drehsinn des Fleckes in erster Linie bedingt ist durch unsymmetrisches Herbeiströmen der angesogenen Massen. Die ablenkende Kraft der Sonnenrotation auf diese Strömungen ist bei der langsamen Winkelgeschwindigkeit derselben gering (unter gleicher Breite und bei gleicher Strömungsgeschwindigkeit etwa 25 mal kleiner als auf der Erde), besonders in den niederen Breiten, in denen sich die

Mehrzahl der Flecke ausbildet. Es kann deshalb auch sehr wohl vorkommen, dass in demselben Fleck je nach der Unsymmetrie des Anströmens verschiedener Drehsinn herrscht.

Aussehen, Entstehen und Verschwinden der Flecke wird, sobald man diese wie Wilson betrachtet. vollständig durch dies Aufrollen der Diskontinuitätsflächen klar gelegt. Ebenso befriedigend wird dadurch auch die Vertheilung der Flecke über die Sonnenoberfläche hinweg erklärt. Die Art und Weise des Entstehens der Schichtbildung und Betrachtung der Fig. 1 lehrt, dass um den Aequator herum eine Zone minimaler Flecken häufig vorhanden sein muss. Nur äusserst selten kann eine, vielleicht unsymmetrisch ausgebildete, Trennungsfläche durch unsymmetrisches Aufrollen einen Fleck in diesen Regionen verursachen. Auch in höheren Breiten werden sich selten Diskontinuitätsflächen bilden und dann nur solche, bei denen erst in grossen Tiefen genügende Differenz der linearen Geschwindigkeiten zu beiden Seiten und dadurch Wellen- und Wirbelbildung zu Stande kommt. In höheren Breiten werden wir wohl Fackeln, auch verschleierte Flecke, aber keine ausgebildeten Flecke mehr antreffen. Der Ort maximaler Fleckenhäufigkeit sind mittlere Breiten, jene Breiten maximaler Schichtbildung, die sich auch an der Oberfläche durch grösste Verschiedenheit in der stetigen Anordnung der Winkelgeschwindigkeit verrathen. Wäre jene Funktion $\varphi\,(\Omega\,\vartheta)$ bekannt, so liesse sich der Ort maximaler Fleckenhäufigkeit berechnen. So lange dies nicht möglich ist, müssen wir eher umgekehrt aus der Fleckenhäufigkeit auf die Stelle maximaler Schichtbildung schliessen. Die meisten Trennungsflächen müssen sich deshalb in mittleren Breiten bilden, wo die Tangentenrichtung an die der Sonnenoberfläche näher liegenden Theile derselben letztere unter 10^0 bis 40^0 Breite schneidet, da zwischen diese Grenze die Fleckenzone (mit seltenen Ausnahmen) eingeschlossen ist. Diese Orte maximaler und ausgeprägtester Schichtbildung haben durchaus nichts Unwahrscheinliches an sich, so dass wir auf Grund unserer Hypothese die Vertheilung der Flecken rein mechanisch und ungezwungen erklären können.

Häufig treten Sonnenflecke in gleicher Breite serienweise angeordnet auf. Unsere Hypothese lässt dies voraussehen. Denn eine Diskontinuitätsfläche bildet öfters nicht eine Welle, sondern es folgen mehrere Wellen aufeinander. Jedem Wellenzuge entspricht bei der Auflösung desselben ein Wirbel, und jedem Wirbel kann ein Sonnenfleck entsprechen. So entstehen Flecke, die ungefähr unter gleicher Breite liegend zu ziemlich gleichen Zeiten auftreten. (Eine Serie Sonnenflecke und ein System parallel gelagerter Cirrusstreifen in unserer Atmosphäre werden durch den gleichen Mechanismus hervorgerufen.)

Nach einer Periode geringster Fleckenhäufigkeit beginnen die wieder zahlreicher auftretenden Flecke sich in höheren Breiten zu bilden und die Fleckenbildung schreitet dann nach niedrigeren Breiten fort. Unsere Hypothese lässt auch dies voraussehen. Ist die Sonnenmasse in einer Periode grösster Ruhe, so werden die an der Oberfläche erkaltenden Massen verhältnissmässig stark sich abkühlen können, ehe sie niedersinken. Die Diskontinuitätsflächen beginnen in grösserer Tiefe und höherer Breite sich zu bilden und ebenso die Sonnenflecke. In dem Masse, wie die Sonne unruhiger wird, wird das labile Gleichgewicht der erkaltenden Massen an der Oberfläche rascher ausgelöst; die Massen müssen früher, weniger stark erkaltet niedersinken und dementsprechend bilden sich Schichten und Flecke in immer niedereren Breiten.

Durch Auslösung dieses labilen Gleichgewichtes können möglicherweise Planeten die Fleckenerscheinungen beeinflussen.

Werden die Sonnenflecke durch Wirbel verursacht, so müssen sie auch Eigenbewegung besitzen. Ein gerader Wirbelfaden in einer unendlich ausgedehnten ruhenden Flüssigkeitsmasse wird keine Eigenbewegung besitzen. Liegt er aber in der Nähe einer festen Wand oder der Flüssigkeitsoberfläche diesen parallel, so wird er sich diesen parallel bewegen im gleichen Sinne, wie in Folge seiner Rotationsbewegung die Flüssigkeit zwischen Wirbel und Wand hindurchströmt und mit einer Geschwindigkeit $= \frac{1}{4}$ derjenigen, mit welcher die Flüssigkeit im Fusspunkte des auf die feste Wand gefällten

Lothes strömt. Die Wirbel im Sonneninnern liegen nicht parallel der Sonnenoberfläche, zerlegen wir sie aber in zwei Wirbelkomponenten senkrecht und parallel der Sonnenoberfläche, so wird namentlich für Wirbel in niederen Breiten letztere beträchtlichen Werth besitzen. In niederen Breiten müssen die Wirbel, namentlich wenn sie nicht in zu grosser Tiefe liegen, Eigenbewegung besitzen und zwar im Sinne der Rotationsbewegung der Sonne dieser voraneilen. So erklärt sich der Satz von Duner, dass sich aus Sonnenfleckenbeobachtungen eine grössere Rotationsgeschwindigkeit der Sonne ergiebt, wie aus Spektralbeobachtungen auf Grund des Doppler'schen Princips. Nicht senkrecht zu einander gestellte Wirbel beeinflussen gegenseitig ihre Eigenbewegung; dadurch lassen sich die verwickelten Eigenbewegungen der Sonnenflecke erklären, die Faye denselben zuschreibt. Dass ein Wirbel (Sonnenfleck) sich in mehrere Wirbel theilt, kann entsprechend an den Wasserwirbeln in einem Flusse häufig beobachtet werden.

Da nach dieser Erklärung die Flecke Folgeerscheinungen des Mischungsprocesses der rotirenden Sonne sind, so wird zur Zeit ihrer maximalen Häufigkeit der Wärmeverlust der Sonnenoberfläche am vollkommensten durch Mischung mit tiefer liegenden, wärmehaltigeren Massen ausgeglichen werden. Die Zeiten maximaler Fleckenhäufigkeit werden demnach mit Zeiten erhöhter Wärmestrahlung der Sonne (Klimaschwankungen) zusammenfallen.

Young hat (die Sonne, pag. 173) die Vermuthung ausgesprochen, „dass die Flecke vielleicht Vertiefungen in der Photosphäre sind, die nicht unmittelbar durch den Druck von oben nach unten, sondern durch Verminderung des Drucks von unten nach oben, in Folge von Eruptionen, die in der Nähe stattfinden, erzeugt werden", und eine etwas künstliche Theorie der Flecke auf dieser Basis versucht.

Die Entstehung von Wirbeln durch Aufrollen der Diskontinuitätsflächen giebt unmittelbar die Druckverminderung im Sonneninnern, nach der Young sucht. Die Faye'sche Wirbel-

theorie der Sonnenflecke besitzt ihrer mannigfachen Vorzüge wegen noch zahlreiche Verbreitung, trotzdem, im Widerspruch mit der Erfahrung, das Fleckeninnere sämmtlich gleichsinnig mit der Sonne rotiren müsste, und die mechanische Erklärung des Zustandekommens dieser Wirbel nicht stichhaltig ist. Die hier skizzirte Theorie besitzt sämmtliche Vorzüge, welche die Theorie von Faye auszeichnen, ohne deren Nachtheile.

Da über den Flecken, falls sie durch Saugwirkung der im Innern der Sonne arbeitenden Wirbel entstehen, eine absteigende Strömung der die Photosphäre umhüllenden Gase eintreten muss, wie sie Oppolzer seiner Theorie der Sonnenflecke zu Grunde legt, so werden die mannigfachen Vorzüge der Oppolzer'schen Theorie auch der hier entwickelten zu Gute kommen. Die absteigende Strömung, von der Oppolzer ausgeht, findet hier ihre Erklärung.

Schichtenbildung, nach Raum und Zeit variable Rotationsgeschwindigkeiten und den Sonnenflecken analoge Gebilde sind nothwendige Folgeerscheinungen des durch Wärmeausstrahlung bewirkten Abkühlungsprocesses eines rotirenden, ganz oder nur in seinen äussern Schichten aus flüssiger Masse bestehenden Himmelskörpers.



Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 9. November 1901.

1. Herr Sebastian Finsterwalder hält im Anschluss an die Vorzeigung einiger Modelle, welche die Herstellung des neuen Ballons des Vereins für Luftschifffahrt betreffen, einen Vortrag: „Ueber die Zusammensetzung der Kugeloberfläche aus geodätischen Streifen von gleicher Maximalbreite und kleinster Gesammtlänge.“ Die Abhandlung wird anderweit zur Veröffentlichung gelangen.

2. Herr Hermann Ebert macht eine Mittheilung: „Ueber die Spectra der neuen Sterne.“ Die Abhandlung wird ebenfalls anderweit publicirt werden.

3. Herr Walther v. Dyck legt eine Arbeit des Privatdozenten E. v. Weber: „Zur Theorie der Kreisverwandtschaften in der Ebene“ vor.

4. Herr Ad. v. Baeyer spricht: „Ueber die basischen Eigenschaften des Sauerstoffs.“ Die Abhandlung wird an einem andern Orte veröffentlicht werden.



Zur Theorie der Kreisverwandtschaften in der Ebene.

Von **Eduard von Weber.**

(*Eingelaufen 9. November.*)

Obwohl die Lehre von den ebenen Kreisverwandtschaften schon durch Möbius zu einem gewissen Abschluss gebracht wurde und auch in der Folge stets zu den meist umworbenen Gebieten der neuern Geometrie gehört hat, so bietet sich doch bei tieferem Eindringen in diese Theorie eine erstaunliche Fülle unerledigter Probleme. In der vorliegenden Arbeit habe ich versucht, die vorhandenen Lücken besonders nach zwei Richtungen hin auszufüllen.

Einer genaueren Untersuchung bedürftig erscheint vor allem die Frage, welche Gestalt die Theorie der Kreisverwandtschaften unter Heranziehung complexer Werte für beide unabhängige Variable annimmt. Bei der nahen Beziehung der Kreisverwandtschaften zu gewissen imaginären Gebilden (den beiden isotropen Geradenbündeln) wird in der That die principielle Berücksichtigung der complexen Punkte der Ebene besonders wichtig. Ihre volle Bedeutung erlangt diese Fragestellung freilich erst dann, wenn auch complexe Kreisverwandtschaften in Untersuchung gezogen werden; da wir uns aber fürs erste auf das Studium der reellen Kreisverwandtschaften beschränken wollen und jene allgemeineren Transformationen blos gelegentlich streifen, so möge das Folgende nur als eine Vorarbeit in der genannten Richtung betrachtet werden.

Eine zweite Art der Fragestellung, die übrigens mit der vorher genannten aufs Engste zusammenhängt, bietet sich dar,

wenn man die von C. Segre[1]) und H. Wiener[2]) entwickelte Theorie der binären Projektivitäten vermöge eines bekannten von Möbius[3]) herrührenden Uebertragungsprincips kreisgeometrisch zu deuten sucht. In beiden Theorien stehen die Begriffe „Vertauschbarkeit" und „Orthogonalität" zweier Kreisverwandtschaften im Vordergrund des Interesses, und das Entsprechen der Sätze ist daher vielfach ein wörtliches. Da es aber zwei getrennte Kategorien von Kreisverwandtschaften der Ebene gibt und jene beiden Begriffe einen ganz verschiedenen geometrischen Inhalt haben, je nachdem die betreffenden Verwandtschaften derselben Klasse angehören oder nicht, so liefert unsere Uebertragung einen grossen Reichtum an Beziehungen, die bei der Beschränkung auf das binäre Wertgebiet nicht hervortreten können.

Auch bei dieser Gruppe von Sätzen müssen wir uns auf die Darlegung einiger Hauptgesichtspunkte beschränken.

I. Elementares über Kreisverwandtschaften.

In diesem Paragraph stellen wir zunächst die wichtigsten Sätze über Kreisverwandtschaften zusammen und knüpfen daran einige Folgerungen (Nr. 12 ff.), die zum Teil über Bekanntes hinausgehen dürften.

1. Wenn von einer ebenen KV[4]) drei Paare entsprechender Punkte $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$, $A_3 A_3'$ gegeben sind, so findet man nach Möbius[5]) in folgender Weise zu einem beliebigen Punkt A_4 den entsprechenden A_4': Man setze in der Ebene einen positiven Drehsinn fest; dann ist der $\sphericalangle (K, K')$ zwischen zwei gerichteten

[1]) Journ. f. Math. 100 p. 317—330 (1887); vgl. auch Memorie della R. Acc. delle scienze di Torino, serie 2ª vol. 38 (1888) p. 2—24.

[2]) Leipz. Ber. 43 (1891) p. 646, Einschub I; ferner: „Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden". Hab.-Schrift, Darmstadt 1885.

[3]) Leipz. Ber. 4 (1852) p. 41—54 = Journ. f. Math. 52 (1856) = Werke II p. 189—204.

[4]) d. h. Kreisverwandtschaft.

[5]) Werke II p. 209 f.

Kurven K, K', die sich in einem Punkte P schneiden, eindeutig bestimmt als derjenige Winkel, um den man die gerichtete Tangente von K im Punkte P um diesen Punkt in der angenommenen positiven Richtung zu drehen hat, bis sie mit der gerichteten Tangente von K' im Punkte P zusammenfällt. Bezeichnet jetzt das Symbol PQR den durch die Punkte P, Q, R gehenden Kreis, genommen in der Richtung, die von P über Q nach R führt, so sind durch die Gleichungen

$$\sphericalangle (A_1 A_2 A_3, A_1 A_2 A_4) = \sphericalangle (A'_1 A'_2 A'_3, A'_1 A'_2 A'_4)$$
$$\sphericalangle (A_1 A_2 A_3, A_1 A_3 A_4) = \sphericalangle (A'_1 A'_2 A'_3, A'_1 A'_3 A'_4)$$

die Kreise $A'_1 A'_2 A'_4$, $A'_1 A'_3 A'_4$ und infolge dessen auch A'_4 als Schnittpunkt derselben eindeutig bestimmt. Man erhält auf diesem Wege eine sog. direkte KV; eine indirekte KV ergibt sich, wenn man in den obigen Gleichungen die rechten Seiten mit -1 multiplicirt. Eine KV ist also eindeutig bestimmt durch 3 Paare entsprechender Punkte und die Angabe, ob sie direkt oder indirekt sein soll.

2. Ihren einfachsten analytischen Ausdruck finden die direkten bezw. indirekten KV bezw. durch die Formeln

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}; \tag{1}$$

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \tag{2}$$

worin $z, z', \bar{z}$ bezw. für $x + iy$, $x' + iy'$, $x - iy$ geschrieben wurde, ferner x, y und x', y' rechtwinklige cartesische Coordinaten der reellen Punkte der Ebene, endlich $abcd$ irgend welche complexe Constanten bedeuten, deren Determinante $ad - bc$ nicht null ist. Die complexe Zahl z bezeichnen wir als das Affix des reellen Punktes x, y.

Versteht man unter dem Doppelverhältnis von 4 Punkten $A_1 A_2 A_3 A_4$, deren Affixe bezw. $z_1 z_2 z_3 z_4$ sind, die Grösse

$$(A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4},$$

so ergibt sich aus den obigen Transformationsformeln sogleich die fundamentale Eigenschaft, dass das Doppelverhältnis von 4 Punkten bei beliebiger KV invariant bleibt, bei beliebiger indirekter KV in seinen conjugirten Wert übergeht.

3. Das Doppelverhältnis von 4 Punkten $ABCD$ ist dann und nur dann reell, wenn sie cyclisch (d. h. auf einem Kreise) liegen; es ist dann und nur dann von der Form $e^{i\beta}$ (β reell), wenn sie orthocyclisch liegen, d. h. wenn durch A, B ein Kreis geht, der C von D harmonisch trennt;[1]) dann geht auch durch C und D ein Kreis, der A von B harmonisch trennt.

Liegen 4 Punkte sowohl cyclisch als orthocyclisch, ohne dass zwei derselben zusammenfallen, d. h. ist ihr Doppelverhältnis gleich -1, so heissen sie harmonisch. Man erhält zu 3 Punkten A, B, C den vierten harmonischen D als zweiten Schnittpunkt des Kreises ABC mit dem durch C gehenden Kreis des Büschels, das A und B zu Grenzpunkten hat, also mittels linearer Construktionen.[2])

4. Aus Nr. 1 ergibt sich die euklidische Construktion einer durch 3 Paare definirten KV; eine kreisgeometrische, die nur lineare Operationen verlangt, folgt unmittelbar aus dem von H. Wiener[3]) herrührenden Satze, dass man für eine binäre Projektivität, von der 3 Paare gegeben sind, zu jedem Punkt den entsprechenden lediglich durch wiederholte Construktion vierter harmonischer Punkte finden kann. Diese Methode überträgt sich ohne weiteres auf jede direkte KV in der Ebene; hat man solcherweise für die KV, die durch die Paare

$$A_1 A_1', \ A_2 A_2', \ A_3 A_3' \tag{3}$$

[1]) Dies soll heissen, dass C und D hinsichtlich des Kreises invers sind.

[2]) Die linearen Construktionen der Kreisgeometrie sind 1) durch 3 Punkte einen Kreis zu legen; 2) von 2 Kreisen, die durch einen gegebenen Punkt gehen, den zweiten Schnittpunkt zu bestimmen. Die quadratische Construktion ist die Lösung der Aufgabe, von 2 punktweise bekannten Kreisen die Schnittpunkte zu finden. Vgl. E. Study, Math. Ann. 49 p. 528.

[3]) Leipz. Ber. 43 (1891) p. 672.

definirt ist, zu A_4 den entsprechenden Punkt A_4' linear construirt, so entspricht der zu A_4' hinsichtlich des Kreises $A_1' A_2' A_3'$ inverse Punkt[1]) dem Punkte A_4 in der indirekten KV, die durch dieselben 3 Punktepaare (3) bestimmt wird.[2])

5. Wenn für eine KV, die durch (1) definirt ist, die Determinante $ad - bc = 0$ ist, und mit P und Q die Punkte mit den Affixen $\frac{a}{c}$ bezw. $\frac{-d}{c}$ bezeichnet werden, so ist jedes Punktepaar, das P als zweiten oder Q als ersten Punkt enthält, ein Paar entsprechender Punkte der Verwandtschaft. Diese heisst dann „singulär", die Punkte P, Q (die auch coincidiren können) ihre „singulären Punkte". Analoges gilt für die Formel (2); ein Unterschied zwischen direkter und indirekter KV findet bei verschwindender Determinante nicht mehr statt.

Singuläre Verwandtschaften bleiben im Folgenden, wo nichts anderes bemerkt wird, stets von der Betrachtung ausgeschlossen.

6. Jede direkte KV besitzt zwei verschiedene oder zusammenfallende reelle Fixpunkte, deren Affixe $z_1\, z_2$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0 \tag{4}$$

sind. Entsprechen sich in einer direkten KV irgend zwei Punkte involutorisch, so ist die Verwandtschaft selbst involutorisch; dazu ist die Bedingung $a + d = 0$ notwendig und hinreichend. Eine derartige KV werde eine „Möbiusinvolution"[3]) genannt; sie ist durch ihre Fixpunkte $M_1\, M_2$ eindeutig bestimmt und zwar derart, dass jedem Punkt A der zu ihm hinsichtlich $M_1\, M_2$ harmonische Punkt A' entspricht. Eine Möbiusinvolution ist ferner auch durch 2 Paare entsprechender

---

[1]) Die Construktion der Inversion an einem punktweise bekannten Kreis ist nach E. Study (Math. Ann. 49 p. 530) ebenfalls linear ausführbar.

[2]) Nach Nr. 26 ist diese indirekte zu jener direkten KV harmonisch.

[3]) A. F. Moebius, Leipz. Ber. 5 (1853) p. 176—190 = Werke II p. 219—236.

Punkte AA', BB' definirt: man findet dann zu jedem Punkte C folgendermassen[1]) den entsprechenden C': Ist D zu C hinsichtlich AA' harmonisch, ferner E zu C hinsichtlich BB', F zu D hinsichtlich BB', G zu E hinsichtlich AA' harmonisch, so ist C' zu C hinsichtlich F und G harmonisch. Einfacher ist folgende Construktion: Schneiden sich die Kreise ABC und $A'B'C$ zum zweitenmale in C_1, so schneiden sich die Kreise $AB'C_1$ und $BA'C_1$ zum zweitenmale in C'.

7. Diejenige Möbiusinvolution, die mit einer gegebenen direkten KV $\mathfrak{P}$ die Fixpunkte $M_1\,M_2$ gemein hat, nennen wir die „Fixpunktsinvolution" von $\mathfrak{P}$: sind A', A_0 die Punkte, die einem gegebenen Punkte A in $\mathfrak{P}$ bezw. in der inversen Transformation $\mathfrak{P}^{-1}$ entsprechen, und ist B zu A hinsichtlich A', A_0 harmonisch, so ist AB ein Paar der Fixpunktsinvolution.[2]) Diese Involution ist also linear construirbar, auch wenn die Fixpunkte von $\mathfrak{P}$ nicht bekannt sind.

8. Sind AA' zwei entsprechende Punkte der direkten KV $\mathfrak{P}$ mit den Fixpunkten $M_1\,M_2$, so ist das Doppelverhältnis $(A\,A'\,M_1\,M_2)$ constant, wie auch das Paar $A\,A'$ gewählt sein mag; diese complexe Constante heisst die „Invariante" von $\mathfrak{P}$. Sind $z_1\,z_2$ die Affixe von $M_1\,M_2$, so kann die Gleichung (1) in der Form:

$$\frac{z'-z_1}{z'-z_2} = \varkappa\,\frac{z-z_1}{z-z_2} \tag{5}$$ [3])

geschrieben werden, worin $1/\varkappa$ die Invariante von $\mathfrak{P}$ bedeutet; dabei hat $\varkappa$ den Wert:

$$\varkappa = \frac{1}{4}\left(a + d - \sqrt{(a+d)^2 - 4}\right)^2, \tag{6}$$

wenn, wie in der Folge immer, $ad - bc = 1$ angenommen wird. Die Invariante einer Möbiusinvolution ist gleich -1. Genügen die direkten Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}$ der Beziehung:

---

[1]) H. Wiener, Leipz. Ber. 43 (1891) p. 670.

[2]) H. Schroeter, Journ. f. Math. 77 p. 120 f. (1874); H. Wiener a. a. O.

[3]) Vgl. auch Klein-Fricke, Vorl. über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Bd. I p. 163 ff. Leipzig 1890.

$$\mathfrak{P}' \mathfrak{P} \mathfrak{P}'^{-1} = \mathfrak{Q},^{1)}$$

so sagen wir, „$\mathfrak{P}$ ist durch die direkte KV $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{Q}$ äquivalent“ oder „$\mathfrak{P}'$ transformirt $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{Q}$“; dann geht jedes Paar AA' von $\mathfrak{P}$ durch die Transformation $\mathfrak{P}'$ in ein Paar BB' entsprechender Punkte von $\mathfrak{Q}$ über, was wir mit H. Wiener so ausdrücken:

$$AA' \{\mathfrak{P}'\} BB'.$$

Aus der Thatsache, dass eine Transformation $\mathfrak{P}'$, die $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{Q}$ transformirt, auch die Fixpunkte von $\mathfrak{P}$ in die von $\mathfrak{Q}$ überführt, schliesst man jetzt sofort: Damit zwei direkte KV durch eine direkte (bezw. indirekte) KV äquivalent seien, ist notwendig und hinreichend, dass ihre Invarianten gleich oder reciprok (bezw. conjugirt oder conjugirt-reciprok) seien.

Erst in Nr. 34 werden wir für den Fall, dass diese Bedingung erfüllt ist, alle Transformationen bestimmen, die diese Ueberführung leisten.

9. Eine indirekte KV (2) ist dann und nur dann involutorisch, wenn sie eine Inversion an einem reellen[2]) Kreis darstellt, d. h. wenn ihre Coefficienten der Bedingung

$$\frac{a}{c} = \frac{-\bar{d}}{\bar{c}}; \quad \frac{b}{c} \text{ reell}$$

genügen. Der betr. reelle Kreis ist dann durch die Gleichung

$$c z \bar{z} + d z - a \bar{z} - b = 0 \tag{7}$$

dargestellt.

Da eine gerade (bezw. ungerade) Zahl indirekter KV nacheinander ausgeübt stets eine direkte (bezw. indirekte) KV liefert, so ist das Produkt zweier Inversionen J_1 und J_2 eine

---

[1]) Unter dem Produkt $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ ist die Transformation zu verstehen, die erhalten wird, wenn man zuerst $\mathfrak{P}'$, dann $\mathfrak{P}$ ausführt.

[2]) Nach F. Klein nennen wir einen Kreis reell oder complex, je nachdem die Coefficienten seiner cartesischen Gleichung alle reell sind oder nicht; im ersten Fall heisst der Kreis „einteilig“ oder „nullteilig“, je nachdem er reelle Punkte enthält oder nicht.

direkte KV $\mathfrak{P}$, und zwar eine sog. „zweispiegelige" Verwandtschaft.[1]) Schneiden sich die beiden reellen Direktrixkreise der Inversionen $J_1 J_2$ (wir nennen sie kurz die Kreise $J_1 J_2$) in 2 reellen Punkten $M_1 M_2$, so sind diese die Fixpunkte von $\mathfrak{P}$, und diese KV wird als „elliptische Transformation" [2]) bezeichnet: im entgegengesetzten Fall gibt es 2 reelle Punkte $M_1 M_2$, die hinsichtlich J_1 und J_2 gleichzeitig invers sind; diese sind die Fixpunkte der Kreisverwandtschaft $\mathfrak{P}$, die man jetzt eine „hyperbolische Transformation" nennt.

Die Kreise des Büschels (J_1, J_2) sind die Niveaukreise[3]) von $\mathfrak{P}$, d. h. sie gehen vermöge $\mathfrak{P}$ ineinander über; die Kreise des dazu adjungirten[4]) Büschels nennt man die Bahnkreise, da sie (und nur sie, falls $\mathfrak{P}$ keine Involution ist) vermöge $\mathfrak{P}$ einzeln invariant bleiben. Umgekehrt ist jede direkte KV, die einen einteiligen Kreis K festlässt, eine zweispiegelige KV die K als Bahnkreis besitzt.

10. Da jedes Paar einer hyperbolischen KV zu den Fixpunkten cyclisch, jedes Paar einer elliptischen KV zu den Fixpunkten orthocyclisch liegt, also die Zahl $\varkappa$ (Nr. 8) im ersten Fall reell ist, im zweiten den absoluten Betrag 1 besitzt, so schliesst man leicht: die Transformation (1) ist, wenn $ad-bc=1$ angenommen wird, dann und nur dann elliptisch, wenn $a+d$ reell, $(a+d)^2<4$ ist; sie ist dann und nur dann hyperbolisch, wenn entweder $a+d$ reell, $(a+d)^2>4$ oder wenn $a+d$ rein imaginär ist. Eine direkte KV mit zusammenfallenden Fixpunkten ist durch die Bedingung $(a+d)^2=4$ charakterisirt; eine solche ist daher stets zweispiegelig; ihre Bahn- und Niveaukreise bilden je ein Berührungsbüschel.

[1]) Unter einer Spiegelung verstehen wir hier stets nur eine Inversion, nicht auch eine Möbiusinvolution, im Gegensatz zu der Bezeichnungsweise des Herrn Wiener, wonach jede direkte KV, als Produkt zweier Involutionen (Nr. 36), zweispiegelig heisst.

[2]) Klein-Fricke a. a. O.

[3]) Klein-Fricke a. a. O.

[4]) so sagen wir statt „conjugirt", da wir dieses Wort zu häufig in anderem Sinn gebrauchen müssen.

11. Aus der Thatsache, dass das Produkt dreier Inversionen dann und nur dann eine Inversion liefert, wenn die 3 Direktricen, oder wie wir kurz sagen wollen, die 3 Inversionen demselben Büschel angehören,[1]) schliesst man leicht, dass in der Gleichung

$$\mathfrak{P} = J_1 J_2 \text{ oder } J_1 \mathfrak{P} = J_2, \quad \mathfrak{P} J_2 = J_1$$

jeder der Faktoren J_1, J_2 innerhalb des Büschels (J_1, J_2) beliebig gewählt werden kann, worauf dann der andere eindeutig bestimmt ist; mit anderen Worten: Ergibt eine zweispiegelige KV mit einer Inversion J links oder rechts multiplicirt eine Inversion, so gehört J dem Büschel der Niveaukreise an und umgekehrt.

12. Damit die Inversionen J_1 und J_2 vertauschbar seien, ist notwendig und hinreichend, dass ihre Direktricen sich rechtwinklig schneiden; ihr Produkt liefert in diesem Falle (und nur in diesem) eine Möbiusinvolution $\mathfrak{J}$; eine solche kann sowohl als elliptische wie als hyperbolische KV aufgefasst werden. Jeder Kreis, der die Fixpunkte derselben enthält oder harmonisch trennt, bleibt bei $\mathfrak{J}$ invariant, so dass der Unterschied zwischen Bahn- und Niveaukreisen verschwindet; wir wollen beide Kreissysteme als Bahnkreise von $\mathfrak{J}$ bezeichnen.

Es möge hier beiläufig die Aufgabe erledigt werden, alle Möbiusinvolutionen $\mathfrak{J}$ zu bestimmen, die 2 gegebene einteilige Kreise K, K' ineinander überführen. Sind $M_1 M_2$ die Fixpunkte einer solchen Transformation $\mathfrak{J}$ und $\varkappa$ der durch $M_1 M_2$ gehende zu K orthogonale einteilige Kreis, so steht $\varkappa$ auch auf K' senkrecht, da ja $\mathfrak{J}$ den Kreis K in K', den Kreis $\varkappa$ in sich überführt. Bezeichnet man also mit $\{\varkappa\}$ die Inversion an dem Kreise $\varkappa$, so ist $\mathfrak{J}$ gleich dem Produkte $\{\varkappa\}\,\{\lambda\}$, wo λ den in $M_1 M_2$ auf $\varkappa$ senkrecht stehenden einteiligen Kreis bezeichnet. Da nun die Inversion $\{\varkappa\}$ die Kreise K, K' invariant lässt, so muss $\{\lambda\}$ den Kreis K in K' transformiren, d. h. λ ist ein einteiliger Potenzkreis der beiden gegebenen. Die

[1]) H. Wiener, Leipz. Ber. 43 p. 669 (1891).

Möbiusinvolutionen, die die gegebenen Kreise K, K' ineinander überführen, haben also die Form $\{\varkappa\}\ \{\lambda\}$. wo $\varkappa$ einen beliebigen einteiligen Kreis des zu dem Büschel (K, K') adjungirten Büschels, λ einen einteiligen Potenzkreis von K und K' bedeutet. Gibt es zwei solche Potenzkreise λ, λ', d. h. schneiden sich K und K' reell, so gibt es auch 2 getrennte Scharen von Möbiusinvolutionen der verlangten Beschaffenheit; ihre Fixpunktepaare liegen bezw. auf λ und λ' harmonisch zu den Schnittpunkten von K und K'. Gibt es nur einen einteiligen Potenzkreis λ, so gibt es auch nur eine Schar von Möbiusinvolutionen, deren Fixpunkte auf λ harmonisch zu den Grenzpunkten des Büschels (K, K') gelegen sind.

13. Die Fixpunkte einer Möbiusinvolution $\mathfrak{J}$, die durch 2 Paare entsprechender Punkte $A\,A'$, $B\,B'$ definirt ist, werden folgendermassen construirt:

Man lege durch A und A' einen beliebigen Kreis K, und construire nach Nr. 6 den ihm entsprechenden Kreis K', sowie die beiden Potenzkreise p, p' von K und K', was ausser linearen nur eine quadratische Construktion[1]) erfordert; dann sind nach der vor. Nr. p, p' Bahnkreise von $\mathfrak{J}$. Legt man jetzt durch B und B' den zu p orthogonalen Kreis q', ferner den zu p' orthogonalen Kreis q, so schneiden sich entweder p und q oder p' und q' in 2 reellen Punkten, den gesuchten Fixpunkten; die Construktion erfordert sonach 2 quadratische Operationen.

14. Um die Fixpunkte einer beliebigen direkten KV zu bestimmen, construiren wir zuerst ihre Fixpunktsinvolution (Nr. 7), dann deren Fixpunkte nach dem soeben geschilderten Verfahren. Bei einer zweispiegeligen nichtinvolutorischen KV $\mathfrak{P}$ erfordert die Bestimmung der Fixpunkte $M_1\,M_2$ ausser linearen Constructionen nur eine quadratische; denn wählt man die Punkte $A\,B$ beliebig, und ermittelt $A'\,A''\,B'\,B''$ nach der Vorschrift:

$$A\,\{\mathfrak{P}\}\,A'\,\{\mathfrak{P}\}\,A''; \; B\,\{\mathfrak{P}\}\,B'\,\{\mathfrak{P}\}\,B'',$$

---

[1]) E. Study, Math. Ann. 49 p. 532.

so schneiden sich entweder die Kreise $AA'A''$ und $BB'B''$ in $M_1 M_2$, oder das durch sie bestimmte Büschel hat $M_1 M_2$ zu Grenzpunkten.

Kennt man von der direkten KV $\mathfrak{P}$ den einen Fixpunkt M_1, so ist der zweite als vierter harmonischer Punkt zu M_1 hinsichtlich eines beliebigen Paars der Fixpunktsinvolution linear construirbar.

15. Wird eine indirekte Kreisverwandtschaft $\mathfrak{Q}$, die keine Inversion ist, durch die Formel (2) dargestellt, worin wieder $ad - bc = 1$ gesetzt ist, so hat die direkte $KV\,\mathfrak{Q}^2$ die Form:[1])

$$z' = \frac{(a\bar{a} + b\bar{c})z + (a\bar{b} + b\bar{d})}{(c\bar{a} + d\bar{c})z + (c\bar{b} + d\bar{d})},$$

ist also nach Nr. 10, da ihre Determinante auch gleich 1 wird, zweispiegelig. Ihre Fixpunkte bleiben entweder bei $\mathfrak{Q}$ ebenfalls fest oder sie vertauschen sich gegenseitig; im ersten Fall bezeichnen wir sie als Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}$ selbst als „hyperbolisch"; im zweiten Fall als „Gegenpunkte" von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}$ selbst als „elliptisch"; ist $\mathfrak{Q}^2$ parabolisch, so nennen wir auch $\mathfrak{Q}$ eine parabolische Verwandtschaft.

Ist die indirekte KV $\mathfrak{Q}$ hyperbolisch, und bedeuten $M_1 M_2$ ihre Fixpunkte, ferner J die Inversion mit dem Centrum M_1, die den Punkt M_2 mit dem auf der Geraden $M_1 M_2$ zu wählenden Coordinatenanfangspunkt O vertauscht, so hat die indirekte KV $J\mathfrak{Q}J$ augenscheinlich die Form $z' = a\bar{z}$, wo a eine complexe Constante bedeutet, lässt also, wie man sofort durch Rechnung bestätigt, zwei senkrechte durch O gehende Gerade und sonst keine reellen Kreise oder Geraden invariant. Ist ferner $\mathfrak{Q}$ elliptisch, und bedeuten $M_1 M_2$ ihre Gegenpunkte, ferner J dieselbe Inversion wie vorhin, so hat die Kreisverwandtschaft $J\mathfrak{Q}J$ die Form $z' = a/\bar{z}$, lässt also einen einteiligen Kreis mit dem Centrum O und den zu ihm concentrischen und orthogonalen nullteiligen Kreis, ausserdem aber keine reellen Kreise oder Geraden stehen; daraus folgt:

---

[1]) Klein-Fricke a. a. O. p. 198 f.

Jede hyperbolische indirekte Kreisverwandtschaft $\mathfrak{Q}$ besitzt zwei und nur zwei orthogonale einteilige Fixkreise, die sich in den Fixpunkten von $\mathfrak{Q}$ schneiden; jede elliptische indirekte $KV\mathfrak{Q}$ einen einteiligen und einen dazu orthogonalen nullteiligen Fixkreis, und die Gegenpunkte von $\mathfrak{Q}$ sind die Grenzpunkte des durch diese 2 Kreise definirten Büschels. Die Kreise des letzteren werden durch $\mathfrak{Q}$ involutorisch vertauscht, so zwar, dass die Fixkreise die Potenzkreise eines jeden Paars entsprechender Kreise des Büschels sind: auch die Kreise des adjungirten Büschels werden durch $\mathfrak{Q}$ unter sich transformirt, doch so, dass ausser den im hyperbolischen Falle vorhandenen reellen Nullkreisen kein reeller Kreis des Büschels stehen bleibt. Auch ersieht man jetzt sofort, dass $\mathfrak{Q}$ hyperbolisch oder elliptisch ist, je nachdem dies für die zweispiegelige Verwandtschaft $\mathfrak{Q}^2$ zutrifft, je nachdem also das Quadrat der reellen Zahl

$$a\bar{a} + d\bar{d} + b\bar{c} + c\bar{b}$$

grösser oder kleiner als 4 ist.[1]) Für eine parabolische KV ist der eine Fixkreis einteilig, der andere ein auf ihm liegender Punktkreis.

Die Ermittelung der Fix- bezw. Gegenpunkte einer durch 3 Paare gegebenen indirekten KV verlangt nach dem Vorigen ausser linearen Constructionen nur eine quadratische, dasselbe gilt für die Aufsuchung der Fixkreise, die mit den Potenzkreisen irgend zweier in $\mathfrak{Q}$ sich entsprechenden Bahnkreise von $\mathfrak{Q}^2$ identisch sind. Nur wenn $\mathfrak{Q}^2$ eine Möbiusinvolution ist, werden für die Ermittelung der Gegenpunkte zwei quadratische Constructionen nötig.

16. Ist $\mathfrak{Q}$ eine gegebene indirekte KV, und die Inversion J so gewählt, dass die direkte KV:

$$\mathfrak{P} = J\mathfrak{Q}$$

zweispiegelig wird, so muss es in dem Bahnkreisbüschel von $\mathfrak{P}$ einen reellen Kreis geben, der zu dem Kreis J orthogonal ist,

[1]) Klein-Fricke a. a. O.

also sowohl vermöge J als $\mathfrak{P}$, mithin auch durch $\mathfrak{Q}$ in sich übergeführt wird, d. h. der Kreis J muss zu einem der Fixkreise von $\mathfrak{Q}$ orthogonal sein. Umgekehrt, ist dies der Fall, so lässt $J\mathfrak{Q}$ jenen Fixkreis invariant, ist also zweispiegelig; daraus folgt: Jede indirekte KV kann auf ∞^3 Arten als Produkt dreier Inversionen

$$\mathfrak{Q} = J J_1 J_2$$

dargestellt werden; J ist dabei ein beliebiger unter den ∞^2 reellen Kreisen, die zu dem einen oder anderen der beiden Fixkreise von $\mathfrak{Q}$ orthogonal sind. Hat man J gewählt, so ist das Büschel (J_1, J_2) bestimmt und J_1 kann innerhalb desselben noch auf ∞^1 Arten angenommen werden, worauf J_2 eindeutig festgelegt ist.

Offenbar kann man jeden der 3 obigen Faktoren unter geeigneter Modification der übrigen an eine beliebige Stelle bringen; daraus folgt die Gleichberechtigung derselben, sowie die Thatsache, dass mit $J\mathfrak{Q}$ zugleich $\mathfrak{Q}J$ zweispiegelig ist, was übrigens auch unmittelbar aus der Beziehung

$$\mathfrak{Q}J = \mathfrak{Q}(J\mathfrak{Q})\mathfrak{Q}^{-1}$$

hervorgeht. Ist der Kreis J zu beiden Fixkreisen von $\mathfrak{Q}$ orthogonal, dann und nur dann ist $J\mathfrak{Q}$ und ebenso $\mathfrak{Q}J$ eine Möbiusinvolution, und $\mathfrak{Q}$ lässt sich also auf je ∞^1 Arten in jeder der Formen $J\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}J$ schreiben. Beiläufig folgt auch noch, dass jede direkte KV als Produkt von 4 Inversionen darstellbar ist, von denen eine ganz beliebig angenommen werden kann, ferner dass, wenn $\mathfrak{P}$ eine zweispiegelige KV, J die Inversion an einem ihrer Bahnkreise bedeutet, das Produkt $J\mathfrak{P}$ eine indirekte KV liefert, die jenen Bahnkreis und den dazu orthogonalen des Bahnkreisbüschels zu Fixkreisen hat.

Bedeutet J die Inversion an einem der Fixkreise von $\mathfrak{Q}$, so gilt die Beziehung $\mathfrak{Q}J = J\mathfrak{Q}$, d. h. J ist mit $\mathfrak{Q}$ vertauschbar; auch besitzen nur die Fixkreise von $\mathfrak{Q}$ diese Eigenschaft.

17. Jede hyperbolische indirekte KV $\mathfrak{Q}$ kann in der Form

$$\varkappa \frac{z' - \zeta_1}{z' - \zeta_2} = \frac{\bar{z} - \bar{\zeta}_1}{\bar{z} - \bar{\zeta}_2},$$

jede elliptische in der Gestalt

$$\varkappa \frac{z' - \zeta_1}{z' - \zeta_2} = \frac{\bar{z} - \bar{\zeta}_2}{\bar{z} - \bar{\zeta}_1}$$

geschrieben werden, wo $\varkappa$ eine complexe Constante und $\zeta_1 \zeta_2$ das einemal die Fix-, das andremal die Gegenpunkte bedeuten. Daraus folgt leicht:

Sind $M_1 M_2$ die Fixpunkte, $A A'$ ein beliebiges Paar entsprechender Punkte einer indirekten hyperbolischen KV, so hat das Doppelverhältnis $(M_1 M_2 A A')$ den constanten absoluten Betrag $|\varkappa|$. Sind $M_1 M_2$ die Gegenpunkte, $A A'$ ein beliebiges Paar einer indirekten elliptischen KV, so hat jenes Doppelverhältnis eine constante Amplitude.[1])

Im hyperbolischen Falle ist die Zahl $|\varkappa|$ das Doppelverhältnis der binären Projektivität, welche die KV auf dem einen ihrer einteiligen Fixkreise definirt: auf dem anderen ist dies Doppelverhältnis dann $= -|\varkappa|$. Im elliptischen Falle ist ampl. $\varkappa$ das Doppelverhältnis, welches irgend zwei entsprechende auf dem einteiligen Fixkreis liegende Punkte mit den Gegenpunkten bilden.

Da eine indirekte KV durch Angabe eines Fixkreises und der darauf herrschenden Projektivität eindeutig bestimmt ist, so schliesst man, dass die Zahl $|\varkappa|$ (bezw. ampl. $\varkappa$) die einzige Invariante einer hyperbolischen (bezw. elliptischen) indirekten KV gegenüber beliebigen Kreisverwandtschaften ist, d. h. zwei indirekte KV sind dann und nur dann durch eine KV ineinander transformirbar, wenn ihre Invarianten übereinstimmen oder reziproke Werte haben.

---

[1]) Es ist ampl. $z = \frac{z}{|z|} = e^{i\varphi}$, wenn $z = \varrho e^{i\varphi}$.

18. Sind $ABCD$ vier gegebene Punkte, so ist der Ort aller Punkte D' derart, dass

$$|(ABCD)| = |(ABCD')|$$

der durch D gehende Kreis, der A von B harmonisch trennt; hieraus und aus dem oben Gesagten, sowie aus Nr. 8 folgert man leicht:

Sind AA', BB', M_1 gegebene Punkte, ferner N_1 der zweite Fixpunkt derjenigen direkten KV, die M_1 zum ersten Fixpunkt hat und A in A', B in B' verwandelt, und legt man durch N_1 die beiden Kreise, die A von A' und B von B' harmonisch trennen, so ist der zweite Schnittpunkt M_2 dieser Kreise der zweite Fixpunkt derjenigen indirekten hyperbolischen KV, die den ersten Fixpunkt M_1 und die Paare AA', BB' besitzt.

Da, wie wir später sehen werden, M_1 und N_1 sich in derjenigen Möbiusinvolution entsprechen, die A mit B' und B mit A' vertauscht, so folgt aus dem eben Gesagten eine einfache lineare Construktion des zweiten Fixpunkts einer indirekten KV, von der der eine Fixpunkt und 2 Paare gegeben sind. Aus der Bemerkung ferner, dass die genannten Punkte $M_1 M_2$ auch die Gegenpunkte einer indirekten KV sind, die A in B' und B in A' überführt, fliesst eine einfache Construktion der indirekten KV, die zwei gegebene Paare entsprechender Punkte und einen vorgeschriebenen Gegenpunkt besitzt.

II. Punktfelder und complexe Kreise.

19. Die beiden Büschel von Minimalgeraden der Ebene sind definirt durch die Gleichungen

$$x + iy = \text{const. bezw. } x - iy = \text{const.}$$

Jede Minimalgerade enthält einen und nur einen reellen Punkt. Ist nun ein beliebiger complexer Punkt der Ebene gegeben, und bedeuten A, B die reellen Punkte der durch ihn gehenden Minimalgeraden des ersten bezw. zweiten Systems, so nennen wir mit É. Laguerre[1]) die Punkte AB die „reellen Repräsentanten" jenes complexen Punktes und bezeichnen den

[1]) Bull. Soc. Mat. 1 p. 241—248 (1873) und an vielen andern Orten.

letzteren mit $[AB]$; offenbar ist $[BA]$ der zu $[AB]$ conjugirt imaginäre Punkt, $[AA]$ der reelle Punkt A. Die Repräsentanten eines complexen Punktes mit den cartesischen Coordinaten ξ, η haben darnach in der complexen Zahlenebene die Affixe $\xi + i\eta$ und $\overline{\xi - i\eta}$;[1]) umgekehrt repräsentiren zwei reelle Punkte mit den Affixen z_1 und z_2 den complexen Punkt mit den cartesischen Coordinaten

$$\frac{1}{2}(z_1 + \bar{z}_2), \quad \frac{-i}{2}(z_1 - \bar{z}_2).$$

20. Die allgemeinste direkte complexe Kreisverwandtschaft wird definirt durch die Formeln:

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \tilde{z}' = \frac{a\tilde{z}+\beta}{\gamma\tilde{z}+\delta}, \tag{1}$$

die allgemeinste indirekte complexe KV durch die Gleichungen

$$z' = \frac{a\tilde{z}+b}{c\tilde{z}+d}, \quad \tilde{z}' = \frac{az+\beta}{\gamma z+\delta}. \tag{2}$$

worin $z, z' \tilde{z}, \tilde{z}'$ bezw. die Bedeutung

$$x + iy, \; x' + iy', \; x - iy, \; x' - iy'$$

haben und die x, y, x', y' nunmehr auch beliebige complexe Werte annehmen sollen; eine direkte (indirekte) KV verwandelt also jede Minimalgerade in eine Minimalgerade desselben (des andern) Systems.

Setzt man in (1) bezw. (2) für a, β, γ, δ die Werte $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$, so erhält man die allgemeinste direkte bezw. indirekte reelle KV in einer Form, die sich auch auf die complexen Punkte der Ebene erstreckt; man erkennt jetzt unmittelbar folgendes: Transformirt eine reelle KV den reellen Punkt A in A', B in B', so verwandelt sie den complexen Punkt $[AB]$ in $[A'B']$ oder $[B'A']$, je nachdem sie direkt oder indirekt ist.

Den complexen Punkt $[A'B']$, der vermöge einer complexen KV dem Punkt $[AB]$ entspricht, findet man folgender-

---

1) $\bar{a}$ bedeutet den conj. imaginären Wert zu a.

massen: Ist die KV direkt, und bedeuten $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ die direkten reellen Verwandtschaften, die bezw. durch die beiden Formeln (1) definirt werden, wenn man $\tilde{z}, \tilde{z}'$ durch $\bar{z}, \bar{z}'$ ersetzt, so gilt die Beziehung

$$A\{\mathfrak{P}\}A'; \; B\{\mathfrak{P}'\}B'.$$

Ist die KV dagegen indirekt, und bezeichnen jetzt $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ die beiden indirekten reellen KV (2), so hat man:

$$B\{\mathfrak{P}\}A', \; A\{\mathfrak{P}'\}B'.$$

21. Ist eine indirekte reelle Kreisverwandtschaft $\mathfrak{Q}$

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \tag{3}$$

vorgelegt, so betrachten wir jedes Paar entsprechender Punkte derselben als die Repräsentanten eines complexen Punktes x, y; der Ort dieser ∞^2 complexen Punkte[1]) ergibt sich durch Elimination von z, z' aus der Gleichung (3) und den folgenden:

$$x + iy = z, \; x - iy = z'$$

in der Form:

$$\bar{c}(x^2 + y^2) + \bar{d}(x - iy) - \bar{a}(x + iy) - \bar{b} = 0, \tag{4}$$

ist also ein complexer Kreis,[2]) den wir einfach den „Kreis $\mathfrak{Q}$" nennen wollen; er ist dann und nur dann reell, wenn $\mathfrak{Q}$ eine Inversion bedeutet; sein conjugirt complexer ist der Kreis $\mathfrak{Q}^{-1}$. Natürlich entspricht auch jedem complexen Kreis eine ganz bestimmte indirekte reelle KV.

22. Wollen wir für die direkten reellen KV eine analoge Interpretation gewinnen, so sind wir zur Heranziehung eines neuen geometrischen Begriffs[3]) genötigt. Die ∞^2 complexen

---

[1]) Die Bezeichnung ∞^ν bezieht sich im Folgenden stets auf die Anzahl ν der wesentlichen reellen Parameter eines Gebildes; es gibt also ∞^4 complexe Punkte der Ebene, ∞^6 reelle, ∞^{12} complexe KV etc.

[2]) Vgl. auch É. Laguerre a. a. O. p. 247.

[3]) Analoge Begriffsbildungen für die Zwecke der projektiven Geometrie finden sich schon bei C. Juel, Diss. Kopenhagen 1885, Acta Math. 14 p. 1—30, und C. Segre, Atti Acc. Torino t. 25 p. 276, 430; t. 26 p. 35, 592 (1889—91).

Punkte nämlich, die durch die Paare einer direkten reellen KV repräsentirt werden, genügen der Gleichung:

$$\overline{x - iy} = \frac{a(x + iy) + b}{c(x + iy) + d}. \tag{5}$$

Sowie man nun die ∞^2 complexen Punkte, die durch eine Gleichung der Form

$$f(x, y) = 0 \text{ oder } \varphi(x + iy, x - iy) = 0$$

definirt werden, als eine „Curve“ bezeichnet, ebenso nennen wir den Inbegriff aller complexen Punkte x, y, die einer Relation der Form

$$\varphi(x + iy, \overline{x - iy}) = 0$$

genügen, ein „Punktfeld“, insbesondere ein circulares, wenn diese Gleichung die Form (5) hat; doch wollen wir der Kürze halber das Wort Punktfeld stets in diesem speziellen Sinne gebrauchen.

Jeder direkten reellen KV entspricht so ein ganz bestimmtes Punktfeld, und umgekehrt; der identischen Transformation insbesondere ist das Feld der reellen Punkte

$$\overline{x - iy} = x + iy$$

zugeordnet. Da das reelle Punktfeld genau ∞^6 Kreisverwandtschaften gestattet, nämlich alle reellen, so können die Punktfelder der Ebene, wie man leicht erkennt, auch definirt werden als der Inbegriff der ∞^6 Lagen, die das reelle Punktfeld bei beliebiger complexer KV annimmt.

Das Doppelverhältnis von 4 reellen Punkten der Ebene ist gleich demjenigen der 4 von ihnen auslaufenden Minimalstrahlen des ersten Systems, und gleich dem conjugirten Wert des Doppelverhältnisses der 4 durch sie gehenden Minimalgeraden des zweiten Systems. Demnach lässt sich die Eigenart der Punktfelder und complexen Kreise auch so aussprechen: Bezieht man die beiden Büschel von Minimalgeraden projektiv aufeinander, d. h. so, dass je 4 Strahlen des ersten Büschels dasselbe Doppelverhältnis haben wie die entsprechenden des

zweiten, so schneiden sich entsprechende Strahlen, wie bekannt, in den Punkten eines complexen Kreises; bezieht man aber die zwei Büschel „conjugirt-projektiv", nämlich so, dass die Doppelverhältnisse entsprechender Quodrupel conjugirte Werte haben, so ist das Erzeugnis ein Punktfeld. Bemerken wir noch, dass das Doppelverhältnis von 4 Punkten $[A_i B_i]$ eines complexen Kreises gleich dem Doppelverhältnis der 4 reellen Punkte $A_1 A_2 A_3 A_4$ oder gleich dem conjugirten Wert des Doppelverhältnisses $(B_1 B_2 B_3 B_4)$ zu setzen ist.

Ein Punktfeld oder ein complexer Kreis artet dann und nur dann in ein Paar von Minimalgeraden aus, wenn die zugehörige KV singulär ist; die singulären Punkte der letzteren sind die reellen Punkte jener beiden Minimalgeraden.

23. Unter der „Inversion an dem complexen Kreis $\mathfrak{Q}$" verstehen wir diejenige involutorische indirekte KV, die alle Punkte des Kreises $\mathfrak{Q}$ einzeln fest lässt; sie hat die Form

$$z' = \frac{-\bar{d}\tilde{z} + \bar{b}}{\bar{c}\tilde{z} - \bar{a}}; \quad \tilde{z}' = \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{c}z + \bar{d}},$$

wenn $\mathfrak{Q}$ selbst durch (3) definirt ist. Der dem Punkt $[AB]$ hinsichtlich des Kreises $\mathfrak{Q}$ inverse Punkt $[A'B']$ wird also nach der Vorschrift

$$A\{\mathfrak{Q}\}B'; \; A'\{\mathfrak{Q}\}B$$

gefunden; einem reellen Punkte A entspricht demnach derjenige complexe, dessen Repräsentanten dem A rückwärts bezw. vorwärts entsprechen, mit andern Worten: das reelle Punktfeld verwandelt sich durch Spiegelung an dem complexen Kreise $\mathfrak{Q}$ in das Punktfeld $\mathfrak{Q}^2$. Ist $\mathfrak{Q}$ hyperbolisch, so bleiben bei der Inversion an $\mathfrak{Q}$ zwei reelle Punkte fest, nämlich die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$; ist $\mathfrak{Q}$ elliptisch, so gibt es zwei reelle Punkte, die sich vermöge jener Inversion entsprechen: die Gegenpunkte von $\mathfrak{Q}$.

Sind die Punkte M, N' durch die Angaben

$$\infty\{\mathfrak{Q}\}N', \; M\{\mathfrak{Q}\}\infty$$

definirt, so ist der Punkt $[MN']$ der inverse zu dem Punkte ∞, d. h. also das Centrum des Kreises $\mathfrak{Q}$, und man bestätigt leicht,[1]) dass sein Abstand von allen Punkten des Kreises constant ist.

Von der „Spiegelung an einem Punktfeld", die der Inversion an einem complexen Kreise analog ist, soll in § IV die Rede sein.

24. Sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zwei Punktfelder oder zwei complexe Kreise, also die Kreisverwandtschaften

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P}\,\mathfrak{Q}^{-1};\quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{Q}^{-1}\,\mathfrak{P}$$

beide direkt, bezeichnen wir ferner mit AB bezw. $A'B'$ die Fixpunkte von $\mathfrak{R}$ bezw. $\mathfrak{R}'$, so hat man

$$(6) \qquad AB\,\{\mathfrak{P}\}\,A'B';\quad AB\,\{\mathfrak{Q}\}\,A'B',$$

und es sind AA' und BB' die einzigen Paare entsprechender Punkte, die den beiden gegebenen Verwandtschaften $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ gemeinsam sind, also $[AA']$ und $[BB']$ die Schnittpunkte der gegebenen Punktfelder bezw. Kreise. Sind ferner $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zwei Punktfelder, so entspricht dem Punkte $[AB]$ bezw. $[BA]$ sowohl in $\mathfrak{P}$ als auch in $\mathfrak{Q}$ der Punkt $[A'B']$ bezw. $[B'A']$ und es sind dies die einzigen complexen Punkte, die durch $\mathfrak{P}$ auf gleiche Art transformirt werden wie durch $\mathfrak{Q}$. Bedeuten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ complexe Kreise, so gilt analoges, nur dass jetzt $[AB]$ sowohl durch $\mathfrak{P}$ als durch $\mathfrak{Q}$ in $[B'A']$ und ebenso $[BA]$ in $[A'B']$ übergeführt wird.

Ist $\mathfrak{R}$ und infolgedessen auch $\mathfrak{R}'$ parabolisch, also A mit B und A' mit B' identisch, so sagen wir, die Punktfelder bezw. Kreise $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ berühren sich im Punkte $[AA']$.

25. Es bedeute jetzt $\mathfrak{P}$ ein Punktfeld, $\mathfrak{Q}$ einen complexen Kreis; dann sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ indirekte KV, und zwar beide hyperbolisch oder beide elliptisch; von dem Fall, dass sie Inversionen darstellen, wollen wir vorläufig absehen.

Sind die Verwandtschaften $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ hyperbolisch, so gilt für ihre Fixpunkte AB bezw. $A'B'$ wieder die Beziehung (6), also schneidet das Punktfeld $\mathfrak{P}$ den Kreis $\mathfrak{Q}$ in zwei Punkten

[1]) É. Laguerre a. a. O. p. 247.

$[AA']$ und $[BB']$, d. h. AA', BB' sind die gemeinsamen Paare von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$. Dagegen gibt es jetzt kein Paar complexer Punkte, die sich sowohl in $\mathfrak{P}$ als in $\mathfrak{Q}$ entsprächen.

Sind $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ elliptisch, und AB, $A'B'$ ihre Gegenpunkte, so sind AA' und BB' Paare von $\mathfrak{P}$, AB' und BA' Paare von $\mathfrak{Q}$ und es gibt keine andern vier Punkte dieser Eigenschaft. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ haben jetzt kein reelles Punktepaar gemeinsam, und das Punktfeld schneidet den Kreis überhaupt nicht. Dagegen existiren nunmehr zwei complexe Punkte $[AB]$, $[BA]$, die von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in derselben Weise, nämlich in $[A'B']$ bezw. $[B'A']$ transformirt werden.

Für den Fall, dass $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ parabolisch, also A mit A' und B mit B' identisch sind, sagen wir wiederum: das Punktfeld $\mathfrak{P}$ berührt den Kreis $\mathfrak{Q}$ im Punkte $[AA']$.

Versteht man im Vorigen unter $\mathfrak{P}$ das reelle Punktfeld, so entspringt die schon aus Nr. 15 bekannte Thatsache: Der Kreis $\mathfrak{Q}$ enthält, jenachdem $\mathfrak{Q}$ hyperbolisch oder elliptisch ist, zwei reelle Punkte (die Fixpunkte) oder zwei conjugirt imaginäre Punkte, die durch die Gegenpunkte von $\mathfrak{Q}$ repräsentirt werden.

26. Besitzt die eine der Transformationen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ der Nr. 24 und infolgedessen auch die andere die Periode zwei, so nennen wir die Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ und ebenso die zugeordneten Punktfelder resp. Kreise „orthogonal“ oder „harmonisch[1]“; z. B. werden die Möbiusinvolutionen und die Inversionen aus der Gesamtheit der reellen KV dadurch ausgeschieden, dass sie zu dem reellen Punktfeld harmonisch liegen sollen. Die harmonische Beziehung soll uns in § IV ausführlich beschäftigen; hier betrachten wir nur den Fall, dass $\mathfrak{P}$ ein Punktfeld, $\mathfrak{Q}$ einen Kreis, also $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ Inversionen bedeuten. Sind die Kreise der letzteren, die wir mit K, K' bezeichnen, beide einteilig, und $ABC..$ Punkte der Peripherie von K, ferner $A'B'C'..$ die ihnen vermöge $\mathfrak{P}$ entsprechenden Punkte, so liegen die letzteren auf K' und es sind AA', BB' .. auch Paare von $\mathfrak{Q}$. Die Peripherien von K und K' werden also

---

[1]) Nach H. Wiener, Lpz. Ber. 42 (1890) p. 262.

durch $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in derselben Weise projektiv bezogen; diese KV haben sonach ∞^1 Paare reeller entsprechender Punkte gemein, mit andern Worten: das Punktfeld $\mathfrak{P}$ schneidet den Kreis $\mathfrak{Q}$ in ∞^1 complexen Punkten. Die von letzteren gebildete Mannigfaltigkeit bezeichnet man passend als eine „Kreisspur“; eine solche entsteht aus den ∞^1 reellen Punkten eines einteiligen Kreises durch beliebige complexe KV.

Sind die Kreise der Inversionen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ nullteilig, so hat das Punktfeld $\mathfrak{P}$ mit dem Kreis $\mathfrak{Q}$ keinen Punkt gemein.

Bedeuten A, B zugeordnete Punkte der Inversion $\mathfrak{R}$, ferner $A' B'$ die ihnen in $\mathfrak{P}$ entsprechenden Punkte, so hat man

$$A B \{\mathfrak{Q}\} B' A',$$

und $A' B'$ ist ein Paar der Inversion $\mathfrak{R}'$, also wird der complexe Punkt $[AB]$ sowohl durch $\mathfrak{P}$ als durch $\mathfrak{Q}$ in den Punkt $[A' B']$ übergeführt. Die reellen Kreise K, K' sind demnach so aufeinander bezogen, dass nicht nur ihre etwaigen reellen, sondern auch ihre ∞^2 complexen Punkte sich vermöge $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ in derselben Weise entsprechen, und man erhält auf diese Weise offenbar auch alle Paare entsprechender complexer Punkte, die den Verwandtschaften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gemeinsam sind. Sind die Kreise K, K' identisch, so bleibt K vermöge $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ invariant, $\mathfrak{P}$ ist also zweispiegelig, K ein Bahnkreis von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\mathfrak{R}$.

III. Vertauschbarkeit und Inversibilität der Kreisverwandtschaften.

27. Die reellen Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ heissen vertauschbar, wenn sie der Gleichung

$$(1) \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{Q} \text{ oder } \mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}\mathfrak{P}$$

genügen; wir sagen ferner, $\mathfrak{Q}$ ist durch $\mathfrak{P}$ „inversibel“ oder „$\mathfrak{P}$ invertirt $\mathfrak{Q}$“, wenn die Beziehung

$$(2) \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{Q}^{-1}$$

gilt. Ist $\mathfrak{P}$ eine direkte KV, so führt sie das Punktfeld (bezw. den Kreis) $\mathfrak{Q}$ unter der ersten Annahme in sich, unter der

zweiten in das conjugirte Gebilde über; ist dagegen $\mathfrak{P}$ indirekt, so findet das Umgekehrte statt. Ein Punktfeld (oder Kreis) $\mathfrak{Q}$ gestattet also dann und nur dann die indirekte Transformation $\mathfrak{P}$, wenn $\mathfrak{Q}$ durch $\mathfrak{P}$ inversibel ist.

Im vorigen Paragraphen haben wir die Wirkung reeller Kreisverwandtschaften auf complexe Punkte untersucht; hier soll ihre Wirkung auf complexe Kreise und Punktfelder studirt werden, d. h. wir bestimmen erstens alle Kreisverwandtschaften, die ein gegebenes Punktfeld oder einen complexen Kreis invariant lassen, bezw. in das conjugirte Gebilde überführen, zweitens alle Punktfelder und complexen Kreise, die bei einer gegebenen KV invariant bleiben oder in das conjugirte Gebilde übergehen. Dazu brauchen wir nur alle Fälle aufzuzählen, in der die Relation (1) oder (2) stattfindet.

28. Soll $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{Q}$ vertauschbar sein, so muss $\mathfrak{P}$ jedes Paar entsprechender Punkte von $\mathfrak{Q}$ wieder in ein solches Paar überführen. Ist nun $\mathfrak{P}$ eine direkte KV, $\mathfrak{Q}$ eine indirekte hyperbolische KV, so muss $\mathfrak{P}$ die Fixkreise π, π' und ebenso die Fixpunkte $M_1 M_2$ von $\mathfrak{Q}$ entweder vertauschen oder festlassen. Bedeutet jetzt AA' ein auf π liegendes Paar von $\mathfrak{Q}$ und hat man $AA' \{\mathfrak{P}\} BB'$, so liegen, wenn $\mathfrak{P}$ die Fixkreise $\pi\pi'$ vertauscht, die Punkte BB' auf dem Kreise π'. Blieben nun die Punkte $M_1 M_2$ bei $\mathfrak{P}$ fest, so wären die reellen Doppelverhältnisse

$$(3) \qquad (AA' M_1 M_2), \ (BB' M_1 M_2)$$

nach Nr. 17 sowohl gleich als entgegengesetzt, was nicht möglich ist. Würden andererseits M_1 und M_2 durch $\mathfrak{P}$ vertauscht, so wären jene Doppelverhältnisse sowohl reciprok als entgegengesetzt, was ebenfalls nicht stattfinden kann. Also muss $\mathfrak{P}$ die Fixkreise von $\mathfrak{Q}$, aber auch die Fixpunkte $M_1 M_2$ stehen lassen; denn andernfalls wären die Doppelverhältnisse (3) gleich und reciprok, also harmonisch, d. h. $\mathfrak{Q}$ wäre eine Inversion. Umgekehrt, lässt $\mathfrak{P}$ die Fixkreise und Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ in Ruhe, so führt sie $\mathfrak{Q}$ in sich über.

Ist $\mathfrak{Q}$ eine indirekte elliptische KV, so weiss man von vorneherein, dass $\mathfrak{P}$ den einteiligen Fixkreis π von $\mathfrak{Q}$ fest-

lassen muss, und erkennt ähnlich wie oben, dass auch die Gegenpunkte von $\mathfrak{Q}$ bei $\mathfrak{P}$ festbleiben, da $\mathfrak{Q}$ andernfalls eine Inversion wäre. Also findet man schliesslich: Die direkten KV, die eine allgemeine indirekte Kreisverwandtschaft $\mathfrak{Q}$ in sich überführen, bilden eine eingliedrige Gruppe[1]) zweispiegeliger Verwandtschaften, deren Bahnkreisbüschel die Fixkreise von $\mathfrak{Q}$ enthält.

29. Sollen die indirekten Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}$ vertauschbar sein, so muss $\mathfrak{P}'$, falls $\mathfrak{Q}$ zwei einteilige Fixkreise π, π', also reelle Fixpunkte $M_1 M_2$ besitzt, diese Kreise vertauschen oder festlassen. Ersteres ist aber ausgeschlossen; denn sind $A A'$ wieder entsprechende auf π gelegene Punkte von $\mathfrak{Q}$ und hätte man

$$A A' M_1 M_2 \{\mathfrak{P}'\} B B' M_1 M_2 \quad \text{oder} \quad A A' M_1 M_2 \{\mathfrak{P}'\} B B' M_2 M_1,$$

so dass B und B' auf π' liegen, so gäbe es auch eine direkte KV, die dasselbe leisten, also $\mathfrak{Q}$ ebenfalls in sich überführen würde, was nach der vorigen Nr. nicht möglich ist. Darnach hat $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{Q}$ die Fixkreise gemein, entsteht also aus einer Kreisverwandtschaft $\mathfrak{P}$ der oben definirten eingliedrigen Gruppe durch Multiplikation mit der Inversion J bezw. J', die π bezw. π' zur Direktrix hat. Da aber das Produkt JJ' oder $J'J$ selbst jener eingliedrigen Gruppe angehört, ferner J und J' mit allen Transformationen derselben vertauschbar sind, so lassen sich die indirekten KV, die $\mathfrak{Q}$ in sich überführen, auf jede der 4 Arten

$$J\mathfrak{P},\ J'\mathfrak{P},\ \mathfrak{P}J,\ \mathfrak{P}J' \tag{4}$$

schreiben, worin $\mathfrak{P}$ die ∞^1 Transformationen jener eingliedrigen Gruppe durchläuft, und ganz dasselbe gilt offenbar auch für den Fall, dass π' nullteilig, also $\mathfrak{Q}$ elliptisch ist. Natürlich ist $\mathfrak{Q}$ selbst in der Schaar (4) enthalten.

J und J' sind offenbar die einzigen Inversionen, die $\mathfrak{Q}$ in sich überführen; man kann daher die Fixkreise einer indirekten

[1]) Vgl. hierüber Klein-Fricke a. a. O.

KV $\mathfrak{Q}$ auch als die Potenzkreise der complexen Kreise $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}^{-1}$ bezeichnen.

30. Die Annahme, dass $\mathfrak{Q}$ eine Inversion bedeutet, erledigt sich sehr einfach; es genügt, das Resultat auszusprechen: Die direkten KV, die mit der Inversion $\mathfrak{Q}$ vertauschbar sind, bilden eine dreigliedrige Gruppe, bestehend aus allen elliptischen Transformationen, deren Fixpunkte hinsichtlich $\mathfrak{Q}$ invers sind; ist $\mathfrak{Q}$ einteilig, so gibt es noch eine zweite dreigliedrige Gruppe dieser Art, bestehend aus den hyperbolischen Transformationen, deren Fixpunkte auf dem Kreis $\mathfrak{Q}$ liegen. Die indirekten mit $\mathfrak{Q}$ vertauschbaren Transformationen entstehen aus den genannten durch vorherige oder nachherige Multiplikation mit $\mathfrak{Q}$.

31. Da die Vertauschbarkeit zweier KV eine reciproke Beziehung ist, so haben wir durch die Entwickelungen der Nr. 28 gleichzeitig die Aufgabe erledigt, alle indirekten Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$ zu bestimmen, die mit einer direkten KV $\mathfrak{Q}$ vertauschbar sind: Gilt die Relation (1) und bedeutet $\mathfrak{Q}$ eine direkte, $\mathfrak{P}$ eine indirekte KV, so ist 1) entweder $\mathfrak{Q}$ hyperbolisch, $\mathfrak{P}$ eine hyperbolische indirekte KV, die mit $\mathfrak{Q}$ die Fixpunkte gemein hat, oder eine Inversion, deren einteilige Direktrix die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ enthält, oder 2) $\mathfrak{Q}$ ist eine elliptische direkte, $\mathfrak{P}$ eine elliptische indirekte KV, die die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ zu Gegenpunkten hat, im Speziellen eine Inversion, die die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ vertauscht.

Eine Möbiusinvolution ist darnach mit allen indirekten KV vertauschbar, die ihre Fixpunkte zu Gegenpunkten oder zu Fixpunkten haben.

32. Auch der noch übrige Fall zweier vertauschbarer direkter KV erledigt sich aufs leichteste:[1]) Zwei direkte KV sind dann und nur dann vertauschbar, wenn sie entweder die Fixpunkte gemein haben, oder wenn sie Möbiusinvolutionen sind, von denen jede die Fixpunkte der andern vertauscht.[2])

---

[1]) C. Segre, Journ. f. Math. 100 p. 317—330.

[2]) Zwei solche Involutionen sind nach Nr. 36 harmonisch; ihre Fixpunkte liegen ebenfalls harmonisch.

Die Theorie der vertauschbaren KV ist damit vollständig erledigt.

33. Etwas umständlicher ist die Diskussion der Gleichung (2): wir begnügen uns das Resultat mitzuteilen. Damit die Relation

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{Q}^{-1} \tag{2}$$

stattfinde, ist notwendig und hinreichend, dass einer der folgenden Fälle realisirt sei:

1) $\mathfrak{Q}$ ist eine direkte KV, $\mathfrak{P}$ eine Möbiusinvolution, die die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ vertauscht.

2) $\mathfrak{Q}$ ist eine direkte elliptische KV, $\mathfrak{P}$ eine indirekte KV, die mit $\mathfrak{Q}$ die Fixpunkte gemein hat, z. B. eine Inversion, deren Direktrix die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ enthält.

3) $\mathfrak{Q}$ ist eine direkte hyperbolische KV, $\mathfrak{P}$ eine indirekte KV, die die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ zu Gegenpunkten hat, z. B. eine Inversion, die die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ vertauscht.

4) $\mathfrak{Q}$ ist eine indirekte KV mit reellen Fixpunkten $M_1\, M_2$, $\mathfrak{P}$ eine Möbiusinvolution, deren Fixpunkte harmonisch zu $M_1\, M_2$ auf dem einen oder andern Fixkreis von $\mathfrak{Q}$ liegen.

5) $\mathfrak{Q}$ ist eine indirekte KV mit reellen Fixpunkten $M_1\, M_2$, $\mathfrak{P}$ eine Inversion, die M_1 und M_2 vertauscht.

6) $\mathfrak{Q}$ ist eine indirekte KV mit reellen Gegenpunkten $M_1\, M_2$, $\mathfrak{P}$ eine Möbiusinvolution, deren Fixpunkte harmonisch zu $M_1\, M_2$ auf dem einteiligen Fixkreis von $\mathfrak{Q}$ liegen.

7) $\mathfrak{Q}$ ist eine indirekte KV mit reellen Gegenpunkten $M_1\, M_2$, $\mathfrak{P}$ eine Inversion an einem durch $M_1\, M_2$ gehenden einteiligen Kreise.

Der Fall, dass $\mathfrak{Q}$ eine Inversion oder Möbiusinvolution bedeutet, ist bei dieser Aufzählung nicht berücksichtigt, da unter dieser Annahme die Gleichung (2) mit (1) identisch wird.

34. Die vollständige Beantwortung der beiden in Nr. 27 aufgeworfenen Fragen ergibt sich aus den Nrn. 28—33 durch leichte Veränderung des Wortlauts: wir wollen in dieser Richtung nur noch folgende Thatsachen hervorheben, die sich übrigens leicht auch unmittelbar verificiren lassen: Bei einer

allgemeinen direkten KV bleiben überhaupt keine reellen oder complexen Kreise invariant, bei einer hyperbolischen bezw. elliptischen direkten KV $\mathfrak{P}$ nur diejenigen ∞^2 Kreise, die die Fixpunkte von $\mathfrak{P}$ zu Fix- bezw. Gegenpunkten haben, bei einer indirekten KV, die keine Inversion ist, nur deren reelle Fixkreise, endlich bei einer Inversion $\mathfrak{P}$ alle Kreise, deren Fixpunkte auf dem Kreise $\mathfrak{P}$, oder deren Gegenpunkte hinsichtlich $\mathfrak{P}$ invers liegen.

Durch die Entwickelungen dieses Paragraphen ist gleichzeitig die Aufgabe gelöst, alle Transformationen zu finden, die zwei äquivalente Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ ineinander überführen; ist nämlich $\mathfrak{Q}$ eine bestimmte KV, die dies leistet, so erhält man die allgemeinste in der Form $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ oder $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}'$, wo $\mathfrak{R}$ bezw. $\mathfrak{R}'$ die allgemeinste KV bedeutet, die $\mathfrak{P}$ bezw. $\mathfrak{P}'$ invariant lässt.

IV. Harmonische und associirte Kreisverwandtschaften; Büschel und Halbbüschel von Punktfeldern und complexen Kreisen.

35. In Nr. 26 nannten wir zwei gleichartige Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ harmonisch, wenn $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ und infolgedessen auch $\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{P}$ eine Möbiusinvolution ist. Sind $a\ b\ c\ d$ bezw. $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ die Coefficienten der zu $\mathfrak{P}$ bezw. $\mathfrak{Q}$ gehörigen linearen Transformationen der complexen Variabeln z, so lautet die Bedingung für die harmonische Lage

$$a\delta - b\gamma - c\beta + d\alpha = 0; \tag{1}$$

sie zerlegt sich in 2 reelle Gleichungen, es gibt also zu einer gegebenen KV ∞^4 mit ihr gleichartige harmonische Kreisverwandtschaften.

Ist dagegen $\mathfrak{P}$ eine direkte, $\mathfrak{Q}$ eine indirekte KV, so muss das Produkt $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ eine Inversion sein, wenn $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ harmonisch liegen sollen; die Bedingungen hiefür lauten:

$$\frac{-\bar{\delta}\bar{a}+\bar{\beta}\bar{c}}{\bar{\gamma}\bar{a}-\bar{\alpha}\bar{c}}+\frac{\gamma b-\alpha d}{\gamma a-\alpha c}=0;$$

$$\frac{\bar{\beta}\bar{d}-\bar{\delta}\bar{b}}{\bar{\gamma}\bar{a}-\bar{\alpha}\bar{c}}=\frac{\beta d-\delta b}{\gamma a-\alpha c},$$

was mit 3 reellen Gleichungen äquivalent ist; es gibt also zu einer gegebenen KV ∞^3 ungleichartige harmonische KV.

Da die Bedingung (1), auf 2 complexe Kreise angewandt, deren Orthogonalität ausspricht, so bezeichnen wir allgemein 2 harmonische KV als orthogonal und die Gesamtheit der ∞^4 zu einer KV harmonischen gleichartigen KV als ein Netz.

Sind die Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ harmonisch und bedeutet AA' ein Paar von $\mathfrak{P}$, während die Punkte BB' durch die Angabe

(2) $$A\{\mathfrak{Q}\}B', \quad B\{\mathfrak{Q}\}A'$$

bestimmt sind, so bilden auch B und B' ein Paar von $\mathfrak{P}$. Umgekehrt, sind die KV $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gleichartig und existiren in $\mathfrak{P}$ zwei verschiedene Paare AA', BB' derart, dass AB' und BA' Paare von $\mathfrak{Q}$ sind, so liegen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ harmonisch, da ja $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ die Punkte A, B vertauscht.

Bedeutet S_1 den ersten, S_2 den zweiten singulären Punkt einer singulären KV $\mathfrak{P}$, so ist $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{Q}$, wie man leicht erkennt, dann und nur dann harmonisch, wenn S_1, S_2 ein Paar entsprechender Punkte von $\mathfrak{Q}$ bedeuten.

36. Zwei Möbiusinvolutionen sind dann und nur dann harmonisch, wenn ihre Fixpunkte harmonisch liegen, zwei Inversionen, wenn die zugehörigen Kreise sich rechtwinklig schneiden; eine Möbiusinvolution und eine Inversion, wenn letztere die Fixpunkte der ersteren entweder vertauscht oder festlässt. In allen diesen Fällen sind die betreffenden KV natürlich auch vertauschbar, und jede ist durch die andere inversibel.

Soll die Möbiusinvolution $\mathfrak{J}$ zu der KV $\mathfrak{Q}$ harmonisch sein, so hat man:

$$\mathfrak{J}\mathfrak{Q}\mathfrak{J}=\mathfrak{Q}^{-1};$$

nach Nr. 33 folgt also: Eine Möbiusinvolution ist dann und nur dann zu einer direkten KV harmonisch, wenn sie deren Fixpunkte vertauscht; jede direkte KV kann also auf ∞^2 Arten als Produkt zweier Möbiusinvolutionen dargestellt werden.[1])

Jede indirekte KV bestimmt ∞^1 zu ihr harmonische Möbiusinvolutionen; sie wurden in Nr. 33 unter 4) und 6) angegeben.

Zu einer direkten hyperbolischen (bezw. elliptischen) KV mit den Fixpunkten (bezw. Gegenpunkten) $M_1 M_2$, die keine Involution ist, gibt es ∞^1 harmonische Inversionen, deren Kreise das Büschel mit den Grenzpunkten (bezw. Grundpunkten) $M_1 M_2$ bilden; zu einer Möbiusinvolution gibt es zwei Schaaren von ∞^1 harmonischen Inversionen.

Eine indirekte KV $\mathfrak{Q}$, die keine Inversion ist, besitzt ∞^1 zu ihr harmonische Inversionen, deren Kreise das zu den Fixkreisen von $\mathfrak{Q}$ orthogonale reelle Büschel bilden. Sind A, A' ein Paar von $\mathfrak{Q}$, $M_1 M_2$ die Fixpunkte, so liegt der Punkt B', in den A durch eine jener ∞^1 Inversionen übergeht, auf dem Kreis $M_1 M_2 A$, ebenso der Punkt B, in den A' durch dieselbe Inversion transformirt wird, auf dem Kreise $M_1 M_2 A'$; daraus folgt: Schneidet ein beliebiger durch AA' gelegter Kreis den Kreis $M_1 M_2 A$ in B', den Kreis $M_1 M_2 A'$ in B, so ist BB' ein neues Paar von $\mathfrak{Q}$. Hieraus ergibt sich eine einfache Construktion der Punkte, die einem gegebenen Punkte A in $\mathfrak{Q}$ vor- und rückwärts entsprechen, und zwar gilt das Vorige auch in dem Fall, dass die Punkte $M_1 M_2$ conjugirt imaginär, $\mathfrak{Q}$ also elliptisch ist.

37. Es möge hier auf diejenigen Kreisverwandtschaften, die zu ihrer inversen harmonisch sind, also eine Gleichung der Form $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{J}$ erfüllen, und allgemeiner auf die Lösung der Gleichung $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{R}$, wo $\mathfrak{R}$ eine beliebig gegebene (natürlich direkte) KV bedeutet, mit ein paar Worten eingegangen werden. Soll die KV $\mathfrak{Q}$ direkt sein, so hat sie mit $\mathfrak{R}$ die Fixpunkte gemein, und ihre Invariante hat einen der Werte

---

[1]) Vgl. Segre a. a. O.

$\pm\sqrt{\varkappa}$, wo $\varkappa$ diejenige von $\mathfrak{R}$ bedeutet; es gibt also 2 verschiedene KV, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$, der genannten Beschaffenheit, die vertauschbar und harmonisch sind, so zwar, dass $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}^{-1}$ mit der Fixpunktsinvolution von $\mathfrak{P}$ identisch ist. Soll insbesondere $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{J}$ sein, so haben $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ bezw. die Invarianten $e^{i\frac{\pi}{2}}$ und $e^{i\frac{3\pi}{2}}$, sind also elliptische Transformationen der Periode 4. Bedeutet andererseits $\mathfrak{Q}$ eine indirekte KV, so muss $\mathfrak{R}$ zweispiegelig sein. Ist $\mathfrak{R}$ zunächst hyperbolisch und seine (reelle) Invariante $\varkappa > 0$, so existirt eine Schaar von ∞^1 indirekten hyperbolischen KV obiger Eigenschaft; und zwar kann man für die Fixkreise von $\mathfrak{Q}$ zwei beliebige orthogonale Kreise des Bahnkreisbüschels von $\mathfrak{P}$ wählen, während die Invariante von $\mathfrak{Q}$ den Wert $|\sqrt{\varkappa}|$ besitzt. Ist zweitens $\mathfrak{R}$ elliptisch, so gibt es stets zwei verschiedene Schaaren von je ∞^1 elliptischen indirekten KV, die die Gleichung $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{R}$ erfüllen, und zwar kann der einteilige Fixkreis von $\mathfrak{Q}$ innerhalb des Bahnkreisbüschels von $\mathfrak{R}$ beliebig gewählt werden, während die Invariante von $\mathfrak{Q}$ den Wert $\pm e^{\frac{i\lambda}{2}}$ hat, wo $e^{i\lambda}$ diejenige von $\mathfrak{R}$ bedeutet, und zwar ist jede KV der ersten Schaar zu jeder der zweiten harmonisch. Insbesondere gibt es also auch 2 verschiedene Schaaren von Lösungen der Gleichung $\mathfrak{Q}^2 = \mathfrak{J}$.

38. Nach Nr. 35 haben alle Kreisverwandtschaften, die dem durch $\mathfrak{Q}$ bestimmten Netze angehören und ein gegebenes Paar AA' enthalten, auch das Paar BB' gemein, das durch die Formeln (2) definirt wird. Die Punkttransformation, welche jeden complexen Punkt $[AA']$ in $[BB']$ verwandelt, ist natürlich involutorisch und lässt alle Paare von $\mathfrak{Q}$ in Ruhe; für den Fall, dass $\mathfrak{Q}$ eine indirekte KV $\mathfrak{Q}$ bedeutet, ist sie mit der Inversion an dem Kreise $\mathfrak{Q}$ identisch. Wenn nun $\mathfrak{Q}$ eine direkte KV vorstellt, wollen wir jenen Uebergang als die „Spiegelung (oder Inversion) an dem Punktfeld $\mathfrak{Q}$" bezeichnen.

Bedeuten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zwei indirekte reelle KV und stehen die reellen Punkte $AA'BB'$ in der Beziehung

$$A\,\{\mathfrak{Q}\}\,B,\quad A'\,\{\mathfrak{P}\}\,B',$$

so nennen wir den Uebergang von dem Punkte $[AA']$ zu $[BB']$ eine „uneigentliche direkte KV“; sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zwei direkte reelle KV, und hat man

$$A\{\mathfrak{Q}\}B', \quad A'\{\mathfrak{P}\}B,$$

so heisst die Transformation, vermöge deren der Punkt $[AA']$ in $[BB']$ übergeht, eine „uneigentliche indirekte KV“; ersetzt man $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{Q}^{-1}$, so erhält man als Spezialfall die Spiegelung an dem Punktfeld $\mathfrak{Q}$. Die Spiegelung an dem reellen Punktfeld ist also nichts anderes als der Uebergang von einem complexen Punkt zu seinem conjugirt imaginären.

Eine uneigentliche direkte (bezw. indirekte) KV entsteht demnach, wenn man jedes der beiden Büschel von Minimalgeraden conjugirt-projektiv auf sich (bezw. auf das andere) bezieht und dem complexen Schnittpunkt zweier Minimalgeraden den Schnittpunkt der bezw. entsprechenden Minimalgeraden zuweist.

39. Sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ zwei gleichartige reelle KV, also beide direkt oder beide indirekt, ferner AA', BB' ihre gemeinsamen Paare, so bezeichnen wir den Inbegriff der ∞^2 Kreisverwandtschaften, die mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gleichartig sind und die Paare AA', BB' gemein haben, als das „Büschel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$“ und zwar als ein „Feldbüschel“ oder „Kreisbüschel“, je nachdem $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ direkt oder indirekt sind. Der Definition des Büschels können statt $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ irgend zwei verschiedene Verwandtschaften des Büschels zu Grunde gelegt werden. Die Punkte $[AA']$, $[BB']$ heissen die Grundpunkte, ferner $[AB']$ und $[BA']$ die Grenzpunkte des Büschels. Das letztere enthält nur zwei singuläre KV; ihre singulären Punkte sind A, B' bezw. B, A'.

Ein reelles Büschel, das also zu jeder KV gleichzeitig die inverse enthält, entsteht, wenn entweder A mit A' und B mit B' identisch, d. h. die Grundpunkte reell, oder wenn A mit B' und B mit A' identisch, also die Grenzpunkte reell werden. Ein reelles Feldbüschel insbesondere besteht entweder aus ∞^2 direkten KV mit gemeinsamen Fixpunkten, oder aus ∞^2 Involutionen, die ein gemeinsames Paar enthalten.

Ist A mit B, A' mit B' identisch, so erhält man ein „Berührungsbüschel“, bestehend aus ∞^2 Kreisverwandtschaften, die sich im Punkte $[AA']$ berühren.

Von zwei harmonischen Punktfeldern geht nach Nr. 38 jedes durch Spiegelung an dem andern in sich über, und analoges gilt auch für harmonische Kreise. Ist also die KV $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gleichartig und harmonisch, so sind die Punkte $[AA']$ und $[BB']$ hinsichtlich $\mathfrak{P}'$ invers, $\mathfrak{P}'$ enthält also die Paare AB', BA'; und umgekehrt. Es gibt demnach ∞^2 Kreisverwandtschaften, die zu allen KV des Büschels $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ harmonisch liegen; sie bilden das zu letzterem „adjungirte Büschel“, das $[AB']$ und $[BA']$ zu Grundpunkten, $[AA']$ und $[BB']$ zu Grenzpunkten hat. Das adjungirte Büschel eines Berührungsbüschels ist wieder ein solches und hat denselben doppelt zählenden Grundpunkt.

40. Um diejenige KV $\mathfrak{P}'$ des zu $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ adjungirten Büschels zu finden, die ein gegebenes Paar C, C' enthält, invertire man den Punkt $[CC']$ an $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, wodurch die Punkte $[DD']$ und $[EE']$ erhalten werden; dann sind CC', DD', EE' 3 Paare von $\mathfrak{P}'$. Ist CC' ein Paar von $\mathfrak{P}$, so invertire man den Punkt $[CC']$ an $\mathfrak{Q}$, wodurch $[EE']$, und den letzteren Punkt an $\mathfrak{P}$, wodurch $[FF']$ entstehe; dann sind CC', EE', FF' 3 Paare von $\mathfrak{P}'$. Diese Construktion versagt dann und nur dann, wenn $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{Q}$ harmonisch liegt, weil dann auch das Paar EE' in $\mathfrak{P}$ enthalten, also mit FF' identisch ist, und es bietet sich dann die weiter unten zu erledigende Aufgabe, eine zu $\mathfrak{P}$ harmonische gleichartige KV zu bestimmen, die 2 gegebene Paare von $\mathfrak{P}$ enthält. Ist endlich CC' eines der gemeinsamen Paare von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, etwa mit AA' identisch, so muss $\mathfrak{P}'$ die singuläre KV sein, deren singuläres Paar A und A' sind; diese KV sowie diejenige, die B, B' zu singulären Punkten hat, sind in der That die einzigen singulären KV des zu $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ adjungirten Büschels.

Die Construktion derjenigen KV, die einem gegebenen Büschel angehört und ein gegebenes Paar enthält, lässt sich

auf die vorige zurückführen, indem man zunächst zwei beliebige KV des adjungirten Büschels bestimmt.

Die Aufgabe, eine mit $\mathfrak{Q}$ gleichartige und harmonische KV $\mathfrak{P}'$ zu bestimmen, die zwei gegebene Paare CC', DD' enthält, erledigt sich dadurch, dass man durch Inversionen an $\mathfrak{Q}$ aus den gegebenen Paaren neue ableitet; diese Construktion versagt nur dann, wenn jene Paare beide auch in $\mathfrak{Q}$ enthalten sind. In diesem Falle ermittle man zunächst zwei beliebige KV, die mit $\mathfrak{Q}$ gleichartig und harmonisch sind, sowie das Paar CC' enthalten; sie gehören zu einem Berührungsbüschel mit dem Grundpunkt $[CC']$. Ferner bestimme man zwei beliebige KV $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$ des dazu adjungirten Berührungsbüschels, sowie diejenige KV $\mathfrak{P}'$, die das Paar DD' enthält und zu $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ harmonisch ist. Diese letztere Construktion ist nunmehr stets ausführbar, da sich $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ so wählen lassen, dass keine derselben das Paar DD' enthält.

Um schliesslich diejenige Kreisverwandtschaft $\mathfrak{P}'$ zu bestimmen, die zu drei gegebenen KV: $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ harmonisch ist, verstehe man unter CC' ein beliebiges Paar von $\mathfrak{R}$, ermittele nach dem Obigen die Kreisverwandtschaft $\mathfrak{S}$ des Büschels $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$, die das Paar CC' enthält, und suche das zweite gemeinsame Paar DD' von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$. Dann sind die Punkte $[CC']$ und $[DD']$ hinsichtlich $\mathfrak{P}'$ invers, d. h. CD' und DC' sind Paare von $\mathfrak{P}'$, und man findet auf diesem Wege beliebig viele Paare der gesuchten KV.

Wir bemerken noch, dass alle in dieser Nr. behandelten Aufgaben lediglich lineare Constructionen erfordern.

41. Es sei ein Büschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ gegeben; bedeutet $\mathfrak{P}$ eine beliebige KV desselben, so kann die allgemeinste KV des Büschels in jeder der beiden Formen

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}\mathfrak{P}; \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{P}\mathfrak{R}' \tag{3}$$

geschrieben werden, worin $\mathfrak{R}$ (bezw. $\mathfrak{R}'$) das reelle Büschel der ∞^2 direkten KV mit den Fixpunkten AB (bezw. $A'B'$) durchläuft; die allgemeinste Transformation $\mathfrak{Q}'$ des adjungirten Büschels kann dann auf folgende beide Arten dargestellt werden:

(4) $$\mathfrak{Q}' = \mathfrak{J}\mathfrak{P}; \quad \mathfrak{Q}' = \mathfrak{P}\mathfrak{J}';$$

dabei durchläuft $\mathfrak{J}$ alle Möbiusinvolutionen, die das Paar AB enthalten, d. h. zur Fixpunktsinvolution von $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1}$ harmonisch sind, ebenso $\mathfrak{J}'$ alle Möbiusinvolutionen, die das Paar $A'B'$ enthalten. Nach (3) haben alle Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}$ des Büschels $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ die Eigenschaft, jede KV des reellen Feldbüschels $\mathfrak{R}$ in eine KV des Büschels $\mathfrak{R}'$ zu transformiren, welch letztere immer dieselbe ist, wie auch $\mathfrak{P}$ innerhalb des Büschels $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ gewählt sein mag. Insbesondere wird die Involution $\mathfrak{J}$ mit den Fixpunkten AB in $\mathfrak{J}'$ verwandelt;[1]) diese Wirkung haben aber auch alle KV des adjungirten Büschels. Umgekehrt gibt es stets zwei adjungirte Feldbüschel und zwei adjungirte Kreisbüschel derart, dass alle ihnen angehörenden KV zwei vorgegebene Möbiusinvolutionen ineinander überführen.

Die Entwickelungen dieser Nr. gelten in leicht ersichtlicher Weise auch, wenn A mit B, A' mit B' identisch ist, d. h. wenn es sich um ein Berührungsbüschel handelt.

42. Bedeutet $\mathfrak{P}$ eine direkte KV mit den Fixpunkten $M_1 M_2$, die in dem Feldbüschel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ mit den Grundpunkten $[AA']$. $[BB']$ enthalten ist, so entsprechen sich M_1 und M_2 vermöge der im adjungirten Büschel vorkommenden Involution $\mathfrak{j}$, die durch die Paare AB', BA' definirt ist; umgekehrt, bilden $M_1 M_2$ ein Paar von $\mathfrak{j}$, so gibt es in dem Feldbüschel $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ stets eine und nur eine direkte KV mit den Fixpunkten $M_1 M_2$.

Der erste Teil dieser Behauptung folgt daraus, dass $\mathfrak{j}$ zu $\mathfrak{P}$ harmonisch ist, also die Fixpunkte von $\mathfrak{P}$ vertauscht, der zweite aus der Beziehung

$$M_1 M_2 A A' \{\mathfrak{j}\} \; M_2 M_1 B' B,$$

[1]) Nur wenn $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ harmonisch sind, gibt es mehr als ein Paar $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$, so dass gleichzeitig $\mathfrak{P}\mathfrak{J}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{J}' = \mathfrak{Q}\mathfrak{J}\mathfrak{Q}^{-1}$, und zwar bedeutet hier $\mathfrak{J}$ eine zu $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1}$, $\mathfrak{J}'$ eine zu $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{Q}$ harmonische Involution; für den Inhalt dieser Nr. vgl. übrigens C. Segre a. a. O.

welche lehrt, dass das Doppelverhältnis $(M_1 M_2 A A')$ gleich $(M_1 M_2 B B')$ ist. Natürlich sind ebenso die Fixpunktepaare der KV des adjungirten Feldbüschels mit den Paaren derjenigen Involution i identisch, die A mit A' und B mit B' vertauscht.

In einem Feldbüschel gibt es nach dem Gesagten nur zwei parabolische Verwandtschaften; ihre doppelt zählenden Fixpunkte coincidiren bezw. mit den beiden Fixpunkten von j.

Für den Fall eines reellen Büschels und eines Berührungsbüschels wird die obige Schlussweise natürlich hinfällig; doch bedarf nur der zweite dieser Fälle einer nähern Erläuterung. Es handelt sich hier darum, die in den beiden adjungirten Büscheln enthaltenen Möbiusinvolutionen i, j zu construiren. Sei also ein Berührungsbüschel gegeben durch den doppelt zählenden Grundpunkt $[A A']$ und eine direkte KV $\mathfrak{P}$, die das Paar $A A'$ und die Fixpunkte $M_1 M_2$ besitzt. Da j zu $\mathfrak{P}$ harmonisch ist und gleichfalls das Paar $A A'$ enthält, so liegen die Fixpunkte $C C'$ von j zu $M_1 M_2$ und zu $A A'$ gleichzeitig harmonisch, sind also eindeutig festgelegt. Die Involution i ist dann dadurch definirt, dass ihre Fixpunkte zu $A A'$ und zu $C C'$ harmonisch sind. Ist das Berührungsbüschel reell, also A mit A' identisch, so coincidiren i und j in die singuläre Involution mit dem singulären Punkt A, d. h. jeder beliebige Punkt der Ebene bildet mit A zusammen das Fixpunktepaar je einer KV der beiden adjungirten Büschel.

43. Wir wollen jetzt die zweispiegeligen Verwandtschaften bestimmen, die in einem Feldbüschel mit den Grundpunkten $[A A']$, $[B B']$ enthalten sind. Die beiden Fixpunkte P, P' einer dem Büschel angehörigen hyperbolischen KV liegen sowohl mit $A A'$ als mit $B B'$ cyclisch. Bezeichnet man also mit t die involutorische Transformation, die jedem Punkte P' den zweiten Schnittpunkt der Kreise $P' A A'$ und $P' B B'$ zuweist, so folgt: Es gibt in dem vorgelegten Feldbüschel ∞^1 hyperbolische Transformationen; ihre Fixpunktepaare sind identisch mit den gemeinsamen Paaren der Transformation t und der Möbiusinvolution j, d. h. also mit denjenigen Punktepaaren

von j, die mit AA' (und infolgedessen auch mit BB') cyclisch liegen.

Um den geometrischen Ort dieser ∞^1 Paare zu finden, verlege man durch eine Inversion den einen Fixpunkt von j in's Unendliche: dann ist A zu B', A' zu B symmetrisch hinsichtlich des andern Fixpunkts 0, den wir als Anfangspunkt eines cartesischen Coordinatensystems x, y wählen. Die Gleichung des Kreisbüschels mit den Grundpunkten AA' habe die Form:

$$(5) \quad (1+\lambda)(x^2+y^2)+\pi+\lambda\pi'-2(\alpha+\lambda\alpha')x-2(\beta+\lambda\beta')y=0,$$

worin λ den Parameter bedeutet: das ihm vermöge j entsprechende Büschel wird erhalten, indem man x durch $-x$, y durch $-y$ ersetzt, und aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Elimination von λ die Curve:

$$(6) \quad 0=(x^2+y^2+\pi)(\alpha'x+\beta'y)-(x^2+y^2+\pi')(\alpha x+\beta y),$$

also eine circulare Curve 3.O. Soll diese zerfallen, so muss sich, da sie hinsichtlich 0 symmetrisch ist, eine durch 0 gehende Gerade $y=\varrho x$ von ihr ablösen. Substituiren wir diesen Wert für y in (6) und setzen das Resultat identisch null, so zeigt sich, dass unsere C_3 dann und nur dann zerfällt, wenn die Punkte $AA'BB'$ entweder auf einem Kreise K mit dem Centrum 0 oder auf einer durch 0 gehenden Geraden g liegen. Im ersten Fall zerfällt die C_3 in den Kreis K und die gemeinsame Mittelsenkrechte der Strecken AB, $A'B'$; im zweiten artet die C_3 aus in die Gerade g und den Kreis mit dem Centrum 0, der A von B und A' von B' harmonisch trennt. Daraus folgt:

Die Fixpunktepaare der hyperbolischen Transformationen, die einem Feldbüschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ angehören, erfüllen eine bicirculare C_4 (eventuell eine circulare C_3); dann und nur dann, wenn die Punkte $AA'BB'$ auf einem Kreise K liegen, zerfällt diese Curve, und zwar in den Kreis K und den dazu orthogonalen Kreis, der A von B und A' von B' harmonisch trennt.

44. Die Fixpunkte PP' einer elliptischen Transformation, die dem Feldbüschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ an-

gehört, liegen zu AA' und zu BB' orthocyclisch. Nennt man also $\mathfrak{t}'$ die involutorische Transformation, die jedem Punkte P' den zweiten Schnittpunkt der durch P' gehenden Kreise zuweist, die A von A' bezw. B von B' harmonisch trennen, so sind die Fixpunktepaare der ∞^1 dem Büschel angehörenden elliptischen Transformationen identisch mit den gemeinsamen Paaren der beiden Verwandtschaften $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{t}'$. Verlegt man den einen Fixpunkt von $\mathfrak{j}$ ins Unendliche und wählt den Coordinatenanfang wie in der vorigen Nr., versteht man ferner unter α, β bezw. α', β' die Coordinaten von A bezw. A', und unter π, π' die Grössen $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha'^2 + \beta'^2$, so liefert die Gleichung (5) das reelle Kreisbüschel mit den Grenzpunkten AA', also Gleichung (6) den gesuchten Ort, der von den Schnittpunkten entsprechender Kreise des Büschels (5) und des zu ihm hinsichtlich 0 symmetrischen Büschels erfüllt wird. **Wie oben schliesst man jetzt:**

Die Fixpunktepaare des ∞^1 elliptischen KV, die in einem Feldbüschel mit den Grundpunkten $[AA']$ und $[BB']$ vorkommen, erfüllen eine bicirculare C_4 (eventuell eine circulare C_3): dann und nur dann, wenn die Punkte $AA'BB'$ auf einem Kreise K liegen, zerfällt diese C_4 und zwar in den reellen Kreis K', der A von B' und B von A' harmonisch trennt, sowie in den dazu orthogonalen reellen Kreis K'', hinsichtlich dessen A und A', sowie B und B' inverse Punkte sind; von diesen Kreisen ist natürlich mindestens e i n e r einteilig.

45. Sind P, Q die Fixpunkte einer i n d i r e k t e n hyperbolischen KV des complexen Kreisbüschels mit den Grundpunkten $[AA'], [BB']$, so gilt nach Nr. 18 die Beziehung:

$$P\{\mathfrak{j}\mathfrak{t}'\}Q,$$

d. h. Q entsteht aus P, indem man zunächst P vermöge $\mathfrak{j}$ in P', sodann diesen letzteren Punkt mittels $\mathfrak{t}'$ in Q überführt. Offenbar ist $\mathfrak{t}'$ dann und nur dann, wenn die Punkte $AA'BB'$ auf einem Kreise K liegen, eine Kreisverwandtschaft, nämlich die Inversion an K, und es ist dann das Produkt $\mathfrak{j}\mathfrak{t}'$ gleich der Inversion j, die A mit B' und B mit A' vertauscht;

andernfalls stellt dies Produkt eine höhere birationale und augenscheinlich involutorische Transformation dar.

Die Fixpunktepaare der indirekten hyperbolischen KV des Kreisbüschels mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ sind nach Nr. 18 identisch mit den Gegenpunktepaaren der indirekten elliptischen Transformationen des adjungirten Büschels. Bedeutet also wiederum i die Involution, die A mit A' und B mit B' vertauscht, ferner t'' diejenige involutorische Verwandtschaft, die jedem Punkt P' den zweiten Schnittpunkt der durch ihn gehenden Kreise zuweist, die A von B' bezw. B von A' harmonisch trennen, so sind irgend zwei Punkte P, P', die in der Beziehung

$$P\{\mathrm{i}\,t''\}P'$$

stehen, Gegenpunkte einer indirekten elliptischen KV, die dem Büschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ angehört, und umgekehrt.

In jedem von zwei adjungirten Kreisbüscheln sind ∞^1 parabolische indirekte KV enthalten; der Ort der Fixpunkte der letzteren ist für beide Büschel die in Nr. 44 genannte Curve C_4. Bei cyclischer Lage der Punkte $AA'BB'$ zerfällt diese Curve in die oben definirten reellen Kreise K', K''; doch ist für das Büschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ nur der Kreis K'', sofern er einteilig ist, Fixpunktsort der in dem Büschel enthaltenen parabolischen Substitutionen, während K' den Fixkreis der dem Büschel angehörigen Inversion darstellt; für das adjungirte Büschel vertauschen die Kreise K', K'' ihre Rollen. Die Transformationen t', t'' werden nunmehr identisch mit der Inversion an dem Kreise K; also ist j t' die Inversion an K', und i t'' die Inversion an K''.

In den drei letzten Nummern wurde vorausgesetzt, dass die vier Punkte $AA'BB'$ sämtlich voneinander verschieden sind. Die Fälle, in denen zwei oder mehrere dieser Punkte coincidiren, geben zu trivialen Ausartungen der in Nr. 43—45 besprochenen Punktörter Anlass, mit Ausnahme des Falles, dass ein Berührungsbüschel vorliegt; wir gedenken die Theorie

dieser speciellen Büschel an anderer Stelle ausführlich zu behandeln.

46. Soll zu zwei gleichartigen KV: $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ eine mit beiden ungleichartige und harmonisch liegende Kreisverwandtschaft $\mathfrak{Q}$ existiren, soll man also haben:

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1} = J, \quad \mathfrak{P}'\mathfrak{Q}^{-1} = J',$$

worin J, J' Inversionen bedeuten, so folgt

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1} = J'J, \tag{7}$$

d. h. das Produkt $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1}$ ist ebenso wie $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P}'$ eine zweispiegelige Verwandtschaft. Da ferner in der Gleichung (7) die Transformation J innerhalb des reellen Kreisbüschels (J, J') beliebig gewählt werden kann, worauf J' eindeutig bestimmt ist, so folgt aus der Zweispiegeligkeit von $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1}$ auch umgekehrt die Existenz einfach unendlich vieler zu $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ harmonischer, mit ihnen ungleichartiger Kreisverwandtschaften:

$$\mathfrak{Q} = J\mathfrak{P} = J'\mathfrak{P}'. \tag{8}$$

47. Wir wollen zwei gleichartige Kreisverwandtschaften $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$, für die das Produkt $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1}$ zweispiegelig ist, als „associirt“, ferner die ∞^1 Transformationen $\mathfrak{Q}$ als „das zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ harmonische „Halbbüschel“ bezeichnen. Irgend zwei Transformationen $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}'$ des letzteren sind natürlich ihrerseits associirt, und die mit ihnen ungleichartigen, harmonisch liegenden KV bilden ein Halbbüschel, dem $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ angehören. Diese beiden Halbbüschel kann man als harmonisch bezeichnen, insofern jede Transformation $\mathfrak{R}$ des einen zu jeder Transformation $\mathfrak{S}$ des andern harmonisch ist. In der That, es sei $\mathfrak{Q}_1$ durch die Beziehungen

$$\mathfrak{Q}_1 = J_1\mathfrak{P} = J_1'\mathfrak{P}' \tag{9}$$

definirt, wo J_1, J_1' Inversionen des reellen Kreisbüschels (J, J') sind. Ferner bedeute $\mathfrak{R}$ eine mit $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_1$ ungleichartige und harmonisch liegende KV, so dass also

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{R}^{-1} = i, \quad \mathfrak{Q}_1\mathfrak{R}^{-1} = i', \tag{10}$$

endlich $\mathfrak{S}$ eine Transformation des Halbbüschels $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}_1)$, die also Beziehungen der Form

$$(11) \qquad \mathfrak{P}\,\mathfrak{S}^{-1} = i_1; \quad \mathfrak{P}'\,\mathfrak{S}^{-1} = i_1'$$

genügt, so folgt aus (8)—(10) zunächst

$$(12) \qquad \mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q}_1^{-1} = i\,i' = J J_1; \quad \mathfrak{P}'\,\mathfrak{P}^{-1} = i_1'\,i_1 = J J',$$

so dass die Inversionen $J, J', J_1, i, i', i_1, i_1'$ alle demselben reellen Kreisbüschel angehören. Ferner hat man aus (10) und (11)

$$\mathfrak{R} = i\,\mathfrak{Q}; \quad \mathfrak{S}^{-1} = \mathfrak{P}^{-1}\,i_1;$$
$$\mathfrak{R}\,\mathfrak{S}^{-1} = i\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{P}^{-1}\,i_1 = i\,J\,i_1;$$

da aber das Produkt dreier Inversionen desselben Büschels wieder eine Inversion liefert, so ist unsere Behauptung erwiesen.

48. Die harmonische Lage zweier gleichartiger KV ist ein Specialfall der Associirtheit. Ist $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{P}'$ harmonisch, so kann in der Gleichung (7) die Inversion J zwei verschiedenen adjungirten Kreisbüscheln entnommen werden, und es existiren demnach zwei verschiedene zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ harmonische Halbbüschel, und $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ gehören ihrerseits zwei verschiedenen Halbbüscheln gleichzeitig an. Zwei associirte nicht harmonische Verwandtschaften $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ sind dagegen stets in einem und nur einem Halbbüschel enthalten, und zwar hat die allgemeinste Transformation desselben die Form $\mathfrak{R}\,\mathfrak{P}$, wo $\mathfrak{R}$ alle ∞^1 zweispiegeligen KV derjenigen eingliedrigen Gruppe durchläuft, der auch die Verwandtschaft $\mathfrak{P}'\,\mathfrak{P}^{-1}$ angehört. Eine solche eingliedrige Gruppe, sowie das reelle Büschel von Inversionen, die zu den ∞^1 Niveaukreisen jener Gruppe gehören, liefern sonach den einfachsten Typus harmonischer Halbbüschel.

Multiplicirt man alle Transformationen eines Halbbüschels vorn oder hinten mit ein und derselben Kreisverwandtschaft, so entsteht wieder ein Halbbüschel.

49. Jedes Halbbüschel ist in einem ganz bestimmten Büschel enthalten. Umgekehrt, jede Transformation des Büschels

$(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$ mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$ gehört zwei und nur zwei Halbbüscheln β, β' an, die ganz innerhalb des gegebenen Büschels liegen; sie sind beide durch die Gleichung $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}\mathfrak{P}$ gegeben, wo $\mathfrak{R}$ das einemal alle ∞^1 elliptischen, das andremal die hyperbolischen zweispiegeligen Verwandtschaften mit den Fixpunkten A, B durchläuft. Bedeutet $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}')$ ein Feldbüschel, so ist das zu β harmonische Halbbüschel indirekter Kreisverwandtschaften in dem Kreisbüschel mit den Grundpunkten $[AA']$, $[BB']$, das zu β' harmonische Halbbüschel in dem Kreisbüschel mit den Grundpunkten $[AB']$, $[BA']$ enthalten. Die Berührungsbüschel nehmen auch hier eine Ausnahmestellung ein.

50. Ist eine Kreisverwandtschaft $\mathfrak{P}'$ zu einer mit ihr gleichartigen KV $\mathfrak{P}$ und einer ungleichartigen KV $\mathfrak{Q}$ harmonisch, d. h. bestehen die Beziehungen:

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{J};\ \ \mathfrak{P}'\mathfrak{Q}^{-1} = J;\ \ \mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{P}' = J',$$

worin $\mathfrak{J}$ eine Möbiusinvolution, J und J' Inversionen bedeuten, so ist $\mathfrak{J}$ wegen

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{P}'\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{P}J'\mathfrak{P}^{-1} = J''$$

eine zu der indirekten Kreisverwandtschaft $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ harmonische Möbiusinvolution, und umgekehrt. Wir nehmen zunächst an, dass diese indirekte KV keine Inversion, d. h. dass $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nicht harmonisch seien. Je nachdem nun $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ zwei einteilige Fixkreise oder nur einen besitzt, gibt es nach Nr. 33 zwei Schaaren von je ∞^1 Möbiusinvolutionen der verlangten Art oder nur eine, und jede solche Schaar stellt ein Halbbüschel dar. Nach dem Schlusssatz der Nr. 48 folgt jetzt: Die Kreisverwandtschaften, die zu zwei ungleichartigen nicht harmonischen KV $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gleichzeitig orthogonal sind, bilden vier bezw. zwei Halbbüschel, je nachdem das Produkt $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ dem hyperbolischen oder elliptischen Typus angehört; zwei dieser Halbbüschel (bezw. eines) sind mit $\mathfrak{P}$, zwei (bezw. eines) mit $\mathfrak{Q}$ gleichartig.

Ist $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{Q}$ harmonisch, also $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^{-1}$ eine Inversion, so kann man für $\mathfrak{J}$ eine beliebige der ∞^2 Involutionen wählen, deren Fixpunkte durch jene Inversion vertauscht werden, oder auch, falls die Direktrix K der letzteren einteilig ist, eine der ∞^2 Involutionen, deren Fixpunkte auf K liegen, und es treten in dem vorigen Satze an Stelle der Halbbüschel Systeme von je ∞^2 Kreisverwandtschaften, die zweckmässig als „Halbnetze" bezeichnet werden.

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und
Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 16. November 1901.

Der Präsident der Akademie, Herr K. A. v. Zittel, eröffnete die Festsitzung mit folgender Ansprache:

Wenn die Königl. bayer. Akademie der Wissenschaften alljährlich im November zu Ehren ihres Protektors, des regierenden Fürsten von Bayern, eine Festsitzung abhält, so erfüllt sie damit eine Pflicht der Dankbarkeit, denn der Huld und der Unterstützung ihrer erlauchten Protektoren verdankt sie nicht nur ihre Existenz, sondern auch ihre ganze Entwicklung und ihre heutige Prosperität. Mit Begeisterung hat darum auch die Akademie im verflossenen Frühling das 80 jährige Geburtsfest unseres gütigen und geliebten Landesherrn, des Prinz-Regenten Luitpold von Bayern mit gefeiert und auch heute gedenken wir dankerfüllt der vielfachen Kundgebungen von Wohlwollen, deren sich die Akademie der Wissenschaften unter seiner Regierung zu erfreuen hatte.

Einen neuen Beweis seines Interesses für wissenschaftliche Forschungen hat unser hoher Protektor dadurch geliefert, dass er unserem Mitglied Professor Furtwängler Geldmittel zu archäologischen Ausgrabungen in Aegina zur Verfügung stellte.

Die Vervollständigung der herrlichen Giebelgruppe in der hiesigen Glyptothek durch neue Untersuchungen auf der Insel Aegina war schon ein Lieblingswunsch König Ludwig I., der leider zu Lebzeiten des grossen Kunstmäcens nicht mehr zur Ausführung kommen sollte. Der Entschluss Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten, die Ausgrabungen aufzunehmen, wurde darum von Kunstfreunden und Archäologen dankbarst begrüsst. Der Erfolg der von Professor Furtwängler geleiteten, im Frühling ds. Js. begonnenen und in den letzten Wochen zu Ende geführten Arbeiten hat die anfänglich gehegten Erwartungen weit übertroffen. Eine überraschend grosse Menge von Skulpturen, welche einst das Heiligthum in Aegina schmückten, wurden gefunden. Es kamen insbesondere acht Köpfe und zahlreiche Glieder von Marmorfiguren zu Tage. Ferner wurde die Geschichte der heiligen Stätte in unerwarteter Weise aufgeklärt. Es ergab sich, dass der jetzt noch in Ruinen stehende Tempel mit der ihn umgebenden Terrasse, dem neu entdeckten Altar und dem zur Terrasse heraufführenden Propylon eine Neuanlage ist, die der Zeit der Perserkriege entstammt und sich auf den Resten älterer, ja zum Teil sehr alter Bauten erhebt. Es zeigte sich, dass der Kultus an dieser Stelle ununterbrochen bis in die sogenannte mykenische Epoche zurückreicht. Durch architektonische Schönheit hervorragend sind die Bruchstücke eines alten Tempels des sechsten Jahrhunderts. Zahlreich, mannichfaltig und bedeutend waren kleinere Kunstgegenstände aus den früheren Jahrhunderten des Heiligthums. Vor Allem wichtig war aber, dass es auch gelang die bisher unbekannte Gottheit festzustellen, welcher das Heiligthum gehörte. Es war weder Zeus noch Athene, an die früher fälschlich gedacht worden war, sondern Aphaia, eine mit kretischer Kultur zusammenhängende, der griechischen Frühzeit angehörige und nur in Aegina bekannte Göttin. Dies Resultat ist religionsgeschichtlich von grosser Bedeutung. Endlich wurden in näherer und fernerer Umgebung des Tempels eine Reihe von Bauten freigelegt, die alle der besten klassischen Epoche angehören.

Zu den statutenmässigen Obliegenheiten der Akademie gehört die Begutachtung von wissenschaftlichen Unternehmungen, die im allgemeinen Interesse des Staates durchgeführt werden sollen. In dieser Hinsicht bot sich im vergangenen Jahre eine Aufgabe von ungewöhnlicher Bedeutung. Schon zu wiederholten Malen wurde die Eröffnung der im Speyerer Dome befindlichen und im Jahre 1689 teilweise durch die Franzosen durchwühlten Kaisergräber angeregt, scheiterte aber stets an der Ungunst der Verhältnisse. Durch Herrn Gymnasialprofessor Dr. Praun erhielt die Frage wieder einen neuen Anstoss. Nachdem die kirchliche Oberbehörde ihre Zustimmung zu einer Wiedereröffnung der Grabstätten unserer hervorragendsten Kaiser des Mittelalters erklärt hatte, forderte die kgl. Staatsregierung die Akademie zu einem Gutachten über die wissenschaftliche Bedeutung dieser Untersuchungen auf. Im Einvernehmen mit der historischen Commission erklärte die Akademie, dass es sich bei der Eröffnung der Kaisergräber im Dom zu Speyer nicht nur um eine hochbedeutsame wichtige Frage, sondern auch um eine Pflicht deutschnationaler Pietät handle.

Nach allerhöchster Genehmigung wurde eine Commission mit der Durchführung der Eröffnung der Grabstätten im Speyerer Dom betraut und die Ausgrabungsarbeiten auch ohne Störung zwischen dem 16. August und 3. September vorigen Jahres durchgeführt. Von der Akademie beteiligten sich die Herren Grauert und Ranke, vom Generalkonservatorium der wissenschaftlichen Sammlungen des Staates Herr Dr. Birkner, Assistent der prähistorischen Sammlung, an dieser Arbeit.

Wie aus Zeitungsnachrichten und einer in den Sitzungsberichten der Akademie erschienenen Abhandlung des Herrn Herrn Kollegen Grauert bekannt ist, ergaben die Ausgrabungen nicht nur Aufschlüsse über die Anlage, Erhaltung und teilweise Zerstörung der Kaisergräber, sondern auch wichtige Anhaltspunkte über die Persönlichkeit der einzelnen Kaiser, Könige und Kaiserinnen, sowie über die Gewänder und Kultur der damaligen Zeit. Die irdischen Ueberreste von vier Kaisern

und zwei Kaiserinnen aus dem Geschlecht der Salier, ferner von Philipp von Schwaben, Rudolf von Habsburg, Albrecht von Oesterreich, Adolf von Nassau, von Beatrix der Gemahlin Friedrich Barbarossa's und ihrer Tochter, der kleinen Prinzessin Agnes konnten festgestellt werden. Nur vier dieser Gräber sind von den Franzosen geöffnet und teilweise zerstört worden, die übrigen wurden seit der ersten Bestattung unberührt gefunden.

Durch eine sorgfältige anthropologische Untersuchung gelang es, die menschlichen Skeletteile zu sichten und das Zusammengehörige wieder zu vereinigen, so dass jetzt die Leichenreste der Kaiser Konrad II., Heinrich III. und Heinrich IV., sowie der Kaiserinnen Bertha und Gisela in den Original-Steinsarkophagen, die Skelete von Heinrich V., Philipp von Schwaben, Rudolf von Habsburg, Albrecht von Oesterreich, Adolf von Nassau, der Kaiserin Beatrix und ihrer Tochter Agnes in provisorischen Holzsärgen im Untergeschoss der Sakristei des Domes aufbewahrt sind.

Es ist beabsichtigt, die aufgefundenen Leichen in einer zu erbauenden Gruft in würdiger Weise beizusetzen und über die wissenschaftlichen Ergebnisse der Ausgrabungen durch die Akademie ein grösseres, reich ausgestattetes Werk zu veröffentlichen, wofür die kgl. Staatsregierung ein besonderes Postulat von 20,000 M. in das Budget der 26. Finanzperiode eingestellt hat.

Die regelmässigen Arbeiten der Akademie wurden im vergangenen Jahre in normaler Weise fortgesetzt.

Die Sitzungsberichte und Denkschriften, die Monumenta boica, die Publikationen der historischen Commission und die Annalen der Sternwarte legen Zeugnis ab von der wissenschaftlichen Thätigkeit ihrer Mitglieder. Es stellen diese Schriften freilich nur einen Teil der Arbeitsleistung derselben dar; wollte man alle in Zeitschriften oder in selbständigen Werken veröffentlichten Geistesprodukte unserer Akademiker in unsere eigenen Publikationen aufnehmen, so müsste unser Druckkostenetat mindestens auf das dreifache erhöht werden.

Neben der Akademie entfaltet die historische Commission eine rege Thätigkeit. Sie veröffentlichte im Jahre 1900/01 den III. Band der Jahrbücher des deutschen Reichs unter Heinrich IV. und Heinrich V. (1077—1084) durch Meyer von Knonau, den III. Band der deutschen Reichstagsakten, jüngere Reihe, durch Adolf Wrede, ferner den 12. Band der deutschen Reichstagsakten, ältere Reihe, durch Gustav Beckmann und die drei ersten Lieferungen der Nachträge zur allgemeinen deutschen Biographie.

Durch eine Anzahl regelmässiger staatlicher Zuwendungen und eigene Stiftungen ist die Akademie in der günstigen Lage, sowohl grössere und kostspieligere Arbeiten ihrer eigenen Mitglieder zu unterstützen, als auch andere wissenschaftliche Unternehmungen anzuregen und zu fördern. So erhielt Herr Privatdozent Dr. Lauterborn in Heidelberg aus der Position für naturwissenschaftliche Erforschung des Königreichs im vergangenen Jahr eine dritte Rate von 900 M. für seine Untersuchungen über die thierischen Organismen des Rheines und seiner Nebenflüsse innerhalb des bayerischen Gebietes; Herr Professor Dr. Hofer einen Zuschuss für Beobachtungen über die Verteilung der Thierwelt in den oberbayerischen Seen. Aus dem Erlös der akademischen Schriften erhielten Unterstützungen Herr Dr. Scherman für die Bearbeitung der orientalischen Biographie, Herr Dr. Bulle für sein Werk „Basen griechischer Statuen", Herr Professor Dr. Riggauer für die Herausgabe eines Werkes über die „Münzen und Medaillen des Gesammthauses Wittelsbach", und endlich Professor Dr. Solereder für sein Werk „anatomische Charakteristik der Dikotyledonen-Familien".

Von der Commission für Erforschung der Urgeschichte Bayerns konnten mit höchster Genehmigung Subventionen verteilt werden an eine Anzahl von Vereinen und Privaten, durch deren eifrige Arbeit die prähistorische Forschung in allen Teilen Bayerns wesentlich gefördert wurde.

Auch das Kuratorium der Liebig-Stiftung trat in diesem Sommer nach mehrjähriger Unterbrechung wieder zusammen

und beschloss aus den Renten dieses ursprünglich 15,200 fl. betragenden und jetzt auf etwa 50,000 M. angewachsenen Fonds die goldene Liebig-Medaille zu verleihen dem Vorstand der kgl. sächsischen landwirthschaftlichen Versuchsstation Möckern, Geh. Hofrat Professor Dr. O. Kellner in Anerkennung seiner vorzüglichen Leistungen auf dem Gebiete der landwirthschaftlichen Fütterungslehre, insbesondere in Hinsicht auf seine grundlegenden Untersuchungen über den Nahrungs- und Energiebedarf, sowie den Stoff- und Energieumsatz der landwirthschaftlichen Nutzthiere. Dem Privatdozenten Dr. Alfred Mitscherlich in Kiel wurde ausserdem zur Fortsetzung seiner „Untersuchungen über die physikalischen Bodeneigenschaften“ und zur Ausführung von Vegetationsversuchen, welche die Beziehungen zwischen Ertragsfähigkeit und Benetzungswärme des Bodens weiter darlegen sollen, eine Gabe von 1000 M. zugesprochen.

Es gereicht mir zur besonderen Freude mitteilen zu dürfen, dass die Münchener Bürger-Stiftung, welche wir unserem unvergesslichen früheren Präsidenten von Pettenkofer verdanken, durch eine hochherzige Schenkung der Brüder des verstorbenen Kommerzienrates Johann Sedlmayr um 25,000 M. vermehrt wurde, so dass dieselbe jetzt die Höhe von 115,100 M. erreicht hat.

Fast die ganzen Renten der Münchener Bürger-Stiftung, sowie der Cramer-Klett-Stiftung für das Jahr 1901 wurden, abgesehen von einer Unterstützung an den ornithologischen Verein für Forschungen über die Wanderung der Vogelarten, dem Münchener Verein für Luftschiffahrt zur Anschaffung eines neuen Ballons und Ausführung wissenschaftlicher Auffahrten zugewiesen. Bereits vor fünf Jahren hatte die Akademie demselben Verein eine grössere Summe zum Ankauf des Kugelballons „Akademie“ überwiesen, mit welchem über 40 wissenschaftliche Hochfahrten unternommen worden sind. Ihre Ergebnisse erstrecken sich vorzugsweise auf meteorologische, geophysikalische und photogrammatische Fragen und fanden die vollste Anerkennung der wissenschaftlichen Kreise, häufig auch das Interesse des grösseren Publikums.

Der im Bau begriffene neue Ballon des Vereins für Luftschiffahrt wird ein Volumen von 1440 cbm fassen, sodass bei Wasserstofffüllung zwei Personen über 6000 m hoch steigen können. Der Ballon wird zunächst der Meteorologie dienen und die vertikalen Ausdehnungen der atmosphärischen Vorgänge zu ermitteln trachten, da sich die Gründe dafür häufen, dass die Witterungsvorgänge auf der Erde vielfach in den höheren Schichten des Luftraumes erzeugt werden und nur Teilerscheinungen der grossen atmosphärischen Circulation sind, wie denn die anhaltende Winterkälte nur in den untersten 100 Metern der Atmosphäre herrscht, welche auch allein im Sommer von der nächtlichen Abkühlung betroffen werden. Ferner sollen die Methoden der photographischen Aufnahmen des Geländes vom Ballon aus zur Ergänzung der Landkarten verbessert werden. Sie haben besondere Bedeutung im Kriegsfalle und bei kompliziertem Gelände, bei Sumpflandschaften und Mündungsdeltas. Die dabei im Ballon gesammelten Erfahrungen sollen auch die Leistungsfähigkeit des Registrierdrachens vergrössern, von dessen Thätigkeit reiche Früchte u. a. auch für unsere Kolonien erhofft werden dürfen. Endlich ist der Ballon auch dazu bestimmt, das Problem der Luftelektrizität weiter aufzuhellen. Es hat sich nämlich als wahrscheinlich erwiesen, dass in der freien Atmosphäre immer eine grosse Menge frei beweglicher elektrisch geladener kleinster Teilchen vorhanden sind, welche elektrisch geladene Körper durch ihre Eigenladung zu neutralisieren vermögen. In 4 Ballonfahrten bis zu 4000 m hat Herr Professor Ebert als Erster bereits erfolgreiche luftelektrische und magnetische Messungen im freien Luftmeere vorgenommen und wird seine Forschungen nunmehr auch in einer Höhe bis zu 6000 m mit dem neuen Ballon fortsetzen. Von den magnetischen Höhenbeobachtungen, welche durch solche Hochfahrten besonders gefördert werden, darf auch insofern ein praktischer Nutzen erwartet werden, als sie voraussichtlich bei trübem Wetter zur Orientierung im Luftmeere gebraucht werden können.

Von den Studien, welche durch die Zinsen der Münchener Bürger-Stiftung pro 1900 ermöglicht worden sind, verdienen jene unseres Mitgliedes Hermann Ebert hervorgehoben zu werden. Man hat beobachtet, dass die Gesammtwassermasse des Genfer Sees, unabhängig von den ab- und zuströmenden Wassermengen, regelmässige pendelartige Schwingungen ausführt, derart, dass sich in Perioden von 73 Minuten die Wasser gegen die westliche Seite des Sees bei Vevey andrängen und dort den Wasserspiegel zuweilen um mehr als Meterhöhe heben, um dann wieder gegen das Ostende, gegen den Rhôneausfluss bei Genf zurückzufluten.

Durch einen geistreichen, aus den Mitteln der Münchener Bürger-Stiftung angeschafften selbstregistrierenden Flutmesser (Limnometer) untersuchte Herr Ebert den Starnberger See auf diese pendelartigen Schwingungen und fand, dass dasselbe Phänomen, durch die Grösse, die Gestalt und das Tiefenrelief unseres Sees entsprechend verändert, sich auch am Starnberger See zeigt. Während 12½ Minuten hebt sich das Wasser bei Starnberg um einige Centimeter, während es sich bei Seeshaupt senkt, um in den nächsten 12½ Minuten bei Seeshaupt anzusteigen. Der Flutmesser, dem Professor Ebert aus eigenen Mitteln noch einen zweiten hinzufügte, ist seit dem 7. Juli vorigen Jahres in Thätigkeit. Es sollen sämmtliche bayerische Seen, zunächst der Chiemsee, untersucht werden, um die für die Erklärung des vielleicht auf meteorologischen Faktoren beruhenden Phänomens notwendige grosse Anzahl von Beobachtungen zu sammeln. Vermuthlich hängen mit dieser Umlegung der grossen Wassermassen innerhalb weniger Minuten die heftigen Unterströmungen zusammen, die unter dem Namen des den Netzen so gefährlichen „Rinnens" allen Kennern des Sees bekannt sind, und welche bereits von Westenrieder in seiner Beschreibung des Starnberger Sees erwähnt werden.

Die Stiftung zur Förderung wissenschaftlicher chemischer Forschungen wurde im Oktober 1900 durch ihren Begründer, Professor Dr. Wilhelm Königs, um 15,000 M. und im April 1901 durch eine abermalige Schenkung von

5000 M., an welcher sich die Geschwister des Herrn Königs beteiligten, vermehrt. Die Renten aus dieser Stiftung erhielt Herr Professor Dr. Hofmann für Studien über seltenere chemische Elemente, die noch nicht vollendet sind, aber bereits hochinteressante Ergebnisse geliefert haben.

Ueber die Verwendung der Mittel aus der Savigny-, der Zographos- und der Thereianos-Stiftung habe ich bereits früher berichtet.

Neben ihren eigenen Arbeiten hat unsere Akademie die Pflege jener Aufgaben nicht ausser Acht gelassen, welche sie nicht allein, sondern nur in Verbindung mit anderen gelehrten Gesellschaften zu leisten im Stande ist. So wurde die Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, an deren Herausgabe sich neben München die kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien und die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften beteiligen, wesentlich gefördert.

Auch der Thesaurus linguae latinae, das gemeinsame Unternehmen der fünf deutschen Akademien, hat seine ersten schweren Anfänge hinter sich. Noch im Sommer des Jahres 1900 wurden die beiden ersten Lieferungen abgeschlossen, deren Herstellung die Probe bildete für die Zweckmässigkeit der Vorbereitungsarbeiten und für die neugeschaffene Arbeitsorganisation. Nach der Sitzung der akademischen Commission im Oktober 1900, an welcher die Herren Excellenz v. Hartel-Wien, Geheimrat Bücheler-Bonn, Geheimrat Diels-Berlin, Professor Leo-Göttingen, Professor Brugmann-Leipzig, Geheimrat v. Wölfflin-München und der Generalredaktor Prof. Vollmer-München teilgenommen haben, wurden drei Monate der Ergänzung des Zettelmaterials, besonders auch für die Eigennamen, gewidmet und dann im Februar ds. Js. die Artikelarbeit wieder aufgenommen. Im Laufe des Sommers konnten zwei weitere Lieferungen erscheinen, die fünfte ist im Manuskript abgeschlossen.

Durch das Entgegenkommen Seiner Excellenz des Herrn Staatsministers Dr. von Landmann konnten die Arbeitsräume im Wilhelminum erweitert und zweckmässig hergerichtet

werden: es war das dringend nötig, denn es arbeiten dort ausser dem Generalredaktor 12 Assistenten und mehrere Hilfsarbeiter.

Einen sehr schätzenswerthen Förderer hat der Thesaurus in den letzten Wochen durch den Tod des Geheimrats Dr. Alfred Pernice in Berlin verloren. Der Verstorbene hat mit unermüdlichem Fleisse gelesen und wo immer Juristisches in Frage kam, aus der Fülle seines Wissens nachgeholfen und gebessert.

Wie gross das Bedürfnis nach dem wissenschaftlichen Lexikon der lateinischen Sprache war, hat die grosse Zahl der Subskriptionen dargethan. Ausser den fünf Akademien, welche Bayern, Preussen, Sachsen und Oesterreich vertreten, haben auch noch die Regierungen von Baden, Württemberg und Elsass-Lothringen ihr Interesse an dem Werke durch namhafte Geldbeiträge bekundet.

Es bleibt nur zu wünschen, dass die gewaltige Arbeit ungestörten Fortgang nehmen könne.

Das Kartell der deutschen und österreichischen Akademien hat am 23. und 24. Mai ds. Js. in Leipzig eine Zusammenkunft veranstaltet, bei welcher mehrere wichtige Fragen zur Erörterung kamen. Die seit einer Reihe von Jahren vom Kartell geförderten Erdbebenforschungen sind durch die Bildung einer internationalen seismologischen Association in neue Bahnen gelenkt worden. Die deutsche Reichsregierung ist dieser Association beigetreten und hat in Strassburg i/E. eine seismische Centralstation errichtet. In der deutschen Reichs-Commission für seismische Forschungen ist Bayern durch den derzeitigen Präsidenten der Akademie vertreten.

Unter diesen Umständen hat das Kartell beschlossen, die eigenen Studien auf diesem Gebiete derart zu gestalten, dass sie sich mit dem Arbeitsprogramm der internationalen seismologischen Association im Einklang halten. Zu diesem Behufe hat die Akademie auf Grund eines Gutachtens ihres Mitgliedes Professor Günther einen Antrag an die kgl. Staatsregierung gerichtet, worin sie um die Bewilligung der Mittel

zur Gründung und Ausstattung von drei seismischen Stationen in Bayern gebeten hat.

Eine andere in ihrer Tragweite wahrscheinlich noch wichtigere Frage wurde von der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften in Anregung gebracht. Es ist über die in der Atmosphäre nachweislich vorhandenen elektrischen Strömungen bis jetzt noch ausserordentlich wenig bekannt und namentlich fehlt es noch fast ganz an Beobachtungen über die Intensität und Zerstreuung dieser Ströme. Nach dem Muster der von den Herren Elster und Geitel in Wolfenbüttel construirten Apparate wurde von Herrn Mechaniker Günther in Braunschweig ein neuer Apparat hergestellt, welcher befriedigend fungiert und eine unmittelbare Vergleichung aller Beobachtungen gewährleistet. Es sollen nun an günstig gelegenen Orten, namentlich im Gebirge, in Binnenseen und offenen Ebenen derartige selbstregistrierende Apparate aufgestellt werden. In Bayern beschäftigen sich mit der Zerstreuung der Luftelektrizität bereits zwei Stationen in München und Schaufling, weitere Stationen sind projektiert auf dem Peissenberg, der Zugspitze und an 6 anderen Orten in Deutschland und Oesterreich. Neben der Zerstreuung soll auch das Potentialgefälle und die Niederschlags-Elektrizität an diesen Stationen gemessen werden. Ebenso sind über die Beziehungen der erdmagnetischen Strömungen zur Luftelektrizität regelmässige Beobachtungen wünschenswerth. Die kartellierten Akademien wollen diese Studien zunächst der freien Initiative der beteiligten Forscher überlassen, allein schon jetzt wird ein planmässiges und einheitliches Vorgehen empfohlen. Besonderes Gewicht wird auch auf Beobachtungen im Luftballon und vor Allem an den Tagen der internationalen Auffahrten gelegt.

Die Lösung der in Leipzig angeregten Frage kann freilich nur durch das Zusammenwirken aller Kulturvölker gelöst werden. Und dies führt mich auf die internationale Association der Akademien und gelehrten Gesellschaften. Dieser im Jahre 1900 begründete Verband hielt im April 1901 zu Paris seine erste allgemeine Versammlung ab. Von den 18 dem Verband

angehörigen Corporationen waren 17 und zwar meist durch eine grössere Anzahl von Delegierten vertreten. München hatte die Herren v. Dyck, Krumbacher und Lindemann entsandt. Nicht weniger als 17 Anträge lagen der Versammlung zur Berathung vor. Einige auf die Geschäftsordnung und Statuten bezügliche Vorschläge fanden ihre definitive Erledigung und ebenso wurde der Antrag der Berliner Akademie auf Erleichterung des internationalen Austauschs von Manuskripten angenommen und beschlossen, die Vorschläge der Association zur Kenntnis der beteiligten Regierungen zu bringen. Auch der Antrag der Royal Society in London, einen Bogen des 30. Meridians im tropischen Afrika zu messen, um dadurch eine genauere Kenntnis von der Grösse und Gestalt der Erde zu erlangen, wurde den Regierungen von England, des deutschen Reichs und des Congostaates empfehlend zur Kenntnis gebracht.

Die Mehrzahl der übrigen Anträge wurden zur genaueren Prüfung und Vorbereitung besonderen Fachcommissionen zugewiesen und kommen in der nächsten Hauptversammlung, welche im Jahre 1903 in London stattfindet, zur definitiven Erledigung. Von diesen Anträgen erwähne ich nur eine von der Pariser und Berliner Akademie beabsichtigte, auf circa 140 Bände geschätzte kritische Ausgabe sämmtlicher, zum Teil noch unveröffentlichter Werke von Leibniz, ferner die von der Münchener Akademie befürwortete Ausgabe eines Corpus der griechischen Urkunden des Mittelalters und der neueren Zeit, die Herausgabe einer Realencyclopädie des Islam, eine neue Ausgabe des Mahabarata unter Mitwirkung der ostindischen Regierung, den Plan betreffend, die Organisation der Publikationen über antike Numismatik. Sollten die in Paris beratenen Anträge, wie zu erwarten ist, im Jahre 1903 genehmigt werden, so eröffnet sich dem internationalen wissenschaftlichen Grossbetrieb ein weites und fruchtbares Feld.

Nachdem ich im Vorhergehenden eine flüchtige Uebersicht der vielgestaltigen Thätigkeit unserer Akademie zu geben versucht habe, möchte ich zum Schluss es wagen, die sich

unwillkürlich aufdrängenden Fragen zu beantworten: Wird durch diese Fülle von Arbeit die wissenschaftliche Erkenntnis wesentlich gefördert und übt der Fortschritt der Wissenschaft einen segensreichen Einfluss auf die geistige und sittliche Entwickelung und das materielle Wohlbefinden der Menschheit aus?

Wenn wir die grosse Anzahl der in den Schriften unserer Akademie veröffentlichten Abhandlungen überblicken, so finden wir kaum eine einzige darunter, die nicht irgend eine neue Thatsache oder neuen Gedanken feststellte. In dieser Vermehrung des positiven Wissens beruht aber der wesentlichste Fortschritt der Wissenschaft. Wohl gibt es noch andere und höhere Geistesarbeit, als die neue Thatsachen aufzufinden und zu begründen, nämlich die, das vorhandene Wissen unter allgemeinen Gesichtspunkten zusammenzufassen und daraus Gesetze abzuleiten, die uns in Stand setzen, auch über noch unerforschte Gebiete Vermuthungen aufzustellen und sie durch zielbewusste Forschung aufzuklären. Freilich liegt hier die Gefahr der Entgleisung nur allzu nahe. Die Geschichte jeder Wissenschaft zeigt uns, dass auch die genialsten und für die Forschung fruchtbarsten Theorien und Systeme durch die Entdeckung neuer, unerwarteter Thatsachen umgestürzt wurden. Irrthümer, aus falscher Interpretation des thatsächlichen Wissens hervorgegangen, beherrschten oft viele Jahrzehnte hindurch eine Wissenschaft und führte sie auf Abwege. So vollzieht sich der wissenschaftliche Fortschritt nicht in gerader, sondern in vielfach verschlungener Zickzacklinie. Perioden des Aufschwungs wechseln mit solchen des Stillstandes und sogar des Rückschrittes. Welche Schuttmassen von zertrümmerten Theorien mussten die Naturwissenschaften aus dem Wege räumen, bis sie ihre heutige Höhe erreichten. Aber auch in den Geisteswissenschaften haben sich Anschauungen und Methoden durch die Vermehrung der positiven Kenntnisse gewaltig geändert. Wie viele Theorien und Systeme sind auch hier zusammengebrochen, die einst die Gedanken und Forschungsweise der Fachgelehrten beherrschten!

Obwohl uns die allmähliche Ausbildung der organischen

Wesen in den aufeinander folgenden geologischen Perioden im Grossen und Ganzen ein Streben nach Vervollkommnung erkennen lässt, so haben doch zu verschiedenen Zeiten einzelne Formen eine kaum zu überschreitende Höhe erreicht. Auch die dem menschlichen Genius erreichbare Höhe scheint von einzelnen auserwählten Individuen zu allen Zeiten erklommen worden zu sein. Die grossen Philosophen, Forscher, Künstler, Dichter, Staatsmänner und Kriegshelden des Alterthums stehen wohl in keiner Weise hinter den hervorragendsten Männern der Jetztzeit zurück, aber sie erheben sich als vereinzelte Erscheinungen hoch über ihre Umgebung, während heutzutage das geistige Niveau der Kulturvölker um ein beträchtliches gestiegen ist. Wissenschaftliche Kenntnisse sind heute bis in die tiefen Schichten der Menschheit eingedrungen, unsere ganze Lebensauffassung ist von wissenschaftlicher Erkenntnis durchtränkt.

Mit dem Fortschritt der Wissenschaft haben sich nicht nur die ethischen und moralischen Anschauungen gehoben, die Intoleranz und der Aberglaube gemindert, sondern durch den tiefgreifenden Einfluss der Naturwissenschaften haben sich auch unsere materiellen Lebensbedingungen in fast staunenswerther Weise umgestaltet.

Freilich nicht immer lässt sich eine wissenschaftliche Entdeckung sofort für das praktische Leben ummünzen, sie liegt häufig viele Jahre hindurch brach, bis endlich ihr Werth erkannt wird.

Die Anstalten, an welchen wissenschaftliche Forschung ohne Rücksicht auf ihre praktische Verwerthbarkeit und ohne Zweckmässigkeits-Erwägungen gefördert wird, sind die eigentlichen Werkstätten des wissenschaftlichen Fortschrittes. An der Erhaltung und Kräftigung solcher Anstalten hat darum nicht nur die Wissenschaft, sondern auch der Staat, ja die ganze Menschheit das lebhafteste Interesse.

Sodann verkündigten die Classensekretäre die Wahlen und zwar der Sekretär der II. Classe, Herr C. v. Voit, die der mathematisch-physikalischen Classe.

Von der mathematisch-physikalischen Classe wurden gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätiget:

I. zu ordentlichen Mitgliedern:

Die bisherigen ausserordentlichen Mitglieder:

Dr. Carl v. Linde, ordentlicher Professor an der hiesigen technischen Hochschule;

Dr. Johannes Rückert, ordentlicher Professor der Anatomie an der hiesigen Universität;

II. zum ausserordentlichen Mitgliede:

Dr. Johannes Thiele, ausserordentlicher Professor der Chemie an der hiesigen Universität;

III. zum correspondirenden Mitgliede:

Dr. Ewald Hering, ordentlicher Professor der Physiologie an der Universität Leipzig.

Hierauf hielt das ordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Classe, Geheimrath Carl v. Voit, die Festrede: „Max v. Pettenkofer zum Gedächtniss", welche in den Schriften der Akademie veröffentlicht wird.

Sitzung vom 7. Dezember 1901.

1. Herr H. Seeliger überreicht zwei Abhandlungen des Privatdozenten an der hiesigen Universität Dr. Arthur Korn:

a) „Ueber die natürliche elektrische Belegung einer beliebigen, stetig gekrümmten Konduktor-Oberfläche;"

b) „Allgemeine Lösung des Problems der magnetischen Induktion."

2. Herr Ferd. Lindemann hält zwei Vorträge:

a) „Zur Theorie der Linienspektra;"

b) „Ueber die Gleichung $x^n = y^n + z^n$."

3. Herr Joh. Ranke macht eine Mittheilung: „Ueber den doppelten Zwischenkiefer des Menschen."

4. Herr Alfr. Pringsheim spricht: „Ueber Divergenz gewisser Potenzreihen an der Convergenz-Grenze."

Ueber die natürliche, elektrische Belegung einer beliebigen, stetig gekrümmten Konduktoroberfläche.

Von **Arthur Korn.**

(*Eingelaufen 7. Dezember.*)

Die natürliche Belegung H einer stetig gekrümmten Oberfläche ω ist durch die Bedingungen definiert:

$$1)\quad \begin{cases} \int\limits_{\omega} H \frac{d\omega}{r} = \text{const.} = \Gamma \text{ (im Innern von } \omega), \\ \int\limits_{\omega} H\, d\omega = 1. \end{cases}$$

Dabei bedeutet $d\omega$ irgend ein Element der Fläche ω und r die Entfernung

$$d\omega \rightarrow (x y z),$$

wenn $(x y z)$ irgend einen variabeln Punkt vorstellt. Die Funktion H ist stets positiv, da Γ positiv,[1] somit

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu} \int\limits_{\omega} H \frac{d\omega}{r} \right|_a = 4\pi H \quad (\nu \text{ innere Normale})$$

ebenfalls positiv sein muss.

---

[1]) Setzt man

$$V = \int\limits_{\omega} H \frac{d\omega}{r},$$

so ist:

$$\int\limits_{a} \left| \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right| d\tau = 4\pi\Gamma \int\limits_{\omega} H\, d\omega,$$
$$= 4\pi\Gamma.$$

Ich will in dieser Abhandlung beweisen,[1]) dass H auch nicht $= 0$ sein kann, ein Resultat, das für das Studium der Niveauflächen $\int\limits_{\omega} H \frac{d\omega}{r} = \text{const.}$ von Wichtigkeit ist:

Die natürliche Belegung jeder stetig gekrümmten, geschlossenen Fläche ω[2]) ist an jedem Punkte von ω grösser als eine von null verschiedene, lediglich von der Gestalt der Fläche abhängende Zahl.

Wir brauchen zum Beweise den folgenden Hilfssatz:

Es sei in der xy Ebene (R) ein Kreis mit dem Radius R um den Anfangspunkt O; $p(x, o)$ ein Punkt der x Axe mit dem Centralabstande $x = r_0$ $(< R)$; $p'(r_0' o)$ der demselben in Bezug auf den Kreis konjugierte Punkt. Wir machen $Oq = \frac{r_0}{3}$, erreichten in q die Senkrechte zur x Axe, welche den Kreis in C und C' schneiden möge, bezeichnen mit N_1 N_2 die Schnittpunkte der Graden Cp und $C'p$ mit dem Kreise und mit BB' die Schnittpunkte der y Axe mit dem Kreise, dann wird die Funktion:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\cos(r\nu)}{r^2} - \frac{R}{r_0}\frac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right\},$$

in der r die Entfernung und Richtung von einem variabeln Punkte des Kreises

$$(\xi\eta) \rightarrow p,$$

r' die Entfernung und Richtung

$$(\xi\eta) \rightarrow p',$$

---

[1]) Den analogen Beweis in der Ebene habe ich in meinem Lehrbuch der Potentialtheorie II S. 348—354 gegeben.

[2]) Wie bei dem analogen Satze in der Ebene (Lehrbuch der Potentialtheorie II S. 348 - 354) schliessen wir Singularitäten der Fläche ω aus, indem wir stillschweigend voraussetzen, dass die abteilungsweise Monotonität von $\cos(rx)$ $\cos(ry)$ $\cos(rz)$ nicht blos für ω, sondern für jede Fläche gilt, welche durch eine Transformation nach reciproken Radien aus ω entsteht.

ν die innere Normale des Kreises in $(\xi\eta)$ vorstellt, (als Funktion von $(\xi\eta)$ betrachtet) auf dem Bogen $\widehat{N_1 B B' N_2}$ stets positiv sein und zwar

$$\geqq \frac{r_0}{16 R^4}$$

auf dem Teile BB' dieses Bogens.

Die Funktion:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{r_0}\frac{1}{r'}\right)$$

ist für jeden beliebigen Punkt $(\xi\eta)$ des Kreises $= 0$.

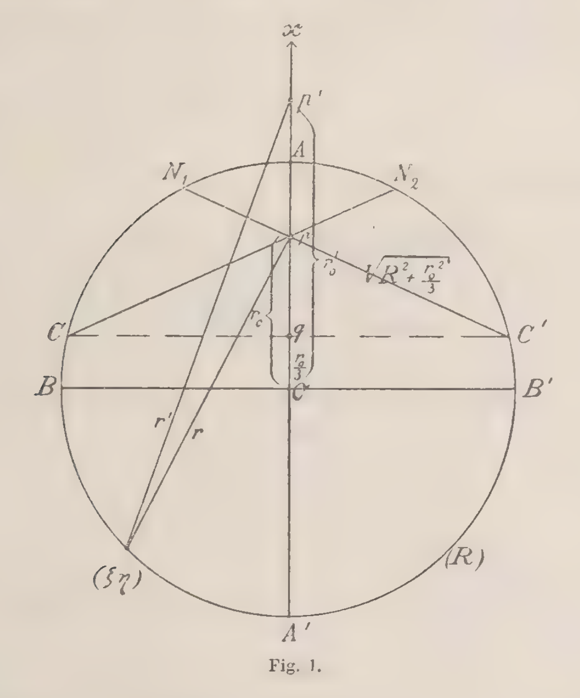


Fig. 1.

Es ist in der That:[1])

$$\frac{r'}{r} = \frac{r_0'}{R} = \frac{R}{r_0},$$

[1]) Man vergleiche Lehrbuch der Potentialtheorie II S. 349 u. 287.

somit:

$$2)\qquad -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{r_0}\frac{1}{r'}\right)=0,$$

ferner:

$$-\left(\frac{\cos(r\nu)}{r^2}-\frac{R}{r_0}\frac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right)=-\left(\frac{\cos(r\nu)}{r}-\frac{\cos(r'\nu)}{r'}\right)\frac{1}{r'},$$

$$=\frac{r_0^2-R^2}{R r^3};\text{[1]}$$

hieraus folgt durch Differentiation nach x (d. i. r_0):

$$3)\begin{cases}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2}-\dfrac{R}{r_0}\dfrac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right)=\dfrac{2r_0}{Rr^3}+3\cos(rx)\dfrac{R^2-r_0^2}{Rr^4},\\[2ex] \qquad\qquad =\dfrac{r^2(r_0^2+3R^2)-3(R^2-r_0^2)^2}{2Rr_0r^5},\end{cases}$$

mit Rücksicht darauf, dass:

$$R^2=r^2+r_0^2-2rr_0\cos(rx),$$

somit:

$$\cos(rx)=\frac{r^2+r_0^2-R^2}{2rr_0}.$$

Die rechte Seite in 3) kann nur verschwinden, falls:

$$r=\frac{R^2-r_0^2}{\sqrt{R^2+\frac{r_0^2}{3}}}$$

oder:

$$r\cdot\sqrt{R^2+\frac{r_0^2}{3}}=(R+r_0)(R-r_0)=pA'\cdot pA,$$

(wenn A und A' die Schnittpunkte der x Axe mit dem Kreise vorstellen), also nur in den Punkten N_1 und N_2; nur in diesen Punkten kann der Ausdruck 3) das Zeichen wechseln. Lassen wir $(\xi\eta)$ nach A rücken ($r=R-r_0$), so wird die rechte Seite

[1]) Man vergleiche die erste Formel ib. S. 350.

$$= -\frac{3R + r_0}{R(R - r_0)^3}, \text{ also negativ,}$$

lassen wir $(\xi\eta)$ nach A' rücken $(r = R + r_0)$, so wird die rechte Seite:

$$= \frac{3R - r_0}{R(R + r_0)^3}, \text{ also positiv,}$$

es ist somit die rechte Seite stets positiv auf dem Bogen $N_1 A' N_2$, negativ auf dem Bogen $N_1 A N_2$. Beschränken wir uns auf den Bogen $B A' B'$, so ist die rechte Seite, da dann stets $r > R$:

$$\overline{\overline{>}}\ \frac{R^2(r_0^2 + 3R^2) - 3(R^2 - r_0^2)^2}{2 R r_0 r^5} = \frac{(7R^2 - 3r_0^2) r_0}{2 R r^5},$$

oder da $r < 2R$, $7R^2 - 3r_0^2 \overline{\overline{>}}\ 4R^2$, auch:

$$\overline{\overline{>}}\ \frac{r_0}{16 R^4}.$$

Damit ist der Hilfssatz in allen seinen Teilen bewiesen.[1])

Wir gehen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe über. Es sei p irgend ein Punkt der gegebenen Fläche ω; wir nehmen die innere Normale der Fläche in p zur x Axe, markieren auf der äusseren Normalen einen Punkt O in der Entfernung r_0 von p und schlagen um O als Centrum eine Kugel mit dem Radius $r_0 + \varepsilon$. Irgend eine von der x Axe begrenzte Halbebene wird aus der Kugelfläche den Halbkreis ABA' und aus ω ein Kurvenstück pQ.. ausschneiden; wir werden dadurch, dass wir r_0 und ε genügend klein machen, stets erreichen können, dass dieses Kurvenstück von dem Halbkreis ABA' nur in einem Punkte Q getroffen wird, oder jedenfalls in einer endlichen Zahl von Punkten $Q_1 Q_2 \ldots$;[2])

[1]) Der Satz ist ein Analogon des von C. Neumann für die Untersuchung in der Ebene abgeleiteten Hilfssatzes (C. Neumann, Ueber die Methode des arithmetischen Mittels, Abh. der k. sächs. Ges. d. Wiss. 1887 S. 699, man vgl. mein Lehrbuch der Potentialtheorie II S. 348).

[2]) Infolge der Voraussetzung Anm. S. 426.

wir beschränken uns auf den ersteren Fall, die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall ist ohne jede Schwierigkeit. Wir konstruieren endlich in der dem obigen Hilfssatze entsprechenden Weise (man vgl. die Figur) den dem Punkt p zugeordneten Punkt N auf dem Halbkreise ABA', und es wird für unseren Beweis ganz gleichgültig sein, ob N auf dem Teile AQ oder auf dem Teile QBA' dieses Halbkreises liegt.[1])

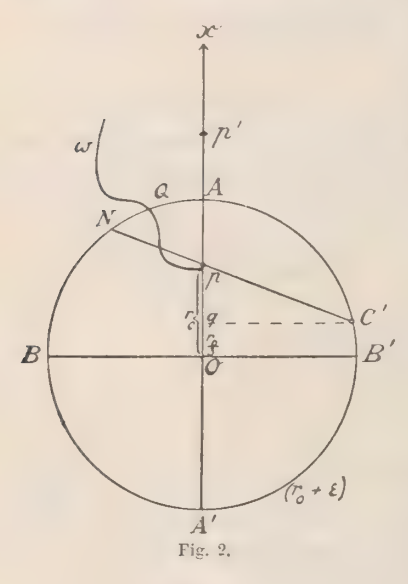


Fig. 2.

Es ist nun:

$$4)\qquad V = \int_{\omega} H \frac{d\omega}{r}$$

eine Potentialfunktion des von ω und der Kugelfläche begrenzten Gebietes, dessen Querschnitt von $pQNBA'p$ begrenzt wird; es ist somit für jeden Punkt dieses Gebietes:

$$V = -\frac{1}{4\pi}\int_{Qp} \frac{\partial V}{\partial n}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_{Qp} \Gamma \frac{\cos(rn)}{r^2}\, d\omega$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{QBA'} \frac{\partial V}{\partial n}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_{QBA'} V \frac{\cos(rn)}{r^2}\, d\omega,$$

wenn der Index Qp die Integration über den der Fläche ω angehörenden Teil der Grenzfläche[2]) andeutet und der Index QBA' die Integration über den Teil der Grenzfläche, welcher der Kugelfläche angehört. Wir können die letzte Gleichung auch so schreiben:

[1]) Ist ω überall konvex, so liegt N stets auf dem Teile AQ (bei genügend kleinem r_0 und $\frac{\varepsilon}{r_0}$).

[2]) n die in das Gebiet hineingehende Normale.

$$
5\text{a)}\quad \begin{cases} V - \Gamma = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{QBA'} \dfrac{\partial V}{\partial n}\,\dfrac{d\omega}{r} + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{QBA'} (V-\Gamma)\,\dfrac{\cos(rn)}{r^2}\,d\omega \\[2ex] \qquad\qquad -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{Qp} \dfrac{\partial V}{\partial n}\,\dfrac{d\omega}{r}. \end{cases}
$$

Dagegen ist für das Aussengebiet der durch die Abkürzungen Qp und QBA' bezeichneten Flächen:

$$
5\text{b)}\quad \begin{cases} 0 = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{QBA'} \dfrac{\partial V}{\partial n}\,\dfrac{d\omega}{r'} + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{QBA'} (V-\Gamma)\,\dfrac{\cos(r'n)}{r'^2}\,d\omega \\[2ex] \quad -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{Qp} \dfrac{\partial V}{\partial n}\,\dfrac{d\omega}{r'}. \end{cases}
$$

Wir bilden die erste Formel für den Punkt p, die zweite für den zu p in bezug auf die Kugelfläche konjugierten Punkt p′,[1]) subtrahieren die zweite von der ersten, nachdem wir dieselbe noch mit $\dfrac{R}{r_0}$ multipliciert haben, dann folgt:

$$
6)\quad \begin{cases} \left.\dfrac{\partial V}{\partial \nu}\right._{p}^{2)} = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{QBA'} \dfrac{\partial V}{\partial \nu}\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{R}{r_0}\cdot\dfrac{1}{r'}\right) d\omega \\[2ex] \qquad + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{QBA'} (V-\Gamma)\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2} - \dfrac{R}{r_0}\,\dfrac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right) d\omega \\[2ex] \qquad + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{Qp} \dfrac{\partial V}{\partial \nu}\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{R}{r_0}\cdot\dfrac{1}{r'}\right) d\omega, \end{cases}
$$

somit unter Berücksichtigung unseres Hilfssatzes:

---

[1]) Durch genügende Verkleinerung von ε können wir stets erreichen, dass p' in dem Aussengebiete liegt, für welche die Formel 5 b) gilt.

[2]) Indem wir zunächst den Punkt p variabel annehmen; erst nach der Differentiation soll derselbe unendlich nahe an ω heranrücken.

$$
7)\quad \begin{cases}
\left.\dfrac{\partial V}{\partial \nu}\right|_p \gtreqless \dfrac{V_0 r_0}{32\,(r_0+\varepsilon)^2} \\[2ex]
\qquad - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{QN}(\Gamma - V)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2} - \dfrac{R}{r_0}\dfrac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right)d\omega \\[2ex]
\qquad + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{Qp}\dfrac{\partial V}{\partial \nu}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{R}{r_0}\cdot\dfrac{1}{r'}\right)d\omega,
\end{cases}
$$

wenn V_0 den kleinsten Wert von $\Gamma - V$ auf dem durch BA' dargestellten Teile der Kugelfläche darstellt. Von der Fläche QN ist in der zweiten Zeile nur der zwischen dem Pole A und dem Breitenkreise N gelegene Teil zu berücksichtigen.[1])

Wir wollen zeigen, dass wir die dritte Zeile

$$
= \text{(endliche Konstante)} \left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_p + E_1
$$

machen können, wo E_1 durch Verkleinerung von ε unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann. Es folgt dies leicht, da $\dfrac{\partial V}{\partial \nu}$ an ω eindeutig und stetig ist, ferner bei genügend kleinem ε:

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{r_0}\cdot\frac{1}{r'}\right) = -\frac{\cos(r\nu)}{r^2} - \frac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\frac{R^3}{r_0^3} + \frac{\varrho}{r}\cdot a,
$$

wo ϱ die Entfernung $d\omega \rightarrow p$ und a eine endliche Grösse vorstellt, unter Berücksichtigung des Satzes IVa S. 33 meines Lehrbuches der Potentialtheorie I und der Bemerkung, dass das Integral:

$$
\int\limits_{Qp}\frac{\varrho}{r^2}\,d\omega
$$

durch Verkleinerung von ε unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann (da $\varrho <$ endl. Konst. r).

---

[1]) Bei überall konvexen Flächen fällt also die zweite Zeile fort.

Die zweite Zeile in der Formel 8) formen wir um, indem wir bedenken, dass:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(r\nu)}{r^2}-\frac{R}{r_0}\frac{\cos(r'\nu)}{r'^2}\right)=-\frac{\cos(\nu x)-3\cos(rx)\cos(r\nu)}{r^3}$$
$$-\frac{R^3}{r_0^3}\frac{\cos(\nu x)-3\cos(r'x)\cos(r'\nu)}{r'^3};$$

somit ist dieselbe, da wir $\cos(\nu x)$ durch Verkleinerung von ε beliebig nahe an (-1) heranrücken lassen können:

$$>\frac{3}{4\pi}\int\limits_{QN}(\Gamma-V)\left[\frac{\cos(rx)\cos(r\nu)}{r^3}+\frac{R^3}{r_0^3}\frac{\cos(r'x)\cos(r'\nu)}{r'^3}\right]d\omega,$$

oder, da wir in der Gleichung:

$$\Gamma-V=r\left(-\frac{\partial V}{\partial\nu}\cos(r\nu)^{1)}+\varepsilon'\right)$$

auf QN die Grössen ε' und $\cos(r\nu)$ durch Verkleinerung von ε unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrücken können,

$$\overline{\overline{>}}\, E_2,$$

wo E_2 durch Verkleinerung von ε unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann; wir erhalten somit:

$$8)\qquad \text{endl. Konst.}\left|\frac{\partial V}{\partial\nu}\right|_p\overline{\overline{>}}\frac{V_0 r_0}{32(r_0+\varepsilon)^2}+E_1+E_2$$

und durch Uebergang zur Grenze $(\varepsilon=0)$:

$$9)\qquad \left|\frac{\partial V}{\partial\nu}\right|_p\overline{\overline{>}}\frac{4\pi}{N},$$

wo:

$$10)\qquad N=\text{endl. Konst.}\frac{128\pi r_0}{V_0}$$

---

[1]) ν innere Normale der Kugelfläche.

eine endliche Konstante vorstellt, da jetzt V_0 den kleinsten Wert von $\Gamma - V$ auf der Halbkugel $B A'$ im Falle $\varepsilon = 0$ repräsentiert, somit der Ungleichung:

$$V_0 > 0$$

in strengem Sinne genügt (Zusatz 4 zu VII S. 203 meines Lehrbuches der Potentialtheorie I). Wegen der Identität:

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} = 4 \pi H$$

folgt jetzt:

$$H > \frac{1}{N} \tag{11}$$

und damit ist der Beweis unseres Satzes erbracht.

Allgemeine Lösung des Problems der magnetischen Induktion.

Von **Arthur Korn.**

(Eingelaufen 7. Dezember.)

Es sei ω die stetig gekrümmte Oberfläche eines (auch aus einer endlichen Zahl räumlich getrennter Teile zusammengesetzten) magnetisierbaren Mediums τ, und es seien innerhalb des Aussenraumes irgend welche feste magnetische Ursachen gegeben, deren Potential wir mit V bezeichnen wollen. Das Gesammtpotential jener festen magnetischen Ursachen und der durch sie in τ inducierten magnetischen Verteilung ist dann:

$$1)\qquad Q = \varkappa \int\limits_{\omega} \frac{\partial (Q + V)}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r},$$

wenn $d\omega$ irgend ein Element der Oberfläche ω (mit der inneren Normalen ν) und r die Entfernung von $d\omega \rightarrow$ einem variablen Punkt $(x\,y\,z)$ des Innen- oder Aussenraumes vorstellt, auf den sich die Formel (1) bezieht; $\varkappa$ ist eine dem magnetisierbaren Medium eigentümliche Konstante, positiv für die sogenannten magnetischen, negativ für die sogenannten diamagnetischen Medien.

Man kann die Aufgabe für die unbekannte Funktion Q auch so formulieren:

Es ist eine Potentialfunktion Q_i des Innenraumes und eine Potentialfunktion Q_a des Aussenraumes so zu bestimmen, dass:

$$2)\qquad \left. \begin{aligned} (1 + 4\pi\varkappa) \frac{\partial Q_i}{\partial \nu} - \frac{\partial Q_a}{\partial \nu} + 4\pi\varkappa \frac{\partial V}{\partial \nu} &= 0, \\ Q_a &= Q_i \end{aligned} \right\} \text{ an } \omega.$$

Man mag die alten Fernwirkungstheorieen oder eine der neueren Theorien des Elektromagnetismus zu grunde legen, immer wird man zu diesem mathematischen Problem geführt.

Dieses Problem bildet einen speciellen Fall des allgemeinen Problemes, eine Potentialfunktion U_i des Innenraumes und eine Potentialfunktion U_a des Aussenraumes so zu bestimmen, dass:

$$3)\quad \left.\begin{cases} \dfrac{\partial U_a}{\partial \nu} - \dfrac{\partial U_i}{\partial \nu} = \lambda\left(\dfrac{\partial U_a}{\partial \nu} + \dfrac{\partial U_i}{\partial \nu}\right) - 2f, \\ U_a = U_i \end{cases}\right\} \text{an } \omega,$$

wo λ eine gegebene reelle Zahl und f eine eindeutige und stetige, gegebene Funktion der Stelle auf ω vorstellt.[1])

Ist in dem Problem 3)

$$4)\qquad \text{abs. } \lambda < 1,$$

so ist, nach den Untersuchungen in Nr. 5 meiner Abhandlungen zur Potentialtheorie, die Existenz einer und nur einer Lösung U gesichert, und die Lösung ist darstellbar durch die Reihe:

$$5)\qquad U = \mathfrak{V}_0 + \lambda \mathfrak{V}_1 + \lambda^2 \mathfrak{V}_2 + \cdot\cdot,$$

wenn:

$$6)\quad \begin{cases} \mathfrak{V}_0 = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\omega f\,\dfrac{d\omega}{r}, \\ \mathfrak{V}_j = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\omega \left[\dfrac{\partial \mathfrak{V}_{j-1,a}}{\partial \nu} + \dfrac{\partial \mathfrak{V}_{j-1,i}}{\partial \nu}\right]\dfrac{d\omega}{r} \cdot (j = 1, 2 \ldots). \end{cases}$$

U besitzt in ganzer Erstreckung des Innenraumes sowohl, als auch in ganzer Erstreckung des Aussenraumes eindeutige und stetige Ableitungen nach x, y, z.

Wir können nun das Problem der magnetischen Induktion leicht auf ein Problem von der Form 3) zurückführen und durch die Gleichungen 5) 6) somit zu einer allgemeinen

---

[1]) Von der wir überdies voraussetzen, dass $\int_\omega f\,\frac{d\omega}{r}$ Potentialfunktion des Innen- und Aussenraumes ist.

Lösung des Problemes gelangen. Diese Untersuchung bietet zugleich einen interessanten Fall der Anwendung der Poincaré'schen Fundamentalfunktionen. —

Um das Problem 2) auf die Form 3) zu bringen, konstruieren wir das Potential der Fläche ω mit der Dichte H:

$$\Phi = \int_{\omega} H \frac{d\omega}{r} \tag{7}$$

in solcher Weise, dass im ganzen Innenraum von ω:

$$\Phi - \frac{2\pi\varkappa}{1+2\pi\varkappa} V \text{ (im Innern von } \omega), \tag{8}$$

und wir setzen:

$$U = Q + \Phi, \tag{9}$$

dann lassen sich die Formeln 2) in der folgenden Art und Weise schreiben:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U_a}{\partial \nu} - \frac{\partial U_i}{\partial \nu} &= \frac{2\pi\varkappa}{1+2\pi\varkappa}\left(\frac{\partial U_a}{\partial \nu} + \frac{\partial U_i}{\partial \nu}\right) + \frac{1}{1+2\pi\varkappa}\left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\right), \\ U_a &= U_i \end{aligned} \right. \tag{10}$$

an ω.

Damit ist die gewünschte Form 3) erhalten; überdies ist für magnetische Medien $\varkappa > 0$, somit:

$$\frac{2\pi\varkappa}{1+2\pi\varkappa} < 1, \tag{11}$$

die Formeln 5) 6) geben uns daher die Lösung U, wenn man in denselben:

$$f = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2\pi\varkappa}\left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\right) \tag{12}$$

setzt, in Gestalt einer unendlichen Reihe, die rascher konvergiert, als eine geometrische Reihe mit dem $j$ten Gliede:

$$\left(\frac{2\pi\varkappa}{1+2\pi\varkappa}\right)^j$$

und hierauf nach 9):

13) $$Q = U - \Phi.$$

Nachdem so zunächst die Existenz der Lösung allgemein bewiesen ist, gehen wir zu der Entwickelung nach Poincaré'schen Fundamentalfunktionen über. Es ist nach Satz Vb S. 58 in Nr. 5 meiner Abhandlungen zur Potentialtheorie:

14) $$U = C_0 \Phi_0 + C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2 + \ldots$$

innerhalb des Innen- und Aussenraumes von ω, wenn $\Phi_0\ \Phi_1\ \Phi_2 \ldots$ die Poincaré'schen Fundamentalfunktionen[1]) sind, welche den Polen:

$$\lambda = \lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$$

der Lösung des Problemes:

$$\frac{\partial u_a}{\partial \nu} - \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = \lambda \left(\frac{\partial u_a}{\partial \nu} + \frac{\partial u_i}{\partial \nu} \right) + \frac{1}{1 + 2\pi\varkappa} \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} \right),$$

$$u_a = u_i$$

an ω

entsprechen. Die Konstanten $C_0\ C_1\ C_2 \ldots$ in der Entwickelung 14) sind dabei durch die Formeln gegeben:

15)[2]) $$C_j = -\int_\omega U \frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu} d\omega = \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1} \int_\omega U \frac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu} d\omega.$$

---

[1]) Die Potentialfunktionen $\Phi_{ji}\ \Phi_{ja}$ des Innen- resp. Aussenraumes von ω haben die wichtigen Eigenschaften ($j = 1, 2 \ldots$):

a) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu} - \frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu} &= \lambda_j \left(\frac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu} \right), \\ \Phi_{ja} &= \Phi_{ji} \end{aligned} \right| \text{ an } \omega;$$

b) $$\int_i \left[\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = 1,$$

während Φ_0 das Potential der natürlichen Belegung vorstellt.

[2]) für $j = 1, 2 \ldots$; während:

$$C_0 = \frac{1}{4\pi} \int_\omega \frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} d\omega.$$

Mit Hilfe der ersten Gleichung 10) können wir zeigen, dass wir zur Bestimmung der C_j die Lösung U des Problems 10) gar nicht zu kennen brauchen. Es ist nach der ersten Gleichung 10):

$$\frac{\partial U_a}{\partial \nu} = (1 + 4\pi\varkappa)\frac{\partial U_i}{\partial \nu} + \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\right),$$

somit:

$$C_j \equiv \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\int\limits_\omega U \frac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu}\, d\omega \equiv \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\int\limits_\omega \Phi_j \frac{\partial U_a}{\partial \nu}\, d\omega,$$

$$= (1 + 4\pi\varkappa)\frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\int\limits_\omega \Phi_j \frac{\partial U_i}{\partial \nu}\, d\omega + \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\int\limits_\omega \Phi_j\left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\right) d\omega,$$

$$= -(1 + 4\pi\varkappa)\frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\, C_j + \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1}\int\limits_\omega \Phi\left(\frac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu}\right) d\omega,$$

oder:

$$C_j = \frac{\lambda_j - 1}{\lambda_j + 1 + (1 + 4\pi\varkappa)(\lambda_j - 1)}\int\limits_\omega \Phi\left(\frac{\partial \Phi_{ja}}{\partial \nu} + \frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu}\right) d\omega,$$

$$= -\frac{2}{\lambda_j + 1 + (1 + 4\pi\varkappa)(\lambda_j - 1)}\int\limits_\omega \Phi \frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \nu}\, d\omega,$$

oder schliesslich:

$$16)\quad C_j{}^{1)} = -\frac{2}{\lambda_j + 1 + (1 + 4\pi\varkappa)(\lambda_j - 1)}\int\limits_\omega \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu}\, \Phi_j\, d\omega.$$

Wir können somit die Lösung Q des Problemes der magnetischen Induktion allgemein innerhalb des Innenraumes und Aussenraumes von ω in der Form darstellen:

$$17)\qquad Q = -\Phi + C_0\Phi_0 + C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + \ldots,$$

---

[1]) für $j = 1, 2 \ldots$; während nach wie vor:

$$16')\qquad C_0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \frac{\partial \Phi_a}{\partial \nu}\, d\omega.$$

wo Φ die Lösung des Dirichlet'schen Problemes für den Innen- resp. Aussenraum mit den Randwerten

$$\frac{2\pi\varkappa}{1+2\pi\varkappa}\, V \text{ an } \omega$$

vorstellt und die Konstanten $C_0 C_1 C_2 \ldots$ durch die Gleichungen 16) (und 16') bestimmt sind.

Im Falle der Kugel, in dem die Poincaré'schen Fundamentalfunktionen mit den Laplace'schen Funktionen

$$\frac{Y_j}{r^{j+1}} \text{ resp. } Y_j \cdot r^j$$

proportional werden, führt uns die Gleichung 17) auf die bekannte Lösung in der Form einer nach Kugelfunktionen fortschreitenden Reihe.

Zur Theorie der Spectrallinien.

Von **F. Lindemann.**

(Eingelaufen 16. Dezember.)

Das Auftreten discreter Linien im Spectrum eines glühenden Gases erklärt man wohl allgemein (zunächst nach Analogie mit akustischen Vorgängen) durch sogenannte Eigenschwingungen der Moleküle. Wie aber diese Schwingungen zu Stande kommen, darüber scheint keine feste Ansicht zu herrschen; ob das Molekül als ganzes, oder die einzelnen Atome desselben oder endlich das Innere des kugelförmig gedachten Atoms diese Schwingungen ausführt, vermag man nicht zu sagen.

Letztere Ansicht hat besonders Lord Kelvin vertreten;[1]) er construirt ein aus concentrischen Kugelschalen bestehendes Modell eines Atoms; diese Kugelschalen sind durch elastische Kräfte an einander und an den umgebenden Lichtäther gebunden. Die Schwingungen des Aethers theilen sich diesen Kugelschalen mit; solche von gewisser Wellenlänge werden gänzlich absorbirt und bedingen das Auftreten der Linien im Spectrum. Man hat hierbei für das Innere des Moleküls eine sehr grosse Anzahl von Constanten zur Verfügung, und kann es mittelst derselben natürlich (wenn auch bisher ein numerischer Versuch nicht gemacht wurde) so einrichten, dass die Rechnung sich den Erscheinungen ungefähr anpasst.

Die innere Construction eines Atoms würde hiernach so complicirt ausfallen, dass man sich nur ungern zur Annahme

---

[1]) Sir William Thomson: Lectures of molecular dynamics and the ware theory of light, Baltimore 1884.

dieser Hypothese entschliessen kann, wenngleich es wohl die einzige ist, welche die Erscheinungen im Spectrum eines Gases rein mechanisch verständlich macht.

Helmholtz hat für den Brechungs-Exponenten in seiner Abhängigkeit von der Wellenlänge ähnliche Ausdrücke aufgestellt,[1]) wie Lord Kelvin; aber er setzt dabei eine Reibung zwischen dem Lichtäther und der Oberfläche des Atoms voraus, also einen Vorgang, bei dem lebendige Kraft verloren ging.

In der elektrischen Lichttheorie[2]) geht man von der Annahme verschiedener Gattungen von Jonen aus, die das Atom begleiten und deren jedes eine ihm eigenthümliche Eigenschwingung besitzt, also von einer noch complicirteren Vorstellung, als wie sie dem Thomson'schen mechanischen Modelle zu Grunde liegt.

Schon früher habe ich der Ueberzeugung Ausdruck gegeben,[3]) es sei die Hypothese von Lord Kelvin nur als Ersatz für die Thatsache anzusehen, dass die Wellenlängen der Linien eines Spectrums als Wurzeln einer transscendenten Gleichung aufzufassen sind, die von der inneren Natur des Atoms abhängt; es war mir aber erst nach vielen vergeblichen Versuchen möglich, dieser Ueberzeugung eine mathematische Unterlage zu geben und sie durch Vergleichung mit der Erfahrung zu prüfen.

Im Folgenden gehe ich bei den entsprechenden Ableitungen von der elastischen Lichttheorie aus, da die in den Grenzbedingungen liegenden Schwierigkeiten, welche dieser Theorie entgegenstehen, gerade beim vorliegenden Probleme fortfallen (vgl. § 2). Ich denke mir eine im Lichtäther ruhende homogene Kugel, deren Inneres beliebige transversale und longitu-

---

[1]) Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd, 1, p. 213 ff.

[2]) Vgl. z. B. p. 356 ff. in Drude's Lehrbuch der Optik. Leipzig 1900.

[3]) Ueber Molekularphysik. Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr., Jahrgang 19. 1888. Einen grossen Theil dieser meiner älteren Entwicklungen würde ich jetzt natürlich ganz anders fassen, insbesondere alles, was über den Magnetismus gesagt ist. Ich hoffe, darauf bald zurückkommen zu können.

dinale Oscillationen ausführt und frage, wie sich diese Oscillationen auf den Lichtäther übertragen, und zwar speciell unter der Annahme, dass vom Mittelpunkte der Kugel aus nach allen Seiten volle Symmetrie herrsche. Für die zulässigen Wellenlängen ergeben sich dabei verschiedene transscendente Gleichungen, deren Wurzeln nicht allgemein angegeben werden können. Es lassen sich aber aus ihnen Beziehungen zwischen den Spectren verschiedener Elemente unter gewissen vereinfachenden Annahmen ableiten, die ich sodann an einer Reihe von Beispielen geprüft und als annähernd erfüllt befunden habe (§ 7 — § 13).

Dabei habe ich den von verschiedenen Autoren im Spectrum gewisser Elemente bemerkten „Serien“ besondere Beachtung geschenkt und zum Schlusse (§ 14) erörtert, wie man etwa das Auftreten dieser Serien (unter gewissen Annahmen über die vorkommenden Constanten) als eine Eigenschaft der Wurzeln der betreffenden transscendenten Gleichungen zu erkennen vermag.

Das Auftreten der Serien, welche man sonst durch andere Hypothesen zu erklären versucht hat,[1]) ist hierdurch wenn nicht völlig aufgeklärt, so doch mit den nachfolgenden theoretischen Erörterungen in Einklang gebracht.

Besonderes Gewicht lege ich auf die Einfachheit der gemachten Voraussetzungen. Jedenfalls dürfte es gerechtfertigt erscheinen zu versuchen, wie weit man mittelst dieser einfachen Annahmen den beobachteten Erscheinungen mathematisch gerecht werden kann.

§ 1. Darstellung elastischer Schwingungen.

Die elastischen Schwingungen eines kugelförmig begrenzten Raumes hat Clebsch eingehend studirt, und die Lösung auf die Anwendung der Kugelfunctionen und Bessel'schen Func-

[1]) Vgl. Riecke, Zur Kritik der Serienschwingungen eines Linienspectrums. Annalen der Physik, 4. Folge, Bd. 1, 1900.

tionen zurückgeführt.[1]) Seine Untersuchungen beziehen sich zunächst auf den äussern Raum der Kugel, sind aber leicht in analoger Weise für das Innere durchzuführen. Die Theorie der Bessel'schen Functionen war damals noch wenig entwickelt; deshalb ist die Bezeichnungsweise nicht übersichtlich.

Die elastischen Schwingungen des Innern einer Kugel hat Clebsch unter der Annahme gleichförmig vertheilter Druckkräfte ebenfalls eingehend behandelt, und zwar besonders die betreffenden longitudinalen Schwingungen.[2])

Bezeichnet man mit u, v, w die Verrückungen eines Punktes mit den Coordinaten x, y, z, so lassen sich nach Clebsch diese allgemeinsten Verrückungen als Summen von vier speciellen Werthsystemen darstellen, so dass

$$(1) \qquad \begin{aligned} u &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \\ v &= v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \\ w &= w_1 + w_2 + w_3 + w_4. \end{aligned}$$

Hierbei bestimmen u_1, v_1, w_1 eine sogenannte longitudinale Schwingung, indem

$$(2) \qquad u_1 = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v_1 = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad w_1 = \frac{\partial P}{\partial z},$$

wobei P der partiellen Differentialgleichung

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = b^2 \Delta P = b^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)$$

genügt. Die Grössen $u_2, v_2, w_2, \ldots$ gehören zu transversalen Schwingungen; es ist

$$(4) \qquad \begin{aligned} u_2 &= 0, & v_2 &= -\frac{\partial U}{\partial z}, & w_2 &= \frac{\partial U}{\partial y}, \\ u_3 &= \frac{\partial V}{\partial z}, & v_3 &= 0, & w_3 &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ u_4 &= -\frac{\partial W}{\partial y}, & v_4 &= \frac{\partial W}{\partial x}, & w_4 &= 0; \end{aligned}$$

[1]) Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche. Crelle's Journal, Bd. 61, 1861.

[2]) Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig 1862, p. 50 ff.

und die Functionen U, V, W sind Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi. \tag{5}$$

Die Constanten a^2 und b^2 sind die Elasticitäts-Constanten des betrachteten elastischen Mediums. Für jede transversale Schwingung ist die räumliche Dilatation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Die allgemeinste Schwingung setzt sich so aus einer longitudinalen Schwingung (2) und drei speciellen transversalen Schwingungen (4) zusammen.

§ 2. Die longitudinalen Schwingungen der Kugel.

Wir führen mittelst der Formeln

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \psi \quad && (0 < r < \varrho) \\ y &= r \sin \vartheta \sin \psi \quad && (0 < \psi < 2\pi) \\ z &= r \cos \vartheta && (0 < \vartheta < \pi) \end{aligned} \tag{7}$$

Polarcoordinaten ein und bezeichnen mit ϱ den Radius der Kugelfläche, welche das schwingende Medium begrenzt. Dann erscheint nach der von Henneberg gegebenen Darstellung, der wir hier folgen, die allgemeinste Lösung der Gleichung (3) in der Form

$$\begin{aligned} P = \sum_n \sum_m \sum_q \{ &\operatorname{cosin} nbt\, [A_{mnq} \operatorname{cosin} m\psi + A'_{mnq} \sin m\psi] \\ &+ \sin nbt\, [B_{mnq} \operatorname{cosin} m\psi + B'_{mnq} \sin m\psi] \} \\ &P_m^q(\cos\vartheta)\, R_{q+\frac{1}{2}}(nr). \end{aligned} \tag{8}$$

Hierbei bedeuten A_{mnq}, A'_{mnq}, B_{mnq}, B'_{mnq} Constante, die durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen sind; $P_m^q(\cos\vartheta)$

[1]) Ueber die elastischen Schwingungen einer isotropen Kugel ohne Einwirkung von äusseren Kräften. Annali di matematica pura ed applicata, Serie II, t. 9, 1879.

bezeichnet in bekannter Weise eine Kugelfunction, d. h. eine Lösung der Gleichung

$$(9)\qquad \frac{d^2 P_m^q}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \frac{d P_m^q}{d\vartheta} + \left[q(q+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right] P_m^q = 0;$$

und $R_{q+\frac{1}{2}}$ ist eine Bessel'sche Function,[1]) d. h. eine Lösung der Gleichung

$$(10)\qquad \frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{2}{r}\frac{d R}{d r} + \left[n^2 - \frac{q(q+1)}{r^2}\right] R = 0,$$

und zwar diejenige, welche für $r = \varrho$ nicht unendlich wird.

In der Summe (7) ist mit m ein ganzzahliger Index bebezeichnet; die Indices n und q können ebenfalls ganze Zahlen sein, können aber als Wurzeln transscendenter Gleichungen bestimmt werden.

Für uns ist der Fall von Wichtigkeit, wo die Function P nur von der Zeit t und dem Radius r abhängt. Um dies zu erreichen, haben wir $m = 0$ mal $q = 0$ zu nehmen.

$$(11)\qquad P = \sum_n [A_n \operatorname{cosin} n b t + B_n \sin n b t]\, R_{\frac{1}{2}}(n r).$$

Die Verrückung in Richtung des Radius ist gleich

$$(12)\qquad \frac{\partial P}{\partial r};$$

der auf die Kugeloberfläche ausgeübte normale Druck ist gleich

$$2a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (b^2 - 2a^2)\Delta P$$

$$(13)\qquad = 2a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (b^2 - 2a^2)\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial P}{\partial r}\right)}{\partial r}$$

$$= -\sum_n [A_n \cos nbt + B_n \sin nbt]\left[\frac{4a^2}{r^2}\frac{dR}{dr} + n^2 b^2 R\right],$$

---

[1]) Es ist $R_{q+\frac{1}{2}}$ die von Heine mit ψ_q bez. Ψ_q bezeichnete Function (bis auf einen constanten Factor).

wenn hierin r durch ϱ ersetzt wird, und wieder $n\varrho$ das Argument der Function R ist.

Besonders ausgezeichnet sind diejenigen Schwingungen, bei denen die Oberfläche der Kugel in absoluter Ruhe bleibt, d. h. bei denen die Bedingung

$$\frac{d R_{q+\frac{1}{2}}(n\varrho)}{d\varrho} = 0 \text{ oder } R'_{q+\frac{1}{2}}(n\varrho) = 0 \tag{14}$$

erfüllt ist. Ist dann ausserdem

$$n^2 \varrho^2 - q(q+1) = 0, \tag{15}$$

so verschwindet auch der auf die Oberfläche ausgeübte Druck.[1]) Die aus (14) und (15) folgende Gleichung

$$R'_{q+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{q(q+1)}\right) = 0 \tag{16}$$

stellt dann eine transscendente Gleichung für q dar; und zu jeder Wurzel derselben gehört nach (15) ein Werth von n, durch welchen nach (8) die Schwingungsdauer T_n der betreffenden Oscillation bestimmt wird:

$$T_n = \frac{2\pi}{nb}. \tag{17}$$

In Folge der Bedingungen (14) und (15) reducirt sich, da φ nicht vorkommt, die Doppelsumme (8) auf eine einfache Summe. Die hier auftretende Gleichung (16) ist bisher nicht näher untersucht worden.

In dem Falle $q = 0$ wird

$$R_{\frac{1}{2}}(n\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin n\varrho}{n\varrho}.$$

Derselbe ist von Clebsch und Henneberg a. a. O. eingehend behandelt. Die transscendente Gleichung (13) lautet dann

---

[1]) Der Druck würde auch verschwinden, wenn $R(n\varrho)$ und $R'(n\varrho)$ gleichzeitig verschwinden; dann aber würden nach (10) sämmtliche Differentialquotienten von $R(n\varrho)$ gleich Null sein; dieser Fall ist deshalb auszuschliessen.

$$(18) \qquad \operatorname{cotang} n\varrho = \frac{k^2 - n^2\varrho^2}{k^2 n\varrho}, \qquad k^2 = \frac{4b^2}{a^2}.$$

Die Wurzeln $n_0, n_1, n_2, n_3, \ldots$ liegen in folgenden Intervallen

$$0 < n_0 < n_1 < \frac{\pi}{\varrho}, \quad \frac{3\pi}{2\varrho} < n_2 < \frac{2\pi}{\varrho}, \quad \frac{5\pi}{2\varrho} < n_3 < \frac{3\pi}{\varrho}, \ldots$$

Sie nähern sich mit wachsendem Index dem ganzen Vielfachen von $\frac{\pi}{\varrho}$, und zwar um so mehr, je kleiner k^2 ist. Der Druck auf die Oberfläche ist natürlich jetzt nicht gleich Null.

§ 3. Die transversalen Schwingungen der Kugel.

Es genügt hier, von den drei Functionen U, V, W, welche durch (4) eingeführt wurden und der Gleichung (5) genügen, eine zu betrachten. Beschränken wir uns wieder auf solche Schwingungen, die nur von r, nicht von ϑ und ψ abhängen, so wird, wie in (11):

$$(19) \qquad U = \sum_n \left[C_n \operatorname{cosin} nat + D_n \sin nat\right] R_{\frac{1}{2}}(nr),$$

wenn mit R wieder ein Integral der Gleichung (10) bezeichnet wird. Die entsprechenden Verrückungen berechnen sich darnach gemäss den Gleichungen (4); sie bestehen in kleinen Oscillationen nur die ruhende x-Axe; jede zum Mittelpunkte concentrische Kugelschale bewegt sich nur in sich.

Der Normaldruck auf die Oberfläche der Kugel ist gleich Null. Innerhalb der Oberfläche selbst aber treten in Folge der Schwingung Druckkräfte auf, welche durch die beiden zu einander rechtwinkligen Componenten

$$(20) \qquad -a^2 \sin\vartheta \sin\psi \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \quad -a^2 \cos\vartheta \cos\psi \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$$

für $r = \varrho$ gemessen werden (vgl. Henneberg a. a. O.).

Sollen diese Druckkräfte insbesondere verschwinden, so muss $R''(n\varrho) = 0$ sein, d. h. nach (10): es muss die Gleichung

$$(21) \qquad 2n\varrho R'(n\varrho) + [n^2\varrho^2 - q(q+1)]\, R(n\varrho) = 0$$

erfüllt sein. Besonders ausgezeichnet ist der Fall, wo wieder die Begingungen (14) und (15) gleichzeitig erfüllt sind, und wo in Folge dessen auch die Gleichung (21) Gültigkeit hat. Dann bleibt jeder Punkt der Oberfläche in absoluter Ruhe. Die Schwingung im Innern der Kugel ist dann aber, da q von Null verschieden ist, auch von ϑ abhängig.

Besonders einfach ist der Fall $q = 0$; dann wird

$$R_{\frac{1}{2}}(nr) = \frac{\sin nr}{nr}. \tag{22}$$

Soll jetzt der Druck gleich Null sein, so ergibt sich die Gleichung (vgl. Henneberg a. a. O.)

$$\operatorname{cotang} n\varrho = \frac{2 - n^2\varrho^2}{2n\varrho}. \tag{23}$$

Soll aber die Oberfläche in Ruhe bleiben, so muss

$$\operatorname{tang} n\varrho = n\varrho \tag{23a}$$

werden; also wieder zwei transscendente Gleichungen für n. Die Wurzeln $n_0, n_1, n_2, \ldots$ nähern sich bezw. den geraden und ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2\varrho}$.

§ 4. Wirkung einer schwingenden Kugel auf den Lichtäther.

Wegen der in der Elasticitäts-Theorie des Lichtes vorausgesetzten Incompressibilität des Aethers können am Lichtäther nur transversale Wellen existiren. Die allgemeinste Schwingung desselben ist daher nach (1) und (4) durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{z}{r}\frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{y}{r}\frac{\partial W_1}{\partial r}, \\
v &= \frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial z} = \frac{x}{r}\frac{\partial W_1}{\partial r} - \frac{z}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r}, \\
w &= \frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{y}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{x}{r}\frac{\partial V_1}{\partial r}
\end{aligned} \tag{24}$$

dargestellt, wo U_1, V_1 W_1 der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a_1^2 \Delta \varphi \tag{25}$$

genügen. Sollen sich die Schwingungen der Kugel nach aussen in den Lichtäther fortsetzen, so haben wir den letztern als einen Raum zu behandeln, der im Endlichen durch die Kugelfläche $r = \varrho$ begrenzt wird. Die Functionen U_1, V_1, W_1 werden daher genau wie vorhin bestimmt; nur die Constanten sind andere. Es ist z. B.

$$U_1 = \sum_m \sum_n \sum_q \{\operatorname{cosin} n_1 a_1 t\,[E_{mnq} \cos m\psi + E'_{mnq} \sin m\psi] + \sin n_1 a_1 t\,[F_{mnq} \cos m\psi + F'_{mnq} \sin m\psi]\} R^{(1)}_{q+\frac{1}{2}}(n_1 r)\, P^q_m(\cos\vartheta).$$

Die Function $R^{(1)}_{q+\frac{1}{2}}$ ist hierbei als Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 R^{(1)}}{d r^2} + \frac{2}{r}\frac{d R^{(1)}}{d r} + \left[n_1^2 - \frac{q(q+1)}{2}\right] R = 0 \tag{26}$$

definirt; und zwar ist dasjenige partikuläre Integral zu wählen, welches den von innen nach aussen sich ausbreitenden Wellen entspricht, nicht dasjenige, welches unendlich ferne Erregungs-Centren voraussetzen würde.

Soll auch hier völlige Symmetrie herrschen, d. h. U_1 nur von r abhängen, so muss wieder $q = 0$ und $m = 0$ genommen werden; und wir erhalten

$$U_1 = \sum [E_n \operatorname{cosin}(n_1 a_1 t) + F_n \sin(n_1 a_1 t)]\, R^{(1)}_{\frac{1}{2}}(n r), \tag{27}$$

wo

$$R^{(1)}_{\frac{1}{2}}(n\varrho) = \frac{A \sin n_1 \varrho + B \operatorname{cosin} n_1 \varrho}{n_1 \varrho}.$$

Nun ist

$$2 \sin n_1 r \operatorname{cosin} n_1 a_1 t = \sin n_1 (r + a_1 t) + \sin n_1 (r - a_1 t),$$
$$2 \sin n_1 r \sin n_1 a_1 t = \operatorname{cosin} n_1 (r - a_1 t) - \operatorname{cosin} n_1 (r + a_1 t),$$
$$2 \operatorname{cosin} n_1 r \operatorname{cosin} n_1 a_1 t = \operatorname{cosin} n_1 (r - a_1 t) + \operatorname{cosin} n_1 (r + a_1 t),$$
$$2 \operatorname{cosin} n_1 r \sin n_1 a_1 t = \sin n_1 (r + a_1 t) - \sin n_1 (r - a_1 t).$$

Um obiger Forderung zu genügen, sind die Constanten A und B so zu bestimmen,[1]) dass alle Glieder, welche $(r + a_1 t)$ im Argumente enthalten, fortfallen. Es wird demnach

$$(27\text{a})\quad U_1 = \sum_{n_1} \frac{1}{r}\left[G_n \operatorname{cosin} n_1 (r - a_1 t) + H_n \sin n_1 (r - a_1 t)\right].$$

Entsprechende Formeln mit anderen Constanten G_n, H_n gelten für die Functionen V_1 und W_1.

Für die Art und Weise, wie sich die Schwingungen der Kugel in den Lichtäther übertragen, sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall. Die Schwingung im Innern der Kugel ist transversal. Um die Amplituden der inneren und der äusseren Schwingung in Uebereinstimmung zu bringen, genügt es, die Gleichungen

$$(28)\qquad \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U_1}{\partial r},\quad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V_1}{\partial r},\quad \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W_1}{\partial r}$$

für $r = \varrho$ zu befriedigen. Beschränken wir uns wieder auf U und U_1, so ergibt sich

$$(29)\qquad \begin{aligned} n\, C_n\, R'_{\frac{1}{2}}(n\varrho) &= n_1 G_n\, S'_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho) + n_1 H_n\, R'_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho),\\ n\, D_n\, R'_{\frac{1}{2}}(n\varrho) &= n_1 G_n\, R'_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho) - n_1 H_n\, S'_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho), \end{aligned}$$

wo nun

$$(29)\qquad R_{\frac{1}{2}}(n\varrho) = \frac{\sin n\varrho}{n\varrho},\quad S_{\frac{1}{2}}(n\varrho) = \frac{\operatorname{cosin} n\varrho}{n\varrho}.$$

Damit die Schwingungsdauern übereinstimmen, muss ferner

$$(30)\qquad n a = n_1 a_1$$

genommen werden. Hierbei ist zu beachten, dass die Functionen $R_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho)$ und $R_{\frac{1}{2}}(n\varrho)$ sich nur durch das Argument von einander unterscheiden; denn die Differentialgleichung (10) wird unabhängig von n, wenn man nr an Stelle von r als unabhängige Variable einführt.

---

[1]) Vgl. darüber die Bemerkungen von Clebsch in § 6 der citirten Abhandlung aus Bd. 61 von Crelle's Journal.

Sollen auch die Druckkräfte sich an der Kugeloberfläche das Gleichgewicht halten, so muss nach (20) ausserdem

$$a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} = 0$$

für $r = \varrho$ sein. Oder

$$(31) \quad \begin{aligned} a^2 n^2 C_n R''_{\frac{1}{2}}(n\varrho) &= a_1^2 n_1^2 G_n S''_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho) + a_1^2 n_1^2 H_n R''_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho), \\ a^2 n^2 D_n R'_{\frac{1}{2}}(n\varrho) &= a_1^2 n_1^2 G_n R''_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho) - a_1^2 n_1^2 H_n S''_{\frac{1}{2}}(n_1\varrho). \end{aligned}$$

Wegen der Relation (30) fallen die Factoren $a^2 n^2$ und $a_1^2 n_1^2$ heraus. Die Elimination der Coëfficienten C_n, D_n, G_n, H_n führt, wenn wir zur Abkürzung den Index $\frac{1}{2}$ fortlassen, zu der Relation

$$(32) \quad \begin{vmatrix} a_1 R'(n\varrho) & 0 & a S'(n_1\varrho) & a R'(n_1\varrho) \\ 0 & a_1 R'(n\varrho) & a R'(n_1\varrho) & -a S'(n_1\varrho) \\ R''(n\varrho) & 0 & S''(n_1\varrho) & R''(n_1\varrho) \\ 0 & R''(n\varrho) & R''(n_1\varrho) & -S''(n_1\varrho) \end{vmatrix} = 0.$$

Diese transscendente Gleichung bestimmt diejenigen Zahlen n $\left(\text{bezw. } n_1 = n \frac{a}{a_1}\right)$, für welche die Gleichungen (29) und (31) mit einander verträglich sind, und somit die Schwingungsdauern bezw. Wellenlängen der möglichen Oscillationen.

Die Auswerthung der Determinante führt zu der Gleichung

$$\begin{aligned} &[a_1 R'(n\varrho) S''(n_1\varrho) - a R''(n\varrho) S'(n_1\varrho)]^2 \\ &+ [a_1 R'(n\varrho) R''(n_1\varrho) - a R''(n\varrho) R'(n_1\varrho)]^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Bedingung (32) zerfällt daher in die beiden linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 R'(n\varrho) S''(n_1\varrho) - a R''(n\varrho) S'(n_1\varrho) + i a_1 R'(n\varrho) R''(n_1\varrho) \\ - i a R''(n\varrho) R'(n_1\varrho) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 R'(n\varrho) S''(n_1\varrho) - a R''(n\varrho) S'(n_1\varrho) - i a_1 R'(n\varrho) R''(n_1\varrho) \\ + i a R''(n\varrho) R'(n_1\varrho) = 0; \end{aligned}$$

und diese lassen sich in der folgenden Form schreiben

$$(33)\qquad \frac{a\;R''(n\varrho)}{a_1\,R'(n\varrho)} = \frac{S''(n_1\varrho) \pm i\,R''(n_1\varrho)}{S'(n_1\varrho) \pm i\,R'(n_1\varrho)}.$$

Hierin ist $i = \sqrt{-1}$ zu nehmen, ferner nach (10):

$$R''(n\varrho) = -\frac{2}{n\varrho}\,R'(n\varrho) - R(n\varrho),$$

$$R''(n_1\varrho) = -\frac{2}{n_1\varrho}\,R'(n_1\varrho) - R(n_1\varrho),$$

$$S''(n_1\varrho) = -\frac{2}{n_1\varrho}\,S'(n_1\varrho) - S(n_1\varrho).$$

Setzt man rechts die Werthe (29) ein und formt sodann die Relation (33) um, so ergibt sich, je nachdem man das obere oder untere Vorzeichen wählt, an Stelle von (32) zur Bestimmung von n_1 eine der beiden folgenden Bedingungsgleichungen

$$(34)\qquad \frac{a}{a_1}\left(\frac{2}{n\varrho} + \frac{n\varrho}{n\varrho\cdot\operatorname{cotg} n\varrho - 1}\right) = \frac{2}{n_1\varrho} + \frac{n_1\varrho}{\pm i\,n_1\varrho - 1}.$$

Die Wurzeln der einen dieser beiden Gleichungen sind conjugirt imaginär zu denen der andern; um reelle Resultate zu erhalten, müssen immer zwei conjugirte Werthe gleichzeitig benutzt werden. Setzen wir $n_1 = \mu_1 + i\nu_1$, $n = \mu + i\nu$, so wird die Schwingungsdauer:

$$(34\text{a})\qquad T = \frac{2\pi}{\mu_1 a_1} = \frac{2\pi}{\mu a}.$$

Der imaginäre Theil ν_1 bedingt das Hinzutreten von Exponentialfactoren $e^{\pm\nu(r - a_1 t)}$. Indem man in (27a) auch den Constanten G_n und H_n complexe Werthe beilegt, kann man erreichen, dass nur Exponentialfactoren mit negativen Exponenten vorkommen. Ihr Auftreten zeigt an, dass für negative Werthe von $(r - a_1 t)$ die Schwingung mit wachsender Zeit allmählig verlöscht; für positive Werthe von $(r - a_1 t)$

kommen die Formeln nicht in Betracht, da sich die Lichtschwingung zur Zeit t noch nicht über die Stelle $r - a_1 t = 0$ hinaus fortgesetzt hat.

Für grosse Werthe von n_1, d. h. für kleine Schwingungsdauern und Wellenlängen (wie sie beim Lichte auftreten), reducirt sich die Gleichung (34) auf

$$\operatorname{tang}(n\varrho) = \mp i \frac{a_1}{a}.$$

Eine Wurzel ist rein imaginär; bezeichnen wir sie mit $\pm \beta i$, so wird

$$n\varrho = \pm \beta i + g\pi, \tag{34b}$$

wo g eine ganze Zahl bezeichnet. Der reelle Theil der Wurzeln von (34) nähert sich also mit wachsender Grösse den ganzen Vielfachen von π, der imaginäre Theil einer gewissen endlichen Grenze.

Zweiter Fall. Die Schwingungen im Innern der Kugel sind longitudinal.

Da diese Schwingung ausserhalb der Kugel sich als transversale fortsetzen soll, und bei letzterer eine Verrückung in Richtung des Radius nicht eintritt, so muss für $r = \varrho$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \tag{35}$$

sein; da ferner die transversale Schwingung auch keinen Druck in Richtung des Radius ausübt, so muss auch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = 0 \text{ für } r = \varrho \tag{36}$$

bestehen. Die innerhalb der Kugeloberfläche erzeugten Druckkräfte werden durch die Ausdrücke

$$2a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \varphi} \text{ und } 2a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial \vartheta} \tag{37}$$

gemessen. Wird P in der Form (8) angenommen, so werden sie in Folge der Bedingung (35), die sich auf (14) reducirt, von selbst gleich Null,

Wenn die Gleichungen (14) und (15) zugleich bestehen, ist die Bedingung (36) ebenfalls erfüllt.

Die longitudinale Schwingung des Kugelinnern ist in diesem Falle auch von φ und ψ abhängig.

Innerhalb der Kugeloberfläche selbst existiren weder Verrückungen noch Druckkräfte; der Lichtäther bleibt also bei dieser Art von Schwingungen in Ruhe.

Dritter Fall. Das Innere der Kugel bleibt in Ruhe.

Ebenso kann umgekehrt der Lichtäther oscilliren, das Innere der Kugel aber ruhen. Wir haben die Gleichungen (14) und (15) als erfüllt vorauszusetzen, so dass an der Kugeloberfläche Amplituden und Druckkräfte gleichzeitig verschwinden.

Es ist nur jetzt für die Lichtäther-Schwingung die Function $R_{q+\frac{1}{2}}$ unter den Integralen der Gleichung (10) in der Weise auszuwählen, wie es für den Fall $q = 0$ in § 3 näher erörtert wurde.

§ 5. Anwendung auf die Schwingungen eines Atoms.

Jedes Element ist durch sein Spectrum, d. h. durch eine gewisse Anzahl ihm eigenthümlicher Wellenlängen bezw. Schwingungsdauern charakterisirt. Man pflegt sie als Eigenschwingungen des Elementes zu bezeichnen, ohne doch genau definiren zu können, wie diese sogenannten Eigenschwingungen zu Stande kommen.

Bei der elastischen Lichttheorie ergeben sich bekanntlich Schwierigkeiten, wenn man die Grenzbedingungen, d. h. das Verhalten an der Grenzfläche zweier verschiedener Medien charakterisiren soll. Die Forderung gleicher Amplituden und gleicher Druckkräfte führt zu Bedingungsgleichungen, die im Allgemeinen nicht mit einander verträglich sind.[1]) Diese Unverträglichkeit ist aber nur vorhanden, wenn man die Tren-

---

[1]) Vgl. Kirchhoff, Ueber die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze krystallinischer Mittel; Gesammelte Abhandlungen, p. 352 ff.; sowie Volkmann, Vorlesungen über die Theorie des Lichtes. Leipzig 1891, p. 285 ff.

nungsfläche, wie es gewöhnlich geschieht, als eben annimmt, und wenn man von den durch die Verschiedenheit der Wellenlängen bedingten Unterschieden absieht. Denn die vorstehenden Untersuchungen haben gezeigt, dass bei kugelförmiger Grenzfläche für gewisse Wellenlängen, die durch transscendente Gleichungen bestimmt werden, die Grenzbedingungen der elastischen Lichttheorie vollkommen erfüllt werden können.

Es liegt nahe, dieses Resultat an der Hand der Erfahrung zu prüfen; und da bieten die Spectren der einatomigen Gase ein überreiches Material.

Im gasförmigen Zustande sind die Atome verhältnissmässig weit von einander entfernt, so dass es erlaubt sein wird, ein einzelnes Atom für sich zu betrachten und mit unserer schwingenden Kugel vom Radius ϱ zu identificiren. Bei den heftigen Bewegungen, welche im Gase stattfinden, wird jedes Atom in schneller Folge von allen Seiten durch andere Atome getroffen; diese Stosskräfte werden elastische Schwingungen im Innern des Atoms hervorrufen, die sich dem Lichtäther mittheilen und die Linien des Spectrums erzeugen. Eine so erzeugte Schwingung wird von allen drei Veränderlichen r, φ, ψ abhängen; da wir aber nicht ein einzelnes Atom beobachten, sondern nur den durchschnittlichen Zustand einer sehr grossen Anzahl von Atomen, und da durchschnittlich bei den Bewegungen der Atome keine Richtung ausgezeichnet ist, vielmehr jedes in jeder Richtung von anderen getroffen wird, so können wir annehmen, dass durchschnittlich volle Symmetrie nach allen Richtungen herrsche, so dass die Grössen u, v, w nur vom Radius abhängen, und somit die obigen Betrachtungen Anwendung finden.

Die Linien des Spectrums zerfallen demnach in verschiedene Gruppen, deren jede durch eine Gleichung mit unendlich vielen Wurzeln charakterisirt ist. Die Intensität jeder Schwingung ist durch den zugehörigen Coëfficienten C_n, D_n, etc. der unendlichen Reihe bedingt. Die Convergenz der Reihe verlangt, dass diese Coëfficienten mit wachsendem n (d. h. mit

abnehmender Wellenlänge) unbegrenzt abnehmen; es ist daher natürlich, dass nur eine beschränkte Zahl von Spectrallinien beobachtet werden kann.

Jede Linie sollte eigentlich unendlich schmal und somit nicht sichtbar sein. Wenn die Linien thatsächlich doch beobachtet werden können, so hat dies seinen Grund darin, dass die gemachten Voraussetzungen immer nur annähernd erfüllt sind. Je weniger Spielraum das einzelne Atom hat, um so mehr verbreitern sich die Linien, bis sie sich zu Banden zusammenschliessen.

Erste Gruppe. Sie ist charakterisirt durch die Gleichung (34). Im Aether und im Innern der Kugel finden die Schwingungen transversal statt. Die entsprechenden Verrückungen sind durch die Gleichungen (24) dargestellt; sie bestehen in kleinen Rotationen um einen Durchmesser der Kugel, dessen Lage von den Werthen der Functionen U_1, V_1, W_1 abhängt. Diese Axe wird in schneller Folge alle möglichen Lagen in der Kugel annehmen, wodurch dann die Symmetrie hergestellt wird. Die einer Wurzel n der Gleichung (34) entsprechende Schwingungsdauer ist durch die Gleichung (34 a) dargestellt.

Zweite Gruppe. Es bestehen die Gleichungen (14) und (15). Der Lichtäther bleibt in Ruhe; die Schwingung in der Kugel ist longitudinal.

Da die Beobachtung immer ausserhalb der Kugel stattfindet, wird eine entsprechende Linie im Spectrum des Atoms nicht auftreten. Wenn wir uns aber vorstellen, dass durch die heftigen Bewegungen der Atome im glühenden Gase das Gleichgewicht der umgebenden Aetherhülle gestört ist, und dass hier Oscillationen von den verschiedensten Wellenlängen hervorgerufen werden könnten, so werden diejenigen Schwingungen, welche dieser Gruppe angehören, durch die entsprechenden Oscillationen im Innern der Kugel ausgelöscht werden. Die Linien dieser Gruppe werden daher, wenn sie überhaupt beobachtet werden, nur als dunkle Linien auf hellerem Grunde erscheinen.

Dritte Gruppe. Das Innere der Kugel ruht, der Lichtäther oscillirt, und zwar entsprechend den Gleichungen (14) und (15). Durch die in Folge der Bewegungen der Atome entstehenden Störungen des Gleichgewichtes (wie sie soeben bei der zweiten Gruppe angenommen wurden) im Lichtäther werden Oscillationen der verschiedensten Art entstehen können; aber von der Kugel aus radial verlaufend können nur solche hervorgehen, deren Wellenlänge durch die angegebenen Bedingungsgleichungen bestimmt sind. Andere Wellen mit anderer Schwingungsdauer werden sich tangential von der Kugel aus verbreiten.

Die Verrückungen u, v, w werden vom Winkel ϑ abhängig, wodurch scheinbar die Symmetrie gestört wird. Bedenkt man aber, dass wir oben nur eine der drei Functionen U_1, V_1, W_1 betrachteten, so erhellt, dass durch gleichzeitige Berücksichtigung der drei Functionen die Symmetrie nach allen Richtungen wieder herzustellen ist. Die transversale Schwingung besteht in Oscillationen um einen Durchmesser der Kugel als Axe, der seine Richtung schnell verändert.

Das Auftreten dieser Art von Strahlen kann vielleicht dazu dienen, die Erscheinung der Fluorescenz verständlich zu machen.

Vierte Gruppe. Im Innern der Kugel finden transversale Schwingungen statt; der Lichtäther bleibt in Ruhe. Es bestehen wieder die Gleichungen (14) und (15), wenn für $R_{q+\frac{1}{2}}$ diejenige specielle Lösung der Gleichung (10) gewählt wird, welche für $r = 0$ endlich bleibt. Die entsprechenden Linien des Spectrums sind stets dunkel, wenn sie überhaupt erscheinen.

Fünfte Gruppe. Es erscheint nicht nothwendig, an der Forderung, dass die Druckkräfte an der Oberfläche des Atoms übereinstimmen, absolut festzuhalten. Bestehen Differenzen der Druckkräfte, so wird das Atom in Folge derselben eine fortschreitende oder rotirende Bewegung annehmen. Da nun beim glühenden Gase die Atome schon bewegt sind, liegt kein Grund vor, diese Annahme auszuschliessen. Hält man

an der Symmetrie und an der Ruhe der äusseren Oberfläche fest, so werden die transversalen Schwingungen dieser Art durch die Gleichung (23a) bestimmt.

Sechste Gruppe. In gleichem Sinne sind im Innern der Kugel die durch (18) definirten Oscillationen zu berücksichtigen. Da der Druck an der Oberfläche nicht Null ist, werden sich diese longitudinalen Schwingungen mit gleicher Schwingungsdauer als transversale Wellen in den Lichtäther fortsetzen.

Regelmässig werden die Linien der ersten und dritten Gruppe im Spectrum erscheinen, vielleicht auch die der fünften und sechsten Gruppe.

Jedenfalls aber besteht das Spectrum eines einatomigen Gases aus einer Reihe verschiedener Einzel-Spectra, die sich über einander lagern, und deren jedes durch eine besondere transscendente Gleichung bestimmt wird; es ist natürlich, dass dabei an einzelnen Stellen des Spectrums starke Verdichtungen auftreten. Unter verschiedenen Umständen können verschiedene Gruppen erscheinen; und das ist mit den Beobachtungen (besonders deutlich beim Wasserstoff) in Uebereinstimmung.

Da über die Grösse des Radius ϱ keine Voraussetzung gemacht wurde, so kann das, was hier über sehr kleine leuchtende Kugeln gesagt wurde, ebenso auf erheblich grössere Kugeln, z. B. auf leuchtende Himmelskörper angewandt werden. Jedem kugelförmigen Himmelskörper käme hiernach ein ihm eigenthümliches Spectrum zu, das nur abhängt von seiner Grösse und von den Elasticitäts-Constanten seines Innern. Ein solcher Körper ist allerdings nicht continuirlich mit Masse erfüllt, vielmehr vom Lichtäther durchdrungen, nicht scharf gegen diesen Aether begrenzt; aber in sehr grosser Entfernung wird man ihn doch wie unser Atom behandeln dürfen, so dass sein Spectrum theils durch die Einzelspectra der in seiner Atmosphäre glühenden Elemente, theils durch die ihm als oscillirender Kugel zukommenden Linien gebildet wird.

§ 6. Beziehungen zwischen den Spectren verschiedener Atome.

Hiernach ist das Spectrum eines einatomigen Gases im Allgemeinen von so complicirtem Bau, dass es kaum möglich erscheint, die einzelnen Gruppen von Linien von einander zu trennen und mit den Wurzeln der zugehörigen Gleichungen rechnerisch in Beziehung zu setzen; die Aufgabe ist überdies dadurch erschwert, dass die Constanten, von denen jene Gleichungen abhängen (ϱ, b, a_1) nicht bekannt sind.

Wenngleich ich daher die dargelegte Auffassung der Linien-Spectra (allerdings damals nur für die fünfte und sechste Gruppe) schon vor etwa 10 Jahren in Königsberg i. Pr. einem engeren Kreise vorgetragen habe, konnte ich die Untersuchung wegen dieser Schwierigkeiten nicht weiter führen. Erst vor etwa zwei Jahren bemerkte ich, dass in folgender Weise eine indirecte Prüfung der Theorie möglich ist.

Nimmt man zwei verschiedene einatomige Gase, so unterscheiden sich die betr. transscendenten Gleichungen nur durch die Constanten a, b und ϱ von einander, und in manchen Gruppen in sehr einfacher Weise.

So lautet z. B. die Gleichung für die sechste Gruppe

$$\text{cotang}\, n\,\varrho = \frac{k^2 - n^2\,\varrho^2}{k^2\,n\,\varrho}$$

und die entsprechende Gleichung für ein zweites Atom

$$\text{cotang}\, n'\varrho' = \frac{k'^2 - n'^2\varrho'^2}{k'^2 n'\varrho'}.$$

Nimmt man nun an, dass für beide Atome k und k' wenig von einander verschieden seien, so stehen die Wurzeln beider Gleichungen nahezu im umgekehrten Verhältnisse der Radien

$$\frac{n}{n'} = \frac{\varrho'}{\varrho}, \tag{38}$$

und die Schwingungsdauern verhalten sich direct wie die Radien; es ist nemlich, wenn b von b' wenig verschieden ist, nach (17) annähernd

$$\frac{T_n}{T_{n'}} = \frac{n'}{n} = \frac{\varrho}{\varrho'}. \tag{39}$$

Für die Gleichung (23) ist diese Relation bei zwei verschiedenen Atomen genau erfüllt. Wenn k aber nur annähernd gleich k' ist, so besteht die Relation (38) auch nur näherungsweise richtig.

Aehnlich ist es bei der Gleichung (34). Sind hier für zwei verschiedene Atome die Constanten a und a' einander gleich, so ist nach (30)

$$n a = n_1 a_1, \qquad n' a' = n_1' a_1',$$

also für $a = a'$:

$$\frac{n}{n_1} = \frac{n'}{n_1'}.$$

Nun kann die Gleichung (34) in der Form

$$a f(n \varrho) = a_1 F\left(\frac{a}{a_1} n \varrho\right)$$

geschrieben werden; ebenso ist für das zweite Atom

$$a' f(n' \varrho') = a_1 F\left(\frac{a'}{a_1} n' \varrho'\right);$$

oder folgt für $a = a'$ wieder

$$\frac{n}{n'} = \frac{\varrho'}{\varrho}.$$

Und wenn nur annähernd $a = a'$ ist, so ist diese Beziehung (38) näherungsweise erfüllt.

Die Radien der Atome sind nicht bekannt, wohl aber ihre Atomgewichte, die mit G und G' bezeichnet seien. Bedeutet ferner δ bezw. δ' die Dichte im Innern des Atoms, so ist

$$G = \tfrac{4}{3} g \, \delta \, \varrho^3 \, \pi,$$
$$G' = \tfrac{4}{3} g \, \delta' \varrho'^3 \pi,$$

wo g die Beschleunigung der Schwere bezeichnet; hieraus erhalten wir

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \sqrt[3]{\frac{G\delta'}{G'\delta}}. \tag{40}$$

Wenn also auch δ' von δ wenig verschieden ist, so besteht näherungsweise die Relation

$$\frac{n}{n'} = \sqrt[3]{\frac{G'}{G}}, \quad \frac{T}{T'} = \sqrt[3]{\frac{G}{G'}}, \tag{41}$$

d. h. die Wellenlängen der Spectra von zwei verschiedenen einatomigen Gasen verhalten (unter den gemachten Voraussetzungen) sich angenähert, wie die Cubikwurzeln aus den Atomgewichten.

Zu der Annahme, dass die inneren Constanten a, b, δ eines Atoms bei verschiedenen Elementen denselben Werth haben, dass sich also diese Atome nur durch die Grösse (d. i. durch den Werth von ϱ) unterscheiden, kann man durch Vorstellungen über die Einheit der Materie geführt werden. Dadurch wurde ich zu dem Versuche veranlasst, ob nicht die Relation (40) wirklich bei verschiedenen Elementen erfüllt ist; ich habe für eine Reihe von Beispielen gemäss der Formel (40) aus den beobachteten Spectrallinien eines Elementes die entsprechenden eines andern Elementes berechnet, und die Resultate mit den Beobachtungen an diesem andern Elemente verglichen.

Es zeigte sich, dass die Gleichung (40) in vielen Fällen näherungsweise erfüllt ist, dass also in der That die Grössen a, b, δ von den Grössen a', b', δ' sich wenig unterscheiden.

In anderen Fällen ist die allgemeinere Gleichung

$$\frac{T}{T'} = A\sqrt[3]{\frac{G}{G'}} \tag{42}$$

zur Anwendung zu bringen, wo A eine Constante bedeutet, die nach (40) näherungsweise

$$= \sqrt[3]{\frac{\delta'}{\delta}}$$

zu setzen wäre.

Im Falle der Gleichung (34), also bei der ersten der in § 5 unterschiedenen Gruppen, wird man auch näherungsweise

$$(43) \qquad \frac{T}{T'} = B \sqrt[3]{\frac{G}{G'}}$$

nehmen dürfen, wenn a von a' wenig verschieden ist; dabei hat man näherungsweise

$$B = A \cdot \frac{a}{a'}.$$

Wenn es nicht anders bemerkt ist, sind alle in den folgenden Tabellen benutzten Beobachtungen den Abhandlungen von Kayser und Runge entnommen.[1]) Ein besonderes Interesse bietet die Einordnung der Spectrallinien in gewisse Serien, wie sie Balmer beim Wasserstoff, Rydberg und die beiden genannten Autoren bei anderen Elementen vornahmen. Auf diese Serien ist deshalb bei den folgenden Rechnungen besonders Rücksicht genommen (vgl. unten § 14).

An einigen Stellen sind den berechneten Linien beobachtete gegenübergestellt, die sich weiter als wahrscheinlich zulässig ist, von dem Ergebnisse der Rechnung entfernen; ich habe sie aufgeführt, um darauf hinzuweisen, wo die nächste beobachtete Linie liegt.

§ 7. Magnesium und Calcium.

Im Spectrum des Magnesiums unterscheiden Kayser und Runge zwei Serien, die sie wegen ihrer Eigenschaften Neben-Serien nennen; diese Eigenschaften sind nämlich analog denjenigen der bei den Alkalien auftretenden Neben-Serien, welche dort einer Haupt-Serie an die Seite treten, während eine solche Haupt-Serie beim Magnesium nicht auftritt. Jede Neben-Serie besteht aus drei Triplets von Linien, die wenig von einander verschieden sind.

---

[1]) Kayser und Runge: In den Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften und zwar: I. Eisen, 1888; II. Kohle, 1889; III. Alkalien, 1890; IV. Elemente der zweiten Mendelejeff'schen Gruppe, 1891; V. Kupfer, Silber und Gold, 1892; VI. Aluminium, Indium, Thallium, 1892.

Die betreffende Wellenlänge λ wird in Angström'schen Einheiten durch folgende Formeln gegeben:

1. Neben-Serie: $\lambda^{-1} \cdot 10^8 = 39796{,}10 - 130398\,n^{-2} - 1432090\,n^{-4}$,

$$\lambda^{-1} \cdot 10^8 = 39836{,}79 - 130398\,n^{-2} - 1432090\,n^{-4},$$

$$\lambda^{-1} \cdot 10^8 = 39857{,}00 - 130398\,n^{-2} - 1432090\,n^{-4}.$$

Die Linien der Serie ergeben sich, wenn man in diesen Formeln $n = 4, 5, \ldots$ vor 9, 10 einsetzt. Sei nun λ' die zugehörige Wellenlänge im Calcium-Spectrum, so ist nach unserer Methode näherungsweise (vgl. § 6):

$$\lambda' = \lambda \sqrt[3]{\frac{Ca}{Mg}},$$

wo Ca das Atomgewicht des Calciums (40,1) und Mg dasjenige des Magnesiums bedeutet (24,3). Nach dieser Formel sind die Wellenlängen des Calciums aus denjenigen des Magnesiums berechnet und in folgender Tabelle mit den Beobachtungen verglichen.

Magnesium		Calcium			
Neben-Serie I n	λ beobachtet	λ' berechnet	beobachtet	Neben-Serie I n	Differenz
4	3838,44	4536,0	4535,60 [1]		+ 0,40
	3832,46	4528,9	4527,17		+ 1,73
	3829,51	4525,4	4512,73		12,67
5	3097,06	3659,9	3653,62	—	+ 5,28
	3093,14	3655,2	3644,45	5	+ 9,75
	3091,18	3652,9	3630,82	5	+ 22,08
	—	—	3624,15	5	—
6	2852,22	3370,5	3361,92	6	+ 8,08
	2848,53	3366,2	3350,22	6	+ 15,98
	2846,91	3364,3	3344,49	6	+ 19,81
7	2736,84	3233,8	3225,74	7	+ 8,06
	2733,80	3230,6	3215,15	7	+ 15,45
	2732,35	3228,9	3209,68	7	+ 19,22
8	2672,90	3158,6	3166,95	—	— 8,35
	2669,84	3155,7	3158,98	—	— 3,28
	2668,26	3153,1	3150,85	8	+ 2,25
	—	—	3140,91	8	—
	—	—	3136,09	8	—
9	2633,13	3111,9	3107,96	—	+ 3,94
	2630,52	3108,5	3101,87	9	+ 6,63
	—	—	—	9	—
	—	—	—	9	—

[1] Im Funkenspectrum des Calcium, vgl. Rep. of Brit. Ass. 1884, p. 372.

Die hier fehlende Linie des dritten Triplets für $n = 9$ ist beim Magnesium nicht beobachtet worden; auch beim Calcium findet sich keine entsprechende.

Dem Werthe $n = 4$ in der Calcium-Serie entsprechen die drei Linien

$$4456{,}08;\quad 4435{,}86;\quad 4425{,}16.$$

Die aus diesen nach obiger Formel zu berechnenden Magnesium-Linien sind nicht beobachtet worden.

Die Tabelle lässt erkennen, dass bei den Triplets für $n = 5$, $n = 6$ und $n = 7$ entsprechende Linien von Magnesium und Calcium erhalten werden; bei $n = 7$, $n = 8$, $n = 9$ tritt eine kleine Verschiebung der von Kayser und Runge aufgestellten Calcium-Serie gegen die zugehörige Magnesium-Serie ein. Jedenfalls könnte man auch die hier berechneten Calcium-Linien durch eine Serien-Formel annähernd darstellen; man hätte zu dem Zwecke nur die Constanten der ersten Neben-Serie des Magnesiums mit $\sqrt[3]{\frac{Mg}{Ca}}$ zu multipliciren.

Magnesium $Mg = 24{,}3$		Calcium $Ca = 40{,}1$			
Neben-Serie II n	λ beobachtet	λ' berechnet	beobachtet	Neben-Serie II n	Differenz
	—	—	6162,46	3	—
3	5183,84	6125,9	6122,46	3	+ 3,44
	5172,87	6112,9	6116,00 [1]	—	— 3,10
	5167,55	6106,9	6102,99	3	+ 3,91
4	3336,83	3943,1	3949,09	4	— 5,99
	3332,28	3937,8	—	—	—
	3330,08	3935,2	3933,83	—	+ 1,37
5	2942,21	3476,9	3487,76	5	— 10,86
	2938,68	3472,7	3474,98	5	— 2,28
	2936,99	3470,6	3468,68	5	+ 1,32
6	2781,53	3287,0	3286,26	6	+ 0,74
	2778,36	3285,2	3274,88	6	+ 10,32
	2776,80	3228,2	3269,31	6	+ 12,89
7	2698,44	3188,8	3181,40	7	+ 7,40
	2695,53	3185,4	3179,45	—	+ 6,95
	2693,97	3183,5	3170,23	7	+ 13,27
8	2649,30	3130,7	3140,91	—	— 10.21
	2646,61	3127,6	3136,09	—	— 8,49
	2645,22	3125,9	3117,74	8	+ 8,16

[1] Vgl. Reports of the British Association, a. a. O.

Auch hier entsprechen sich die beiden Serien im Grossen und Ganzen; bei $n = 3$ fehlt die Linie des ersten, bei $n = 4$ die des ersten und zweiten Triplets, bei $n = 7$ die des dritten, bei $n = 8$ die des ersten und dritten Triplets; statt der letzteren werden dem Magnesium jetzt zwei Linien $n = 8$ (3140,91 und 3136.09) im Calcium zugeordnet, welche bei Kayser und Runge dem Index 8 der ersten Neben-Serie zugehören (vgl. die vorhergehende Tabelle).

Ausserdem gibt es im Magnesium-Spectrum noch andere Linien, die nicht zu erkennbaren Serien gehören; die ihnen durch unsere Formel zugeordneten Calcium-Linien ersieht man aus folgender Tabelle.

Magnesium $Mg = 24,3$	Calcium $Ca = 40,1$		
λ beobachtet	λ' berechnet	beobachtet	Differenz
5711,56	6749,5	—	—
5528,75	6533,5	—	—
4730,42	5590,1	5590,30	— 0,20
4703,33	5558,0	—	—
4571,33	5402,0	—	—
4352,18	5143,1	—	—
4167,81	4925,2	—	—
4058,45	4796,0	4807,47	— 11,47
3987,08	4711,6	4685,40 (?)	+ 26,20
2936,61	3470,3	3468,68	+ 1,62
2928,74	3461,0	—	—
2915,57	3445,4	—	—
2802,80	3312,1	—	—
2798,07	3306,5	—	—
2795,63	3289,9	—	—
2790,88	3289,1	—	—
2783,08	3288,0	—	—
2779,94	3285,2	3285,00[1]	+ 0,20
2768,57	3271,5	3274,88	— 3,38
2765,47	3267,8	3269,31	— 1,51

Im Ganzen haben wir 56 Magnesium-Linien; und unter diesen sind 38, denen im Calcium-Spectrum Linien entsprechen,

[1]) Vgl. a. a. O. p. 373.

die sich mit den von uns berechneten nahezu decken. Von den fehlenden 18 Linien fallen zwei nach dem Ultrarothen über das beobachtete Gebiet des Calcium-Spectrums hinaus, zwei fallen in die Nähe von verbreiterten Calcium-Linien, so dass nur 14 übrig bleiben, deren zugeordnete Calcium-Linien nicht beobachtet sind. Die letzteren fallen sehr nahe mit Eisen-Linien zusammen; es ist daher leicht möglich, dass ihre Trennung von den Eisen-Linien sehr schwer zu bewerkstelligen sei.

Es sei bemerkt, dass Beobachtung und Rechnung noch besser übereinstimmen, wenn man nicht die Werthe $Ca = 40{,}1$, $Mg = 24{,}3$ benutzt, sonden bezw. 40,0 und 24,4, wie sie in älteren Büchern angegeben werden. Man ersieht dies aus den in folgender Tabelle zusammengestellten Proben.

Magnesium $Mg = 24{,}4$			Calcium $Ca = 40{,}0$				
Neben-Serie	n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz	n	Neben-Serie
I	4	3838,46	4526,1	4527,1	— 1,0	—	—
I	5	3097,06	3651,9	{3653,62 {3644,48	— 1,72 + 7,42	— 5	— I
I	6	2852,22	3363,1	3361,92	— 0,82	6	I
I	7	2736,14	3226,2	3225,74	+ 0,46	7	I
I	8	2673,15	3152,0	3152,08	— 0,08	8	I
I	9	2633,13	3104,8	3101,87	+ 2,93	9	I
I	10	2605,4	3072,1	—	—	—	—
II	3	5183,84	6112,1	6102,99	— 0,80	—	—
II	4	3336,83	3934,5	3933,83	+ 0,67	—	—
II	5	2942,21	3477,2	3474,98	+ 2,32	5	II
II	6	2781,35	3279,8	3274,88	+ 4,92	6	II
II	7	2698,44	3181,8	3181,40	+ 0,40	7	II
II	8	2649,30	3123,9	3117,74	+ 6,16	8	II

§ 8. Zink und Cadmium.

Im Zink-Spectrum haben wir nach Kayser und Runge ebenfalls zwei sogenannte Neben-Serien; die Triplets der ersten Serie sind gegeben durch die Formel

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{,1} \quad 10^8 \lambda^{-1} &= 42945{,}32 - 131641\, n^{-2} - 1236125\, n^{-4}, \\
\mathrm{I}_{,2} \quad &= 43331{,}71 - 131641\, n^{-2} - 1236125\, n^{-4}, \\
\mathrm{I}_{,3} \quad &= 43521{,}48 - 131641\, n^{-2} - 1236125\, n^{-4},
\end{aligned}$$

wobei n die Werthe 4, 5, 6, 7, 8, 9 annimmt. Für die zweite Neben-Serie gelten die Formeln

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}_{,1} \quad 10^8 \lambda^{-1} &= 42954{,}59 - 126919\, n^{-2} - 632850\, n^{-4}, \\
\mathrm{II}_{,2} \quad &= 43343{,}65 - 126919\, n^{-2} - 632850\, n^{-4}, \\
\mathrm{II}_{,3} \quad &= 43533{,}32 - 126919\, n^{-2} - 632850\, n^{-4},
\end{aligned}$$

worin der Zahl n die Werthe 3, 4, ... 8 beizulegen sind.

Wir berechnen nach unserer Formel

$$\lambda' = \lambda \sqrt[3]{\frac{Cd}{Zn}} = \lambda \sqrt[3]{\frac{112{,}0}{65{,}4}}$$

zu jeder Cadmium-Linie die entsprechende Zink-Linie und vergleichen das Resultat in folgender Tabelle mit den betreffenden Beobachtungen. Zugleich geben wir bei denjenigen Linien, die von Kayser und Runge einer Serie zugeordnet werden, an, um welche Serie und welche Zahl n es sich handelt, und zwar links für Cadmium, rechts für Zink. Die Cadmium-Serien sind durch folgende Formeln dargestellt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{,1} \quad 10^8 \lambda^{-1} &= 40755{,}21 - 128635\, n^{-2} - 1289619\, n^{-4}, \\
\mathrm{I}_{,2} \quad &= 41914{,}60 - 128635\, n^{-2} - 1289619\, n^{-4}, \\
\mathrm{I}_{,3} \quad &= 42456{,}64 - 128635\, n^{-2} - 1289619\, n^{-4}, \\
\mathrm{II}_{,1} \quad 10^8 \lambda^{-1} &= 40797{,}12 - 126146\, n^{-2} - 555137\, n^{-4}, \\
\mathrm{II}_{,2} \quad &= 41968{,}80 - 126146\, n^{-2} - 555137\, n^{-4}, \\
\mathrm{II}_{,3} \quad &= 42510{,}58 - 126146\, n^{-2} - 555137\, n^{-4}.
\end{aligned}$$

Der an drei Stellen den beobachteten Zinklinien beigesetzte Buchstabe B. soll andeuten, dass die betreffende Linie im Bogen-Spectrum nicht beobachtet wurde, aber nach den von der British Association veröffentlichten Tabellen[1]) im Funkenspectrum vorkommt.

[1]) Report of the British Association for the advancement of science, 1885, p. 307 ff.

Cadmium			Zink				
Serie	n	λ beobachtet	λ' berechnet	beobachtet	n	Serie	Differenz
—	—	5154,85	4308,9	4293,02	—	—	+ 15,88
II,$_1$	3	5086,06	4251,1	—	—	—	—
II,$_2$	3	4800,09	4012,1	4019.75	—	—	— 7,65
II,$_3$	3	4678,37	3910,3	—	—	—	—
—	—	4662,69	3897,2	—	—	—	—
—	—	4413,23	3688,7	3683,63	—	—	+ 5,07
—	—	4306,98	3599,9	3572,90 (?)	—	—	+ 27,00
—	—	3981,92	3328,2	3342,00 B.	—	—	— 13,80
—	—	3729,21	3117,0	—	—	—	—
—	—	3649,74	3050,6	—	—	—	—
—	—	3614,58	3021,2	3035,93	4	II,$_2$	— 14,73
I,$_1$	4	3613,04	3019,9	3018,50	4	II,$_3$	+ 1,40
—	—	3610,66	3017,9	3017,50 B.	—	—	+ 0,40
—	—	3595,64	3005,4	—	—	—	—
—	—	3500,09	2925,5	2913,63	—	—	+ 11,87
I,$_2$	4	3467.76	2898,5	2886,40 B.	—	—	+ 12,10
—	—	3466,33	2870,8	2873,39	—	—	— 2,59
I,$_3$	4	3403,74	2844,9	2833,13	—	—	+ 11,77
—	—	3299,11	2757,8	2756,53	5	I,$_3$	+ 1,27
—	—	3261,17	2725,8	2736,96	—	—	— 11,16
II,$_1$	4	3252,63	2718,7	2712,60	5	II,$_1$	+ 6,10
II,$_2$	4	3133.29	2618,3	2608,65	6	I,$_1$	+ 11,65
II,$_3$	4	3081,03	2575,2	2575,15	—	—	+ 0,05
—	—	—	—	2570,00	6	I,$_3$	—
—	—	3005,53	2512,1	2516,0	7	I,$_1$	— 4,00
—	—	2981,46	2492,0	2493,67	7	II,$_1$	— 1,67
I,$_1$	5	2980,75	2491,4	2491,67	7	I,$_2$	— 0.27
—	—	2961,64	2475,4	2479,85	—	—	— 4,45
—	—	2908,85	2431,3	2430,74	9	I,$_1$	+ 1,34
—	—	2903,24	2426,6	2427,05	8	I,$_3$	— 0,45
I,$_2$	5	2881,34	2408,3	—	} 9	I,$_2$	—
—	—	2880.88	2407,8	2407,98			— 0,18
II,$_1$	5	2868,35	2397,5	2393,88	—	—	+ 3,62
I,$_2$	6	2677,65	2238,1	2246,90	—	—	— 8,80
II,$_1$	9	2553,61	2134,4	2138,30	—	—	— 3,90

Zwischen den Cadmium-Linien 2868,35 und 2677,65 liegen elf andere, deren entsprechende beim Zink bisher nicht beobachtet sind, ebenso zwischen den Linien 2677,65 und 2553,61 zwölf weitere Linien, die beim Zink fehlen; das Spectrum des letztern schliesst nach den bisherigen Beobachtungen im Ultravioletten mit der Linie 2138,30 ab, während beim Cadmium über die Linie 2553,61 hinaus noch siebzehn Linien beobachtet sind.

Ein Blick auf die Tabelle lehrt wieder, dass eine grosse Zahl der zu Serien gehörigen Linien wieder in ebensolche Linien übergehen: aber die einzelnen Serien erscheinen gestört. Da die Zuweisung der Linien zu bestimmten Serien eine rein empirische ist, so wird darin kein wesentlicher Einwand gegen das aufgestellte Gesetz des näherungsweisen Entsprechens zu erblicken sein.

In Folge eines Irrthumes hatte ich den ersten Rechnungen das doppelte Atom-Gewicht des Zinks zu Grunde gelegt; dann ergab sich durchaus keine Uebereinstimmung; es dürfte dies ein Anzeichen dafür sein, dass die gefundenen Uebereinstimmungen nicht blos zufällige sind.

§ 9. Baryum, Calcium, Strontium.

In gleicher Weise wie im Vorstehenden Cadmium und Zink sind im Folgenden Baryum, Calcium und Strontium mit einander verglichen. Ich bin vom Strontium ausgegangen und habe nach den Formeln

$$\lambda' = \lambda \sqrt[3]{\frac{Ba}{Sr}} = \lambda \sqrt[3]{\frac{137,4}{87,6}},$$

$$\lambda'' = \lambda \sqrt[3]{\frac{Ca}{Sr}} = \lambda \sqrt[3]{\frac{40,1}{87,6}}$$

zu jeder Strontiumlinie, die von Kayser und Runge angegeben wird, eine entsprechende Linie des Baryum- und Calcium-Spectrums berechnet. Die Resultate der Rechnung sind in folgender Tabelle zusammengestellt, in welcher die der Rechnung jeweils am besten entsprechenden beobachteten Linien beigesetzt sind. An einigen Stellen ist die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung grösser, als man annehmen kann und durch die verhältnissmässige Ungenauigkeit der Atomgewichts-Bestimmung gerechtfertigt sein mag. Andererseits ist aber zu beachten, dass die Bedingungen der Beobachtungen nie denjenigen der Rechnung wirklich entsprechen

können, da thatsächlich jedes Atom durch unendlich viele andere Atome beeinflusst wird, seine Schwingungen also unter gewissem Zwange vor sich gehen.

Im Strontium-Spectrum haben Kayser und Runge nur eine Serie gefunden, im Calcium-Spectrum die schon oben angeführten zwei Neben-Serien, im Baryum-Spectrum keine Serie. Die diesen Serien angehörigen Linien sind in der Tabelle entsprechend hervorgehoben. Die Triplets der Strontium-Serie werden durch folgende Formel definirt

$$\begin{aligned} 10^8 \cdot \lambda^{-1} &= 31030,64 - 122328 n^{-2} - 837473 n^{-4}, \\ &= 31424,67 - 122328 n^{-2} - 837473 n^{-4}, \\ &= 31610,58 - 122328 n^{-2} - 837473 n^{-4}. \end{aligned}$$

Der einigen Baryum- und Calcium-Linien beigesetzte Buchstabe B. deutet wieder an, dass diese Linien nur im Funken-Spectrum vorkommen.[1])

Strontium		Baryum		Calcium			
n	λ beobachtet	λ' berechnet	beobachtet	λ'' berechnet	beobachtet	n	Serie
—	6550,53	7610,9	—	5048,4	5041,93	—	—
—	6504,17	7557,1	—	5020,0	5021,0 B.	—	—
—	6408,65	7444,5	—	4939,1	—	—	—
—	6386,74	7420,6	—	4922,2	—	—	—
—	6380,95	7413,9	—	4917,7	—	—	—
—	5970,38	6936,9	—	4601,3	4607,7 B.	—	—
—	5848,01	6794,7	—	4507,0	4505,04	—	—
—	5817,01	6758,8	—	4483,2	—	—	—
—	—	6717,9	—	—	—	—	—
—	5767,29	6701,7	6697,0 B.	4444,8	4456,08	4	I,1
—	—	6687,4	—	—	4435,86	4	I,2
—	—	6672,0	6675,30	—	4425,61	4	I,3
—	5543,49	6441,0	6451,05	4272,4	4283,16	—	—
—	5540,28	6437,1	—	4269,8	4271,0 B.	—	—
—	5535,01	6431,1	—	4265,8	—	—	—
—	5522,02	6416,0	—	4255,8	4253,9 B.	—	—
—	5504,48	6395,5	—	4242,2	4240,58	—	—
—	5486,37	6374,5	—	4228,3	4226,91	—	—

[1]) Vgl. Report of the British Association for the advancement of science, 1884.

Strontium		Baryum			Calcium		
n	λ beobachtet	λ' berechnet	beobachtet	λ'' berechnet	beobachtet	n	Serie
—	5481,15	6368,4	—	4224,3	—	—	—
—	5451,08	6333,5	6341,93	4201,1	—	—	—
—	5257,12	6108,1	6111,01	4051,6	—	—	—
—	5238,76	6086,8	6083,63	4037,5	—	—	—
—	5229,52	6076,1	—	4030,3	—	—	—
—	5225,35	6071,2	—	4027,1	—	—	—
—	5222,43	6067,8	6063,33	4024,9	—	—	—
—	5213,23	6057,2	—	4017,8	—	—	—
—	5156,37	5991,1	5997,31	3974,0	3973,89	4	II,$_1$
—	—	5965,8	5971,94	—	3957,23	4	II,$_2$
—	—	5953,6	5965,06	—	3949,09	4	II,$_3$
4	4971,85	5776,7	5784,24	3831,8	—	—	—
—	4968,11	5772,2	5777,84	3828,8	—	—	—
—	4962,45	5765,8	—	3824,5	—	—	—
—	4892,20	5684,2	5680,34	3770,4	—	—	—
4	4876,35	5665,6	—	3758,0	—	—	—
—	4872,66	5661,4	—	3755,3	—	—	—
—	4869,41	5657,6	—	3752,8	—	—	—
—	4868,92	5657,1	—	3752,4	—	—	—
—	4855,27	5641,2	—	3741,9	3737,08	—	—
4	4832,23	5614,5	5620,41	3724,2	—	—	—
—	4812,01	5591,0	5593,45	3708,6	3706,18	—	—
—	4784,43	5558,9	—	3687,3	—	—	—
—	4755,59	5525,4	5535,69	3665,1	—	—	—
—	4742,07	5510,4	5519,37	3655,2	3653,62	—	—
—	4729,93	5495,6	5490,0 B.	3645,3	3644,45	5	I,$_1$
—	4722,42	5486,7	—	3639,4	3630,82	5	I,$_2$
—	—	5463,7	5473,94	—	3624,15	5	I,$_3$
—	4678,39	5435,7	5437,66	3605,5	—	—	—
—	4607,52	5353,4	5365,46	3551,0	—	—	—
—	4531,54	5265,1	5267,20	3492,4	3487,76	5	II,$_1$
—	—	5238,9	—	—	3474,98	5	II,$_2$
—	4480,96	5206,3	—	3453,4	3468,68	5	II,$_3$
—	4438,22	5156,6	5160,27	3420,5	—	—	—
—	4412,82	5127,2	—	3400,9	—	—	—
—	4361,87	5068,0	5055,12	3361,7	3361,92	6	I,$_1$
—	4338,00	5040,2	—	3343,3	3350,22	6	I,$_2$
—	4326,60	5027,0	—	3334,5	3344,49	6	I,$_3$
—	4319,39	5018,7	—	3329,0	—	—	—
—	4308,49	5017,5	—	3320,5	—	—	—
—	4305,60	5002,7	—	3318,3	—	—	—
—	—	4954,3	4947,50	—	3286,26	6	II,$_1$
—	—	4937,1	4934,24	—	3274,88	6	II,$_2$
—	—	4928,8	—	—	3269,31	6	II,$_3$
—	4215,66	4898,1	4900,13	3249,0	—	—	—
—	—	4863,1	4877,99	—	3225,74	7	I,$_1$
—	—	4847,1	—	—	3215,15	7	I,$_2$

Strontium		Baryum		Calcium			
n	λ beobachtet	λ' berechnet	beobachtet	λ'' berechnet	beobachtet	n	Serie
—	4161,95	4835,3	—	3207,3	3209,68	7	I, 3
—	—	4796,2	—	—	3181,40	7	II, 1
—	—	4779,4	—	—	3170,23	7	II, 2
—	—	4772,9	—	—	3166,95	7	II, 3
—	—	4750,2	—	—	3150,85	8	I, 1
—	4077,88	4738,0	4726,63	3142,8	3140,91	8	I, 2
—	—	4729,0	4724,98	—	3136,09	8	I, 3
—	—	4700,3	4700,64	—	3117,74	8	II, 1
5	4032,51	4685,3	4691,74	3107,8	3107,06	8	II, 2
—	4030,45	4681,8	—	3106,2	3101,87	{8 9	II, 3 I, 1
—	3970,15	4612,8	4605,11	3059,8	—	—	—
5	3969,42	4612,0	4600,02	3059,2	—	—	—
5	3940,91	4578,9	4579,84	3037,2	—	—	—
6	3705,88	4305,8	4323,15	2856,1	—	—	—
—	3653,90	4245,4	4242,83	2816,0	—	—	—
6	3653,32	4244,7	4239,91	2815,6	—	—	—
—	3629,15	4216,6	4224,11	2797,0	—	—	—
6	3628,62	4216,0	—	2796,5	—	—	—
—	3577,45	4156,6	4166,24	2757,1	—	—	—
7	3547,92	4122,2	4132,60	2734,3	—	—	—
—	3504,70	4072,0	4079,56	2701,0	—	—	—
7	3499,40	4064,9	—	2696,9	—	—	—
7	3477,33	4040,2	—	2679,9	—	—	—
—	3475,01	4036,4	—	2677,4	—	—	—
—	3464,58	4025,4	—	2670,1	—	—	—
8	3457,70	4017,4	—	2664,8	—	—	—
—	3456,78	4016,4	—	2664,1	—	—	—
8	3411,62	3963,9	3975,55	2629,3	—	—	—
9	3400,39	3950,8	—	2620,6	—	—	—
8	3390,09	3938,9	3935,87	2612,7	—	—	—
—	3380,89	3928,3	3917,42	2605,7	—	—	—
—	3366,43	3911,4	3910,04	2594,5	—	—	—
—	3351,35	3893,9	3892,93	2582,8	—	—	—
—	3330,15	3869,2	—	2566,5	—	—	—
—	3322,32	3860,1	3861,87	2560,5	—	—	—
—	3307,64	3843,1	—	2549,2	—	—	—
—	3301,81	3836,3	—	2545,8	—	—	—
—	3200,40	3718,5	—	2466,5	—	—	—
—	3199,10	3717,0	—	2465,5	—	—	—
—	3190,10	3706,5	—	2458,6	—	—	—
—	3189,40	3705,7	3701,87	2458,0	—	—	—
—	3182,40	3697,6	—	2452,6	—	—	—
—	3172,30	3685,6	3689,28	2444,7	—	—	—
—	2931,98	3406,6	—	2259,6	2275,60	—	—

Das Studium der Tabelle zeigt, wie sich die Strontium-Serie auf das Baryum überträgt; wir haben in den einzelnen Triplets von $n = 4, \ldots 8$ die folgenden Baryum-Linien:

n	1. Linie des Triplets	2. Linie des Triplets	3. Linie des Triplets
4	5777,84	—	5620,41
5	4691,74	4600,02	4579,84
6	4323,15	4239,91	—
7	4132,60	—	—
8	—	3975,55	3935,87

Ebenso lassen sich die bekannten Calcium-Serien auf das Baryum übertragen. Um dies in obiger Tabelle hervortreten zu lassen, sind beim Calcium auch diejenigen Linien eingetragen, welche nicht aus Strontium-Linien berechnet werden konnten, soweit dieselben zu Serien gehören. Aus diesen Calcium-Linien sind die entsprechenden Baryum-Linien nach der Formel

$$\lambda' = \lambda'' \sqrt[3]{\frac{Ba}{Ca}}$$

berechnet, und (zusammen mit den zugehörigen beobachteten Linien) in die Rubrik Baryum eingetragen.

Die Triplets der Neben-Serie I (vgl. oben p. 464) des Calcium ergeben im Baryum:

$n =$	4	5	6	7	8
$I,_1$	6697,08	5490,0	5055,12	4877,99	—
$I,_2$	—	—	—	—	4726,63
$I,_3$	6675,30	5473,94	—	—	4724,98

Aus den Calcium-Linien der Neben-Serie II erhalten wir im Baryum:

$n =$	4	5	6	7	8
$II,_1$	5997,31	5267,20	4947,50	—	—
$II,_2$	5971,94	—	4934,24	—	3107,8
$II,_3$	5965,06	—	—	—	3106,2

§ 10. Quecksilber und Cadmium.

Wenn meine Rechnungen sich im Vorstehenden zunächst auf die Elemente der zweiten Mendelejeff'schen Gruppe bezogen, so ist dies reiner Zufall; ich habe eben zufällig bei Beginn der Rechnungen die betreffenden Tabellen von Kayser und Runge zuerst zur Hand genommen. Es fehlt noch das Quecksilber.[1]) Um vollständig zu sein, sollten ferner auch in umgekehrter Richtung die Beziehungen zwischen den Spectren jedes Paares von Elementen untersucht werden.

Immerhin zeigen die mitgetheilten Resultate, dass sich thatsächlich die Wellenlängen verschiedener Elemente der zweiten Gruppe des periodischen Systems annähernd verhalten wie die Cubikwurzeln aus den Atomgewichten. Es wird daher genügen, wenn im Folgenden nur noch vereinzelte Proben mitgetheilt werden. Dabei bevorzuge ich wieder diejenigen Linien der Spectra, welche bestimmten Serien zugeordnet sind.

Cadmium, Zink und Quecksilber bilden bekanntlich eine Gruppe für sich. Von diesen sind die ersten beiden schon betrachtet (vgl. § 8); wir vergleichen jetzt noch einige Serien im Cadmium und Quecksilber. Wir gehen von der ersten Neben-Serie des Quecksilbers (nach Kayser und Runge) aus und berechnen die zugeordneten Cadmium-Linien mit der Wellenlänge λ' nach der Formel

$$\lambda' = \lambda \sqrt[3]{\frac{Hg}{Cd}} = \lambda \sqrt[3]{\frac{200{,}3}{112}}.$$

Es ergibt sich, wenn wir nur die erste Linie aus jedem Triplet berücksichtigen:

Quecksilber		Cadmium		
n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz
4	3663,20	3017,9	{3005,53 {3016,10 B.	+ 12,37 + 1,80
5	3023,71	2491,2	2491,00	+ 0,20
6	2803,69	2309,8	2306,72	+ 1,08
7	2699,74	2224,5	2227,00 B.	− 3,50

[1]) Aus dem Spectrum des Beryllium sind nur so wenige Linien bekannt, dass dasselbe hier nicht berücksichtigt werden konnte.

Der Buchstabe B. deutet wieder an, dass die betreffende Linie nur im Funkenspectrum des Cadmium beobachtet[1]) wurde; die Linie 2491,00 wurde nach Angabe von Kayser und Runge durch Liveing und Dewar, nicht durch sie selbst beobachtet.

Die analoge Behandlung der zweiten Neben-Serie führt zu folgendem Resultate

Quecksilber		Cadmium		
n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz
3	5460,97	4499,00	—	—
4	3341,70	2756,69	2757,10	— 0,41
5	2925,51	2410,15	2418,50 B.	— 8,35
6	2759,83	2315,90	2312,95	+ 3,05
			2313,60 B.	+ 2,30
7	2674,96	2203,75	2194,67	+ 9,08
			2206,20 B.	— 2,45

Wollte man für $n = 3$ die der Rechnung entsprechende Linie der Serie, nämlich 5374,42 (die aber nicht beobachtet ist) zu Grunde legen, so würde ihr die Linie 4416,7 im Cadmium entsprechen, während 4415,6 (B) beobachtet wurde.

Die hier zusammengestellten Cadmium-Linien könnte man zu neuen Serien zusammenfassen.

Ausserdem heben Kayser und Runge (a. a. O. p. 53) noch einige ausgezeichnete Triplets und Paare im Quecksilber-Spectrum hervor, von denen ich je die erste Linie einer entsprechenden Rechnung unterzogen habe, was zu folgendem Resultate führte.

Quecksilber	Cadmium		
beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz
3007,02	2477,3	2474,15	+ 3,15
2799,76	2306,5	2306,72	— 0,22
3680,74	3032,4	3034,90 B.	— 2,50
3305,23	2723,0	2726,90 B.	— 3,90
3264,33	2689,3	2677,65	+ 11,65

[1]) Vgl. Reports of the British Association, 1884, p. 368 ff.

Umgekekrt gehen wir im Folgenden von den Serien des Cadmium-Spectrums aus und berechnen die entsprechenden Wellenlängen des Quecksilber-Spectrums; die Resultate ersieht man aus folgender Tabelle (es sind hier alle Linien eines jeden Triplets berücksichtigt).

Erste Neben-Serie.

Cadmium		Quecksilber		
n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz
4	3613,04	4385,6	4385,70 B.	— 0,10
4	3467,76	4209,2	4211,80 B.	— 2,60
4	3403,74	4131,5	4132,70 B.	— 1,20
5	2980,75	3618,1	3680,70 B.	—
5	2881,34	3497,4	3494,50 B.	+ 2,90
5	2837,01	3443,6	3440,60 B.	+ 3,00
6	2763,99	3355,0	3351,52	+ 3,48
6	2677,65	3229,3	3227,50 B.	+ 1,80
6	2639,34	3204,0	3207,10 B.	— 3,10
7	2660,45	3229,3	viele schwache Linien B.	—
7	2580,33	3132,0	3131,94	0,06
7	2544,84	3089,0	3085,41	+ 3,59
8	2601,99	3158,3	3144,61	+ 13,69
8	2525,57	3065,6	3050,58	+ 15,02
8	2491,00	3023,6	3023,71	— 0,11

Zweite Neben-Serie.

Cadmium		Quecksilber		
n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz
3	5086,06	6173,6	6152,30 B.	+ 21,30
3	4800,09	5826,4	5819,05	+ 7,35
3	4678,37	5678,7	6679,10	— 0,40
4	3252,63	3948,1	3949,00 B.	— 0,90
4	3133,29	3804,0	3807,30 B.	— 3,30
4	3081,03	3739,8	viele schwache Linien B.	
5	2868,35	3481,7	3473,40 B.	+ 8,30
5	2775,09	3368,5	3367,03	+ 1,47
5	2733,97	3318,6	3326,40 B.	— 7,80
6	2712,65	3292,7	3305,23	— 2,53
6	2629,15	3192,2	—	—
6	2592,14	3146,4	3144,61	+ 1,79
7	2632,29	3196,0	3207,10 B.	— 11,10
7	2553,61	3099,6	3095,35	+ 4,25
7	2521,74	3060,9	3050,58	+ 10,32
8	2582,86	3135,1	3135,89	— 0,79
8	2474,15	3004,2	3007,02	— 2,82
8	—	—	—	—
9	2553,61	3099,6	3095,35	+ 4,25

In den beiden letzten Tabellen sind 33 Linien des Cadmium-Spectrums aufgeführt. Von den entsprechenden Linien des Quecksilber-Spectrums konnten nur 16 den Beobachtungen von Kayser und Runge (bezw. deren Vorgänger) entnommen werden: die anderen 17 wurden aus den neueren Beobachtungen[1]) von Eder und Valenta (in denen sowohl das Funken- als das Bogen-Spectrum berücksichtigt ward) ergänzt. Entsprechend diesem Resultate dürfen wir erwarten, dass bei weiterer Verfeinerung der Beobachtungsmethoden auch manche Lücke in den früheren Tabellen sich wird ausfüllen lassen, und dass so eine noch bessere Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung wird zu erzielen sein.

§ 11. Lithium und Natrium.

Im Lithium-Spectrum unterscheidet man eine Haupt-Serie und zwei Neben-Serien.

Die Haupt-Serie ist gegeben durch die Formel:

$$\text{I.} \qquad 10^8 \lambda^{-1} = 43584{,}73 - 133669\, n^{-2} - 1100084\, n^{-4},$$

worin $n = 4, 5, \ldots, 11$. Für die erste Neben-Serie haben wir (immer nach Kayser und Runge)

$$\text{II.} \qquad 11^8 \lambda^{-1} = 28586{,}74 - 109625{,}5\, n^{-2} - 1847\, n^{-4},$$

und für die zweite Neben-Serie:

$$\text{III.} \qquad 10^8 \lambda^{-1} = 28666{,}69 - 122391\, n^{-2} - 231700\, n^{-4}.$$

Versucht man nun von der Wellenlänge λ des Lithium nach der Formel

$$\lambda' = \lambda \sqrt[3]{\frac{Na}{Li}} = \lambda \sqrt[3]{\frac{23{,}05}{7{,}03}}$$

zu einer Wellenlänge λ' des Natrium überzugehen, so ergibt sich durchaus keine Uebereinstimmung. Nur für die Wellen-

[1]) Vgl. Reports of the British Association 1895, p. 300 ff.; und Wiener Denkschriften, Bd. 51, 1894.

länge 4132,44 im Lithium ergibt sich durch Rechnung die Wellenlänge 6152,4 im Natrium, die der beobachteten Wellenlänge 6161,15 hinreichend nahe liegt, noch besser mit der im Funken-Spectrum des Natrium beobachteten Wellenlänge 6154,6 übereinstimmt.

Es geht hieraus hervor, dass die speciellen Voraussetzungen, welche bei den Elementen der ersten Mendelejeff'schen Gruppe genügten, jetzt nicht mehr hinreichen. Wir müssen vielmehr die allgemeinere Formel (42) oder (43)

$$\lambda' = A \cdot \lambda \cdot \sqrt[3]{\frac{Na}{Li}}$$

in Betracht ziehen und versuchen, ob sich ein entsprechender Werth von A finden lässt (vgl. oben p. 461 f.). Da man von vornherein nicht weiss, wie sich vielleicht die Linien beider Spectren entsprechen, so muss man durch Probiren einen möglichst günstigen Werth von A ermitteln. Nach mehrfachen vergeblichen Versuchen habe ich A so bestimmt, dass der Linie $n = 4$ aus der Haupt-Serie des Lithium ($\lambda = 2741{,}39$) die Linie $n = 4$ aus der Haupt-Serie des Natrium ($\lambda' = 3303{,}07$) entspricht; denn beide Linien liegen ziemlich isolirt in der Mitte des beobachteten Spectrumtheiles. Es ergibt sich dann:

$$A = 1{,}2052.$$

λ Lithium			λ' Natrium				
Serie	n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz	n	Serie
III	5	4273,44	5150,6	5149,19	+ 1,41	5	II, 2
II	5	4132,44	4980,6	4979,30	+ 1,30	5	III, 2
II	7	3794,90	4573,8	4573,6 B.	+ 0,20	—	—
II	8	3718,90	4482,2	4494,3	— 12,10	7	III, 2
III	9	3670,60	4424,0	4423,70	— 0,30	8	II, 1
I	4	2741,39	3303,07	3303,07	—	4	I
I	5	2562,60	3088,6	3093,1 B.	— 4,50	—	—
I	6	2475,13	2983,1	2984,3 B.	— 1,20	—	—
I	7	2425,55	2923,4	2921,4 B.	+ 2,00	—	—
I	8	2394,54	2886,0	2903,0 B.	— 17,00	—	—

Die letzte Colonne vorstehender Tabelle bezieht sich auf die im Natrium auftretenden Serien, eine Haupt-Serie und zwei Neben-Serien, wobei in letzterer immer zwei benachbarte Linien zugleich auftreten; diese Serien sind mit I, II, III bezeichnet; und es bedeutet z. B. $II,_1$ die erste, $II,_2$ die zu demselben Werthe von n gehörige zweite Linie der ersten Neben-Serie.

Von den 18 Linien, die bei Kayser und Runge angegeben werden, genügen daher 10 annähernd der aufgestellten Formel. Die Serien sind wieder gestört; wir werden weiterhin sehen, dass ein gegenseitiges Entsprechen der Serien auch nicht sicher zu erwarten ist.

Nach den einleitenden Erörterungen ist zu erwarten, dass sich die Linien eines Spectrums aus verschiedenen Klassen zusammensetzen, und zwar so, dass jede Klasse durch eine transscendente Gleichung repräsentirt wird.

Die grössten Wellenlängen des Lithiums geben bei der Umrechnung Wellen, die in's Ultrarothe fallen und sich so leicht der Beobachtung entziehen. Scheiden diese aus, so bleiben noch 7 beobachtete Linien im Lithium-Spectrum übrig. Diese Anzahl ist zu gering, um daraus Schlüsse zu ziehen; immerhin sei bemerkt, dass sich 4 von diesen wieder nach der Formel

$$\lambda'' = B \cdot \lambda \sqrt[3]{\frac{Na}{Li}}$$

annähernd berechnen lassen, wenn

$$B = 13{,}381$$

gewählt wird, wie die folgende Tabelle zeigt.

Lithium			Natrium				
Serie	n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz	n	Serie
II	3	6103,77	8167,4	8188,3	— 20,90	3	$III,_2$
II	4	4602,37	6156,5	6154,62	+ 1,88	4	$II,_2$
III	7	3838,30	5136,0	5149,19	— 13,19	5	$II,_2$
I	3	3232,77	4325,7	4325,7	—	9	$III,_1$

Die Zahl 5149,19 kam auch in der vorhergehenden Tabelle vor; sie wäre dort eventuell durch die ebenfalls beobachtete Wellenlänge 5153,72 zu ersetzen. Wenngleich man aus diesen wenigen Zahlen keine Schlüsse ziehen kann, haben wir diesen Vergleich doch angestellt, da sich im Folgenden beim Uebergange von Natrium zum Kalium etwas ähnliches zeigen wird.

§ 12. Natrium und Kalium.

Im Spectrum des Natrium unterscheidet man die schon soeben erwähnten Serien, nämlich eine Haupt-Serie

$$\text{I} \quad 10^8 \lambda^{-1} = 41496{,}34 - 127040\, n^{-2} - 843841\, n^{-4},$$

und zwei Neben-Serien, jede aus Linien-Paaren bestehend:

$$\begin{aligned} \text{II}_{,1} \quad 10^8 \lambda^{-1} &= 24549{,}12 - 120726\, n^{-2} - 197891\, n^{-4}, \\ \text{II}_{,2} \quad & 24565{,}83 - 120715\, n^{-2} - 197935\, n^{-4}, \\ \text{III}_{,1} \quad & 24475{,}34 - 110065\, n^{-2} - 4148\, n^{-4}, \\ \text{III}_{,2} \quad & 24494{,}84 - 110153\, n^{-2} - 3487\, n^{-4}, \end{aligned}$$

worin die ganze Zahl n von 3, bezw. 4 bis 9 geht.

Beim Kalium liefert die Haupt-Serie für jeden Werth von n ein Paar benachbarter Linien nach den Formeln

$$\begin{aligned} \text{I}_{,1} \quad 10^8 \lambda^{-1} &= 35091{,}83 - 127207\, n^{-2} - 623087\, n^{-4}, \\ \text{I}_{,2} \quad & 35093{,}22 - 127213\, n^{-2} - 618547\, n^{-4}. \end{aligned}$$

Ausserdem treten vier Neben-Serien, die sich auch paarweise ordnen lassen, auf, nämlich:

$$\begin{aligned} \text{II}_{,1} \quad 10^8 \lambda^{-1} &= 22021{,}83 - 119393\, n^{-2} - 62506\, n^{-4}, \\ \text{II}_{,2} \quad & 22077{,}11 - 119264\, n^{-2} - 63981\, n^{-4}, \\ \text{III}_{,1} \quad & 21991{,}24 - 114450\, n^{-2} - 111146\, n^{-4}, \\ \text{III}_{,2} \quad & 22050{,}32 - 114478\, n^{-2} - 111337\, n^{-4}. \end{aligned}$$

In den Spectra beider Elemente habe ich zunächst wieder die Serien verglichen. Es ergibt sich, dass sich die Haupt-Serie des Natrium nach der Formel

$$\lambda' = \lambda \sqrt[3]{\frac{Ka}{Na}}$$

annähernd auf das Kalium überträgt, wie folgende Tabelle zeigt.

Natrium		Kalium				
n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz	n	Serie
3	5896,16	7032,2	—	—	—	—
4	3303,07	3939,5	3943,3 B.	− 3,80	—	—
5	2852,91	3402,6	3403,8 B.	1,20	-	—
6	2680,46	3196,9	{3190,2 B.	+ 6,7	—	—
			{3217,27	— 10,37	6	$I,_2$
7	2593,98	3093,6	3102,15	- 8,55	7	$I,_2$
8	2543,85	3034,0	3034,94	— 0,94	8	$I,_1$
9	2512,23	2928,0	{2938,7 B.	— 10,70	—	—
			{2942,8	— 14,80	11	$I,_1$
—	4494,3	5360,2	5359,88	+ 0,32	—	—

Die letzte Linie der Tabelle gehört nicht der Haupt-Serie an; sie ist mit aufgeführt, weil sie in gleicher Weise wie die anderen zu einer beobachteten Kalium-Linie führt. Der Buchstabe B. bezieht sich wieder auf das Funken-Spectrum des Kalium.

Unter den obigen Natrium-Linien lässt sich eine Gruppe von 10 Linien aussondern, die nach der Formel

$$\lambda' = A \cdot \lambda \cdot \sqrt[3]{\frac{K}{Na}}$$

bekannte Kalium-Linien ergeben, wenn

$$A = 2{,}60215$$

genommen wird; sie sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Natrium			Kalium				
Serie	n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz	n	Serie
$III,_2$	6	4665,2 B.	5133,4	5112,68	+ 20,72	7	$II,_1$
$II,_1$	7	4546,03	5002,2	5006,8 B.	- 4,20	—	—
—		4500,0	4951,6	4952,2	— 0,60	8	$III,_1$
$III,_1$	7	4494,3	4945,2	4943,1	+ 2,10	8	$III,_2$
$II,_1$	8	4423,7	4867,6	4870,8	3,20	9	$II,_1$
$II,_2$	8	4420,2	4863,6	4863,8	— 0,20	9	$II,_2$
—	—	4393,7	4834,6	}4832,3 B.	+ 2,30	—	—
—		4390,7	4831,3		— 1,00	—	—
$II,_1$	9	4343,7	4779,6	4788,8	— 9,20	10	$III,_2$
	·	4325,7	4759,8	4759,8	-	11	$II,_1$

Eine andere Gruppe von 12 Linien lässt sich gemäss der Formel

$$\lambda' = \lambda \sqrt[3]{\frac{K}{Na}} \cdot B, \text{ wo } B = 1{,}0677,$$

zusammenstellen, wie die folgende Tabelle zeigt.

Natrium			Kalium					
Serie	n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz	n	Serie
III, 1	5	4983,53	5320,5	5323,55	— 3,05	6	III, 2
II, 1	6	4752,19	5073,4	5084,49	— 11,09	7	III, 2
II, 2	6	4748,36	5069,8	5057,4 B.	+ 12,40	—	—
III, 1	6	4669,4	4992,3	5006,8 B.	— 14,50	—	—
III, 2	6	4665,2	4981,1	4965,5	+ 15,60	8	II, 1
II, 1	7	4546,03	4854,3	4856,8	— 2,50	9	III, 1
II, 2	7	4542,75	4850,3	4850,8	— 0,50	9	III, 2
III, 1	7	4500,0	4804,7	4808,8	— 4,10	10	III, 2
III, 2	7	4494,3	4798,6	4796,8	+ 1,80	10	III, 1
II, 1	9	3343,7	4637,3	4650,7 B.	— 13,40	—	—
I,	4	3302,47	3526,7	3531,2 B.	— 4,50	—	—

Von den 35 Linien, welche Kayser und Runge im Natrium-Spectrum aufführen, sind so 27 mit Linien des Kalium-Spectrums annähernd zur Deckung gebracht; die doppelt vorkommende Linie 4494,3 ist dabei nur einfach gezählt. Die Linien der Haupt-Serie des Natrium entsprechen Linien der Haupt-Serien des Kalium oder solche, die hier keiner Serie zugehören; den Linien der Neben-Serien entsprechen im wesentlichen ebensolche Linien.

§ 13. Kupfer, Silber und Gold.

Im Kupfer-Spectrum führen Kayser und Runge 305 Linien auf; nur verhältnissmässig wenige lassen sich zu Serien zusammenordnen. Auf diese beschränke ich vorläufig die nachfolgende Untersuchung. Wir haben zwei sogenannte Neben-Serien, die aus Paaren von Linien bestehen, welche aber nicht alle beobachtet wurden. Analog sind die Verhältnisse beim Silber, in dessen Spectrum 66 Linien angegeben werden. Aus den Silber-Linien sind nach der Formel

$$\lambda' = \lambda \cdot \sqrt[3]{\frac{Cu}{Ag}} = \lambda \cdot \sqrt[3]{\frac{63}{108}}$$

die Kupfer-Linien berechnet.

Silber			Kupfer		
Serie	n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz
—	—	5545,86	4633,8	{4634,47 B. {4642,78	— 0,67 + 8,98
I, 1	4	5471,72	4571,9	4587,19	— 15,29
—	—	4888,46	4084,6	4080,70	+ 3,90
II, 1	4	4668,70	3900,9	3899,43	+ 1,47
I, 1	5	4212,1	3519,4	3520,07	— 0,67
II, 1	5	3981,87	3327,0	{3327,2 B. {3329,68	— 0,20 — 2,68
I, 1	6	3810,6	3183,9	{3184,7 B. {3175,81	— 0,80 + 8,09
—	—	3383,0	2826,7	2824,7 B.	+ 2,00

Bei der grossen Menge der im Kupfer beobachteten Linien könnte man die Uebereinstimmung für zufällig halten; deshalb habe ich umgekehrt den Ausgang von den Linien der Kupfer-Spectrums genommen, soweit dieselben durch die Beobachtungen von Kayser und Runge ausgezeichnet sind. So ergibt sich folgende Tabelle.

Kupfer			Silber		
Serie	n	beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz
—	—	5782,30	6920,3	—	—
I, 1	4	5220,25	6247,6	6249 B.	— 1,6
II, 1	4	4531,04	5422,8	{5436,0 {5424,9 B.	— 13,2 — 2,1
I, 1	5	4063,50	4863,9	4874,36	— 10,46
—	—	4056,8	4855,3	4848,33	+ 6,97
II, 2	5	3861,88	4622,0	{4620,57 B. {4616,03	+ 1,43 + 5,97
—	—	3688,6	4414,6	{4411,0 B. {4396,49	+ 3,6 + 18,11
I, 1	7	3512,19	4204,5	{4209,4 B. {4212,1	— 4,9 — 7,6
I, 1	8	3415,94	4087,8	4085,92 B.	+ 1,88
II, 1	6	3599,20	4307,5	4311,3 B.	— 3,80
—	—	3274,06	3919,1	{3919,95 B. {3914,47	— 0,85 + 4,63

Versucht man die in der vorletzten Tabelle berücksichtigten Silber-Linien auf das Spectrum des Goldes nach der Formel

$$\lambda' = \lambda \cdot \sqrt[3]{\frac{Au}{Ag}} = \lambda \cdot \sqrt[3]{\frac{197}{108}}$$

zu übertragen, so kommt man zu folgendem Resultate.

Silber	Gold		
beobachtet	berechnet	beobachtet	Differenz
5545,86	6776,1	—	—
5471,72	6685,6	6670 B.	+ 15,6
4888,46	5973,0	5957,24	+ 15,76
		5961,40 B.	+ 11,60
4668,70	5704,4	5692,49 B.	+ 11,91
4212,1	5146,5	5142,62 B.	+ 3,88
3981,87	4865,2	—	—
3810,6	4655,9	4649,96 B.	+ 5,94
3383,0	4133,5	4128,80 B.	+ 4,70

Der Buchstabe B. bezieht sich wieder auf die im Funken-Spectrum allein beobachteten Linien.[1])

Die Metalle Kupfer, Silber und Gold gehören zur ersten Mendelejeff'schen Gruppe. Soweit man aus den hier mitgetheilten Proben einen Schluss ziehen kann, scheinen sie in ihrem Verhalten mehr den Elementen der zweiten Gruppe sich zu nähern; es wäre aber möglich, dass wir zufällig gerade günstige Linien-Gruppen herausgegriffen haben. Beim Vergleiche zwischen Gold und Silber liegen die Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung alle in gleichem Sinne, was andeutet, dass noch mit einem Factor (A in den früheren Formeln) zu multipliciren sein wird.

§ 14. Ueber das Auftreten der Serien von Spectral-Linien.

Die angeführten Beispiele zeigen, dass in vielen Fällen bei unserer Uebertragung der Linien eines Elementes auf ein anderes Element die von Rydberg, Kayser und Runge be-

[1]) Reports of the British Association 1884 und (mit den neueren Beobachtungen von Eder und Valenta) 1895.

merkten und durch empirische Formeln dargestellten Serien theilweise gestört werden. Man wird fragen, ob eine solche Störung mit unserer Theorie vereinbar ist, und ob letztere überhaupt zur Aufstellung solcher Serien Veranlassung gibt.

Es muss zunächst hervorgehoben werden, dass die Eintheilung der Spectral-Linien in Serien nur bei den Elementen der ersten Mendelejeff'schen Gruppe nahezu gelungen ist, während bei denen der zweiten Gruppe nur vereinzelte Serien festgestellt werden konnten. Das Auftreten dieser Serien hängt demnach von den specifischen Constanten des Elements ab; und man kann nicht erwarten, dass eine allgemeine Discussion unserer transscendenten Gleichungen zu solchen Serien führen wird; nur bei speciellen Relationen zwischen den vorkommenden Constanten wird vielmehr ein solches Resultat zu erwarten sein. Deutlich ist dies auch dadurch angezeigt, dass ein bei Alkalien gefundenes empirisches Gesetz (nach welchem die Schwingungsdifferenz der Paare oder Triplets in der gleichen Serie dem Quadrate des Atomgewichtes proportional ist) bei anderen Elementen nicht bestätigt wurde.

Die von uns aufgestellten Gleichungen (18), (23), (23a), (34) haben die gemeinsame Eigenschaft, dass sich ihre Wurzeln n_s bei wachsender Grösse den ganzen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ oder π nähern. Bedeutet also n eine ganze Zahl, so kann man bei hinreichend grossem Werthe des Index s die Wurzel n_s in der Form

$$n_s = a n + \beta n^{-1} + \gamma n^{-2} + \ldots.$$

ansetzen. Nun ist n_s der Schwingungsdauer T und somit auch der Wellenlänge λ umgekehrt proportional. Demnach erhalten wir

$$\lambda^{-1} = a n + b n^{-1} + c n^{-2} + \ldots. \tag{45}$$

Diese Formel möge für eine der obigen transscendenten Gleichungen Gültigkeit haben; für eine andere dieser Gleichungen sind statt a, b, c, ... andere Werthe einzusetzen. Für

zwei verschiedene von jenen Gleichungen gelten daher Formeln der Gestalt

$$
(46) \qquad \begin{aligned} \lambda_n^{-1} &= a\,n + \sum_{s=1}^{\infty} a_s\, n^{-s}, \\ \lambda_m^{-1} &= am + \sum_{s=1}^{\infty} a_s m^{-s}. \end{aligned}
$$

Wir nehmen an, die zur Zahl n gehörige Wurzel λ_n der einen Gleichung sei identisch (oder nahezu identisch) mit der zur Zahl m gehörigen Wurzel λ_m der andern Gleichung, so dass die numerische Relation

$$
(47) \qquad \lambda_n^{-1} = \lambda_m^{-1} = a\,n + \Sigma a_s n^{-s} = a\,m + \Sigma\, a_s m^{-s}
$$

besteht. Nehmen wir ferner an, es sei in Folge der speciellen Constanten des Atoms m sehr gross gegen n, so dass

$$
m = \mu + n
$$

gesetzt werden kann, wo μ eine sehr grosse Zahl bezeichnet. An Stelle der zweiten Gleichung (46) erhalten wir dann

$$
(48) \qquad \lambda_m^{-1} = \alpha(\mu + n) + \Sigma \alpha_s(\mu + n)^{-s},
$$

und mit Hülfe von (47) folgt durch Elimination von n

$$
a\,\lambda_m^{-1} - \alpha\,\lambda_n^{-1} = a\,\alpha\,\mu + a\,\Sigma\,\alpha_s\,(\mu + n)^{-s} - \alpha\,\Sigma\,a_s n^{-s}.
$$

Es ist also

$$
\lambda_m^{-1} = \lambda_n^{-1} = \frac{a\,\alpha\,\mu}{a - \alpha} + \frac{a}{a - \alpha} \sum \alpha_s\,(\mu + n)^{-s} - \frac{\alpha}{a - \alpha} \sum a_s n^{-s}.
$$

Lassen wir m und n gleichseitig um eine Einheit abnehmen, so werden die Wellenlängen λ_{n-1} und λ_{m-1} nur wenig von einander verschieden sein; dasselbe wird für λ_{n-r} und λ_{m-r} gelten, wenn die Zahl r hinreichend klein ist. Die Gleichungen (46) bezw. (48) ergeben

$$
\begin{aligned} \lambda_{n-r}^{-1} &= a(n - r) + \Sigma a_s (n - r)^{-s}, \\ \lambda_{m-r}^{-1} &= \alpha(\mu + n - r) + \Sigma \alpha_s(\mu + n - r)^{-s}; \end{aligned}
$$

und die Elimination von n ergibt:

$$a\lambda_{m-r}^{-1} - a\lambda_{n-r}^{-1} = a\,a\,\mu + a\,\Sigma a_s(\mu + n - r)^{-s} - a\,\Sigma a_s(n-r)^{-s}.$$

Setzen wir nun

$$\lambda_{m-r}^{-1} - \lambda_{n-r}^{-1} = \varepsilon_r,$$

so wird

$$\lambda_{n-r}^{-1} = \frac{a(a\mu - \varepsilon_r)}{a-a} + \frac{a}{a-a}\Sigma a_s(\mu + n - r)^{-s} - \frac{a}{a-a}\Sigma a_s(n-r)^{-s},$$

$$\lambda_{m-r}^{-1} = \frac{a(a\mu + \varepsilon_r)}{a-a} + \frac{a}{a-a}\Sigma a_s(\mu + n - r)^{-s} - \frac{a}{a-a}\Sigma a_s(n-r)^{-s}.$$

Soll nun, wie schon hervorgehoben wurde, μ eine sehr grosse, ε_r eine sehr kleine Zahl sein, und sind auch $a\mu$ und $a\mu$ gross gegen ε_r, so erleidet die Differenz $a\mu - \varepsilon_r$ bei Veränderung von r nur sehr geringe Aenderungen, kann also als annähernd constant betrachtet werden; dasselbe gilt für die Summe $a\mu + \varepsilon_r$; wir setzen demnach

$$a' = a\,a\,\mu - \varepsilon_r.$$
$$a_0 = a\,a\,\mu + \varepsilon_r.$$

Ferner können, wenn μ gross ist, alle negativen Potenzen von $(\mu + n - r)$ vernachlässigt werden, denn die Zahl r darf ja gewisse Grenzen nicht überschreiten. Unter diesen Annahmen erhalten wir die folgenden Näherungsformeln

$$(49)\quad \begin{aligned} \lambda_{n-r}^{-1} &= \frac{a_0}{a-a} - \frac{a}{a-a}\Sigma a_s(n-r)^{-s}, \\ \lambda_{m-r}^{-1} &= \frac{a_0}{a-a} - \frac{a}{a-a}\Sigma a_s(n-r)^{-s}. \end{aligned}$$

Hiermit sind in der Nähe einer Stelle des Spectrums, wo zwei verschiedene von den obigen transscendenten Gleichungen eine gemeinsame Wurzel haben (wo also zweien verschiedenen Gruppen von Linien eine Wellenlänge gemeinsam ist), die voraufgehenden reciproken Wellenlängen (Wurzeln n_s) angenähert dargestellt.

Es handelt sich dabei selbstverständlich nicht nothwendig um convergente Reihen-Entwicklungen, sondern nur um einen Ansatz für numerische Rechnung. Solche Stellen, wo eine Gleichung von der Form (47) besteht, werden nicht bei jedem Elemente in dessen Spectrum vorkommen, sondern nur bei besonderer Beziehung zwischen den Constanten des Elements. Genau ist die Relation (47) wahrscheinlich niemals erfüllt, sondern immer nur näherungsweise. Vorausgesetzt ist ferner, dass μ und ε die angegebenen Grössenverhältnisse aufweisen.

Die Gleichungen (49) zeigen nun genau den Typus der Formeln, welche Kayser und Runge für ihre Paare zusammengehöriger Serien aufgestellt haben. Es ist nämlich das wichtige Gesetz erfüllt, dass zwei zusammengehörige Serien sich nur durch das constante Glied unterscheiden, während die Coefficienten der negativen Potenzen des Index $(n - r)$ in beiden Formeln identisch sind.[1])

Dieses Gesetz ist bei den Alkalien (*Li*, *Na* und *K*) nur näherungsweise erfüllt; wahrscheinlich ist bei diesen die Zahl μ nicht gross genug, um die von uns vorgenommenen Vernachlässigungen zu rechtfertigen.

Die Differenz zusammengehöriger Schwingungszahlen wird durch die Zahl ε_r dargestellt; diese Differenz wird mit wachsendem Index r (d. h. abnehmender Wellenlänge) thatsächlich abnehmen (während wir sie als nahezu constant behandelten), was mit den Beobachtungen von Kayser und Runge übereinstimmt. Für $r = 0$, d. h. für die gemeinsame Wurzel der beiden transscendenten Gleichungen, wird sie gleich Null; für diesen Fall sind also die Formeln (49) nicht mehr anwendbar.

Die Rechnungen von Kayser und Runge zeigen, dass in der Praxis

$$a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_3 = 0$$

[1]) Vgl. besonders die Zusammenstellung der Neben-Serien in Nr. IV der auf p. 463 citirten Abhandlungen von Kayser und Runge.

gesetzt werden kann; ihre Formeln sind nämlich von der Gestalt (vgl. oben p. 464, 468, 471, 478 f.):

$$\lambda_{n-r}^{-1} = A - A_1(n-r)^{-2} - A_2(n-r)^{-4},$$
$$\lambda_{m-r}^{-1} = B - A_1(n-r)^{-2} - A_2(n-r)^{-4}.$$

Die Zahl n hat bei den genannten Autoren meist den Werth 8, 9 oder 10, r successive die Werthe 1, 2, 3, 4, 5. Es ist aber zu beachten, dass unsere Zahl n nicht nothwendig mit der entsprechenden Zahl bei Kayser und Runge übereinstimmt. Bis jetzt ist nemlich der Anfangspunkt $n = 0$ noch willkürlich gelassen; durch die Substitution

$$n = n_0 + N \tag{50}$$

kann man ihn an eine beliebige Stelle verlegen; dann wird

$$\frac{1}{n-r} = \frac{1}{n_0 + N - r} = \frac{1}{N-r}\left(1 - \frac{n_0}{N-r} + \frac{n_0^2}{(N-r)^2} - \ldots\right),$$

wenn $n_0 < N - r$ ist. Unter dieser Voraussetzung ändern also die Formeln (49) durch die Substitution (50) ihren Charakter nicht. Ist aber $n_0 > N - r$, so wird

$$\frac{1}{n-r} = \frac{1}{n_0}\left(1 - \frac{N-r}{n_0} + \frac{(N-r)^2}{n_0^2} - \ldots\right),$$

also:

$$\lambda_{n-r}^{-1} = C_0 + C_1(N-r) - C_2(N-r)^2 + \ldots;$$

wir erhalten also eine Formel von dem Typus, wie sie (mit dem Werthe $C_1 = 0$) Deslandres für die Bandenspectra der Metalloide empirisch aufgestellt hat.[1])

Durch directes Einsetzen des in (50) gegebenen Werthes entsteht eine Gleichung der Form

$$\lambda_{n-r}^{-1} = C_0 - C_1(n_0 + N - r)^{-1} - C_2(n_0 + N - r)^{-2} - \ldots.$$

[1]) Comptes rendus, t. 104, 106, 110, 112 (1887—91).

welche sich an die Balmer'sche Formel für Wasserstoff und an die Rydberg'sche Verallgemeinerung derselben anschliesst.

Wenn zufällig drei unserer obigen transscendenten Gleichungen an der einen Stelle des Spectrums eine gemeinsame Wurzel haben, so entstehen drei zusammengehörige Formeln des Typus (49), also nicht Paare sondern Triplets von Linien, die Serien bilden (vgl. das Vorkommen bei *Mg*, *Ca*, *Sr*, *Zn*, *Cd*, *Hg*).

Um eine Formel der Gestalt (49) an Stelle der ursprünglichen (45) zu setzen, bedarf es natürlich nicht des Hinzutretens einer zweiten Gleichung; denn numerisch müssen die aus (49) berechneten Werthe von λ_{n-r} mit den aus (45) berechneten übereinstimmen. Auch die Wurzeln einer einzigen Gruppe (aus Linie von § 5) können daher in der Nähe einer bestimmten Stelle des Spectrums durch eine Formel des Typus (49) angenähert dargestellt werden. So scheint es beim Lithium und Wasserstoff zu sein.

Wenn die Voraussetzungen, nach denen wir in § 6 Beziehungen zwischen den Spectren verschiedener Elemente aufgestellt haben genau erfüllt wären, müsste beim Uebergang von einem Elemente zum anderen aus jeder Serie wiederum eine Serie entstehen. Da aber diese Voraussetzungen wohl nur annähernd zutreffen, da ferner unsere transscendenten Gleichungen nicht in gleicher Weise von den Constanten des Atoms abhängen, so ist es natürlich, wenn bei diesem Uebergange die Serien in mannigfacher Weise gestört werden, wie es die obigen Beispiele zeigen (vgl. die mitgetheilten Tabellen). Andererseits zeigen diese Beispiele, dass man auf diesem Wege (wie beim Baryum, Silber und Gold) auch neue Serien auffinden kann.

Endlich bliebe zu untersuchen, ob das Auftreten der Serien etwa durch die transscendente, noch nicht näher untersuchte Gleichung (16) bedingt sein kann.

§ 15. Versuch zur Trennung der verschiedenen Linien-Gruppen.

Der weiteren numerischen Behandlungen der aufgestellten Gleichungen steht eine wesentliche Schwierigkeit entgegen, da man zuerst die Aufgabe hat, die verschiedenen, in § 5 aufgestellten Linien-Gruppen von einander zu trennen.

Im Folgenden ist der Versuch gemacht, die der Gleichung (23), also der sechsten Gruppe angehörigen Linien von den übrigen zu trennen. Der Rechnung wurden die Beobachtungen am Magnesium zu Grunde gelegt. Die Wurzeln nähern sich bei wachsendem Werthe von $\xi = n\varrho$ den ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$. Die entsprechenden Schwingungszahlen (λ^{-1}) müssen sich also annähernd verhalten, wie die auf einander folgenden ungeraden ganzen Zahlen.

Es wurden nun die Differenzen der Logarithmen der aufeinander folgenden ungeraden Zahlen gebildet. Andererseits wurden die Differenzen der Logarithmen der beim Magnesium beobachteten Schwingungszahlen gebildet, die Differenzen dieser Differenzen u. s. f., bis sich eine Differenz ergab, die annähernd mit der Differenz der Logarithmen successiver ungerader Zahlen übereinstimmte. Dies trat zuerst bei dem Verhältnisse 21 : 19 ein; es ist nemlich

$$\log 21 - \log 19 = 0{,}43465.$$

Im Magnesium-Spectrum kommt nun die Wellenlänge 5711,56 vor; und es ist

$$\log (5711{,}56)^{-1} + \log \frac{21}{19} = \log (5167{,}7)^{-1}.$$

Im Magnesium-Spectrum kommt aber nicht die Wellenlänge 5167,7, sondern 5167,55 vor; demnach ist in der folgenden Tabelle die Zahl 5167,7 in die zweite Columne als berechnet, die Zahl 5167,55 als beobachtet eingetragen. Es ist ferner

$$\log (5167{,}55)^{-1} + \log \frac{23}{21} = \log (4718{,}1)^{-1},$$

während die Zahl 4703,33 einer beobachteten Wellenlänge entsprechen würde. Die erste Columne der Tabelle enthält die zugeordneten ganzen Zahlen 19, 21, 23, ... In dieser Weise ist die Rechnung fortgeführt bis an das Ende der beobachteten Linien im Magnesium-Spectrum. Die Columne der beobachteten Linien weist einige Lücken auf. Die vierte Columne gibt die entsprechenden Wellenlängen des Calcium, und zwar gemäss der in § 7 aufgestellten Zuordnung; die eingeklammerten Zahlen sind nur berechnet und nicht beobachtet.

Die fünfte Columne enthält in gleicher Weise die zugeordneten Linien des Cadmium, die sechste diejenigen des Quecksilbers. Wo der berechneten Linie eine beobachtete annähernd entsprach, ist diese letztere in die Tabelle eingesetzt. Der Buchstabe B. bezieht sich wieder auf die Funken-Spectra in den Publicationen der British Association.

Im Funken-Spectrum liegen die Quecksilber-Linien so dicht, dass ihre Aufführung in der Tabelle keine besondere Beweiskraft hat. Ich habe mich aber überzeugt, dass auch im Strontium, Baryum und Zink eine ähnliche Serie ausgesondert werden kann.

m	Magnesium		Zugeordnete Linien des		
	berechnet	beobachtet	Calcium	Cadmium	Quecksilber
19	Ausgangspunkt	5711,56	—	—	—
21	5167,7	5167,55	6102,99	—	—
23	4718,1	4703,33	(5558,0)	—	—
25	4352,0	4352,18	(5143,1)	—	—
27	4029,8	—	(4762,1)	(5322,9)	(6457,8)
29	3751,9	3765 B.	(4449,2)	(4923,7)	(6034,1)
31	3522,1	—	4143,0 B.	4662,69	5781,9 B.
33	3308,6	3330,08	3933,83	(4398,6)	5416,9 B.
35	3139,8	—	3706,18	4141,0 B.	4864,8 B.
37	2970,1	—	(3509,8)	3940,0 B.	4616,5 B.
39	2817,8	2802,80	—	3729,21	4525,1 B.
41	2666,1	2668,26	3158,98	3500,09	4246,1 B.

Hiermit sind wir an das Ende der Magnesium-Spectrums angelangt; setzen wir nun die Rechnung für Calcium fort, so ergibt sich:

m	Calcium		Zugeordnete Linien des	
	berechnet	beobachtet	Cadmium	Quecksilber
43	3012,1	3006,95	(3361,1)	4078,05
45	2807,9	—	3211.8 B.	3896.3 B.

Hiermit ist auch das Ende des Calcium-Spectrums erreicht: wir müssen daher die Rechnung im Cadmium-Spectrum fortsetzen und finden:

m	Cadmium		Zugeordnete Quecksilber-Linien
	berechnet	beobachtet	
47	3075.1	3081.03	3738.9 B.
49	2955.3	2961.64	3593,2 B.
51	2845.5	2837.01	3440.6 B.
53	2729.9	2733,97	3320.5 B.
55	2634.6	2632.29	3207,7 B.
57	2539.9	2544.84	3085.41
59	2458,7	2469.3 B.	3007.02
61	2378.1	2377.3 B.	2386.8 B.
63	2148.2	2144.45	2605,29

Es kommen in der Tabelle einige Linien vor (z. B. 5167.55 und 2668.26 beim Magnesium, 3938.33 beim Calcium), welche schon in den Serien von Kayser und Runge verwendet wurden: das dürfte nicht sein, wenn die hier ausgeschiedenen Serien wirklich einer anderen Gruppe als die früheren Serien angehören, sofern nicht zufällig mehr Coincidenzen vorkommen. Die mitgetheilten Tabellen haben daher keine andere Bedeutung als diejenige, dass sie zeigen, nach welcher Methode vielleicht eine Ausscheidung nach Gruppen möglich ist. Ich hoffe, die hier aufgeworfene Frage demnächst rechnerisch weiter verfolgen zu können.

Sollte es gelingen, hierdurch einzelne Linien des Spectrums den absoluten Zahlen (in der ersten Columne) definitiv zuzuordnen, so wäre dadurch für die Berechnung der andern charakteristischen Constanten des Elementes ein wesentlicher Schritt gethan.

Ueber die Gleichung $x^n = y^n + z^n$.

Von **F. Lindemann.**

(Eingelaufen 7. Dezember.)

Vor einiger Zeit habe ich eine Untersuchung über den Fermat'schen Satz, betreffend die Unmöglichkeit dieser Gleichung veröffentlicht, in der ein Beweis für diese Unmöglichkeit versucht wurde. Leider ist derselbe an zwei Stellen (p. 195 und 199) durch Rechenfehler entstellt, und leistet in Folge dessen nicht das verlangte. Er gibt aber insofern einen Fortschritt, als die von Abel gemachten Angaben zum ersten Male bewiesen worden sind, wonach sich die drei Zahlen x, y, z, welche obiger Gleichung genügen, durch drei ganze Zahlen p, q, r gemäss den Formeln

$$2x = p^n + q^n + r^n,$$
$$2y = p^n + q^n - r^n,$$
$$2z = p^n - q^n + r^n,$$

darstellen lassen, wenn keine der Zahlen durch n theilbar ist, im andern Falle aber, wenn z. B. z den Factor n enthält, durch die Formeln

$$2x = p^n + q^n + n^{n-1} r^n,$$
$$2y = p^n + q^n - n^{n-1} r^n,$$
$$2z = p^n - q^n + n^{n-1} r^n.$$



Die doppelten Zwischenkiefer des Menschen.

Von **Johannes Ranke.**

(Eingelaufen 6. Februar 1902.)

In Beziehung auf die Zwischenkieferfrage stehen sich bis jetzt zwei Anschauungen unvermittelt gegenüber.[1])

Auf der einen Seite vertritt eine Anzahl von Autoren die von Theodor Kölliker-Sohn nach Untersuchungen an Kalipräparaten gewonnene Anschauung, dass der Mensch wie alle Säuger jederseits nur eine Zwischenkieferanlage besitze. Oscar Schultze sagt in seinem Grundriss der Entwickelungsgeschichte des Menschen und der Säugethiere:[2]) „Die Zwischenkiefer hat Th. Kölliker zuerst mit Bestimmtheit beim Menschen nachgewiesen als zwei kleine, in der 8. bis 9. Woche auftretende Knöchelchen, die sehr bald mit dem Oberkiefer verschmelzen.“ [3])

Es bleibt bei dieser Angabe unberücksichtigt, dass unter Waldeyer's Augen Biondi durch Untersuchung von Schnittserien nachgewiesen hat, dass der Zwischenkiefer der Säugethiere aus jederseits 2 also im Ganzen aus 4 Ossificationspunkten sich entwickele.[4])

---

[1]) Die Literatur findet sich zusammengestellt bei Prof. Dr. F. Graf v. Spee, in K. v. Bardeleben: Skeletlehre. II. Abtheilung. Kopf. Jena 1896. S. 258 u. ff.

[2]) 1897. S. 221.

[3]) Kölliker Theodor. Ueber das Os intermaxillare des Menschen und die Anatomie der Hasenscharte und des Wolfsrachens. Nova Acta, Acad. L.-C. 43. Bd. 1881.

[4]) Biondi, Ueber Zwischenkiefer und Lippenkiefer-Gaumenspalte. Arch. f. Anat. u. Phys. Physiol. Abtheilung. 1886.

Derselbe, Ueber den Zwischenkiefer. Anatom. Anzeiger, 3. Bd.

Die beiden verschiedenen Ergebnisse waren 1888 bei dem Anatomen-Kongress in Würzburg von den beiden Hauptbetheiligten selbst: Th. Kölliker und Biondi vorgetragen worden. Obwohl bei dieser Gelegenheit Waldeyer die Präparate Biondi's der Versammlung persönlich demonstrirte, kam es zu keinem Ausgleich der scheinbar nicht zu vermittelnden Gegensätze.

A. v. Kölliker-Vater fand es, „was den Menschen anlange, auffallend, dass niemand nach seinem Sohne sich die Mühe gegeben habe, die erste Entwickelung der Intermaxillare an den unzweideutigen Kalipräparaten zu prüfen, welche allein ganz sichere und relativ leicht zu gewinnende Ergebnisse liefern“.[1]) —

Durch Studien über die überzähligen Knochen des menschlichen Schädels[2]) wurde ich zur Nachprüfung der Angaben über den menschlichen Zwischenkiefer veranlasst. Ich benützte, jenem Wunsche A. v. Kölliker's entsprechend, die inzwischen durch O. Schultze[3]) zu einer Methode ersten Ranges für derartige makroscopische Knochenuntersuchungen ausgebildete Kalimethode.

Als Resultat dieser Untersuchung kann ich eine naturgetreue Abbildung der Vorderansicht der Oberkieferpartie eines Embryo von 28 mm Scheitel-Steisslänge, also aus dem Anfang des 3. Monats, vorführen (Fig. 1).

S. 577 (1888). Unter den darauf geprüften Säugethieren zeigte nur das Schwein eine nur unvollkommene aber immer noch erkennbare Trennung dieser Ossifikationspunkte; am Schwein hatte Th. Kölliker seine vergleichenden Untersuchungen hauptsächlich ausgeführt.

Theodor Kölliker, Ueber die einfache Anlage des Zwischenkiefers (gegen Biondi). Anatom. Anzeiger, 3. Bd. S. 572 (1888).

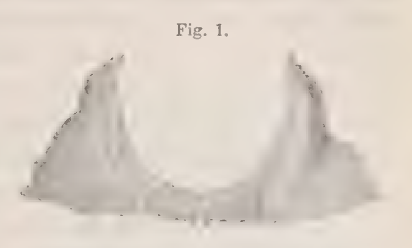
[1]) Verhandlungen der Anatomischen Gesellschaft. Versammlung in Würzburg 1888. Anatom. Anzeiger, 3 Bd. (1888). S. 579.

[2]) J. Ranke, Die überzähligen Hautknochen des menschlichen Schädeldachs. Abhandl. der kgl. bayer. Akademie d. W. II. Cl. XX. Bd. II. Abth. S. 276—464.

[3]) Oscar Schultze, Grundriss der Entwickelungsgeschichte des Menschen und der Säugethiere. Leipzig 1897. S. 459.

Die Zwischenkieferanlage erscheint jederseits, von der Vorderseite gesehen, als eine einheitliche, ganz so wie sie Th. Kölliker aus einem etwas früheren Stadium und daher noch etwas weniger entwickelt abgebildet hat. Mein Präparat entspricht in der Form sehr nahe der Form des Zwischenkiefers des nachstehend abgebildeten kindlichen Orangutan-Schädels (Fig. 2). Die definitive Form des Alveolarfortsatzes des Intermaxillare mit den Nachbarpartien, vor allem aber der Nasenfortsatz, welcher bei Th. Kölliker kaum angedeutet, ist schon ziemlich fertig ausgebildet.

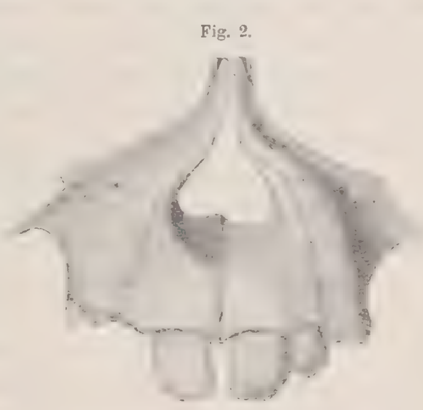
Fig. 1.



Zwischenkiefer eines menschlichen Embryo vom Anfange des dritten Monates (stark vergrössert).

Mein Bild entspricht auch sehr nahe dem von Leuckart[1]) mitgetheilten, bei welchem aber die Trennung vom Oberkiefer nur einseitig (rechts) unvollständig noch zu erkennen war.

Fig. 2.



Zwischenkiefer eines jungen Orangutan.

Bei wenig älteren Embryonen sah ich Zwischenkiefer und Oberkiefer mit einander in beginnender Verschmelzung. Diese beginnt an der oberen hinteren Ecke des Zwischenkiefer-Alveolarfortsatzes, die Trennung des Alveolarfortsatzes nach unten erscheint dann noch als mehr oder weniger tiefe Einkerbung, die Trennungsspalte zwischen dem

---

[1]) F. S. Leuckart. Untersuchungen über das Zwischenkieferbein des Menschen. Stuttgart 1840 (s. hier die ältere Literatur).

Nasenfortsatz des Zwischenkiefers und dem Stirnfortsatz des Oberkiefers bleibt etwas länger deutlich offen, aber schon bei wenig grösseren Früchten ist äusserlich von der ehemaligen Trennung nichts mehr oder fast nichts mehr zu bemerken.

Speziell hebe ich hervor, dass von einer Trennung zwischen den Alveolen der beiden Schneidezähne auf der Vorderansicht d. h. auf der alveolaren Vorderfläche der Zwischenkiefer auch nicht die leiseste Spur bemerkbar wurde.

Soweit stimmen meine Ergebnisse vollkommen mit denen Theodor Kölliker's überein.

Aber meine Ergebnisse stimmen auch vollkommen mit den Beobachtungen überein, welche Biondi an Schnittserien, also nach einer ganz anderen Methode, gefunden hat:

Seine beiden „Zwischenkiefer" stehen nicht im Ganzen neben einander, sondern im Wesentlichen hinter einander, so dass von dem zweiten auf der Aussenfläche des Alveolarfortsatzes normal nichts in Erscheinung tritt.

Der eine der beiden Ossificationscentren Biondi's für jeden Zwischenkiefer liegt im Gebiete des inneren Nasenfortsatzes: metopogener Zwischenkiefer, der andere im Gebiete des Oberkieferfortsatzes: gnathogener Zwischenkiefer. Der letztere, welchen ich mit Meckel u. A. als vorderen Zwischenkiefer bezeichnen möchte, bildet die Hauptmasse des Knochens, er ist es, den unsere Fig. 1 wiedergibt. Die beiden metopogenen oder, wie ich sagen möchte, die hinteren Zwischenkiefer, bilden (rechts und links) die hintere Alveolarwand für die beiden mittleren Schneidezähne, jeder hintere Zwischenkiefer für sich also die hintere Wand seines (des mittleren) Schneidezahns. Die hintere Alveolarwand für den äusseren Schneidezahn jederseits wird von dem äusseren Zwischenkiefer gebildet. Beide Zwischenkiefer bilden jederseits gemeinschaftlich den Zwischenkieferabschnitt des harten Gaumens.

Diese letzteren Verhältnisse, die Ausdehnung des hinteren Zwischenkiefers an der Rückwand des Alveolarfortsatzes sowie auf dem harten Gaumen, lassen sich viel leichter nachweisen als das isolirte Bestehen des äusseren Zwischenkiefers, welches

weit früher verschwindet. Im ganzen Verlauf der Bildung des 3. Monats, ja auch noch bei älteren Embryonen, sind die beiden Zwischenkieferanlagen jederseits noch im Wesentlichen vollkommen getrennt.

Die beiden Zwischenkiefer werden jederseits auf der Gaumenfläche und quer durch die Mitte der Alveole des inneren Schneidezahns durch die Sutura interincisiva Biondi, oder Sutura intermedia Leuckart, von einander getrennt.

Ueber diese Sutur, ihr Vorkommen bei erwachsenen, ihre Variationen bei diesen und embryonalen sowie jugendlichen Schädeln habe ich an anderer Stelle Bericht erstattet,[1]) worauf ich hier verweisen darf.

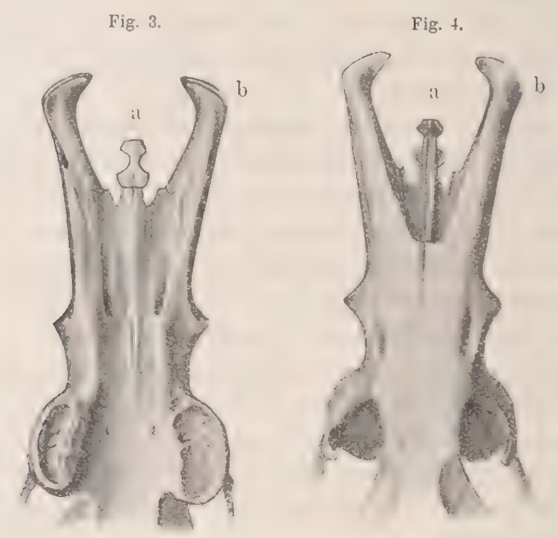
Bei der Bildung der doppelseitigen Hasenscharte trennen sich meist die Zwischenkieferanlagen in der Sutura intermedia = interincisiva von einander, die äusseren Zwischenkiefer kommen in der Mittellinie nicht zur Vereinigung und die beiden hinteren Zwischenkiefer erscheinen dadurch bei dieser Missbildung, meist unter einander verschmolzen, als ein individualisirtes Gebilde, die beiden mittleren Schneidezähne tragend.

Es erscheint mir sehr beachtenswerth, dass die Natur normal eine, dieser Missbildung bei dem Menschen u. A. ganz entsprechende, Individualisirung der hinteren Zwischenkiefer von den vorderen hervorbringt. Leuckart beschreibt in seiner umfassenden Monographie[2]) nach den Untersuchungen von Rudolphi und Meckel die Intermaxillarknochen des Schnabelthieres, Ornithorhynchus paradoxus. Das Schnabelthier zeigt danach, was ich für jüngere Schädel vollkommen bestätigen kann (Fig. 3 und 4), zwei grosse zahnlose Zwischenkiefer (b), welche Meckel als die oberen Zwischenkiefer bezeichnet. „Nach hinten enden sie zugespitzt zwischen den Kiefern und Nasenknochen, steigen eine Strecke an den letzteren hinan und biegen sich, sich einander nähernd, vorne hakenförmig nach innen, spitz endend.“ Ausser diesen beiden Knochen

[1]) J. Ranke, Ueber den Zwischenkiefer. Corresp.-Blatt der deutschen anthrop. Gesellschaft. 1901. Nr. 10.

[2]) l. c. S. 68.

konstatirten Rudolphi und Meckel noch ein drittes inneres unpaares achterförmiges Zwischenkieferbein (a), nach Meckel das untere (nach Biondi das metopogene), das von dem Ende des Gaumenfortsatzes der Oberkieferbeine, von diesen durch eine quer verlaufende Sutur getrennt ist. Das Stück schliesst sich nach oben direkt an die Crista nasalis der Oberkieferbeine und bildet auf seiner oberen Fläche selbst eine Fortsetzung dieser Crista, was dem Verhältnisse beim Menschen entspricht.



Zwischenkiefer des Schnabelthieres.
Fig. 3 Ansicht von unten, Fig. 4 von oben.

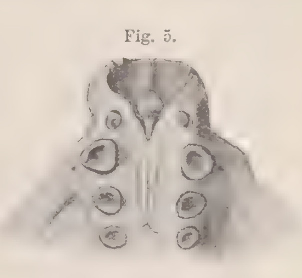
K. Gegenbaur gibt in seiner vergleichenden Anatomie der Wirbelthiere[1]) eine Abbildung davon und ist geneigt, den Knochen (a) dem Intermaxillare zuzurechnen.

Ich kann dazu noch eine weitere normale Trennung der beiden Meckel-Biondi'schen Zwischenkieferpaare hinzufügen. Bei dem Schädel eines Faulthieres, Bradypus cuculiger, der hiesigen vergleichend anatomischen Sammlung, zeigt sich der

[1]) Bd. I. 1898. S. 405.

hintere Zwischenkiefer bis auf eine schmale Verbindungsstelle mit dem Gaumentheile des Oberkiefers von diesem getrennt und isolirt. Der hintere Zwischenkiefer hat die Gestalt einer kleinen, vorne noch durch eine Nath getheilten, Kirsche, welche sich mit einem dünnen Stiele in der Mitte des Gaumentheils mit dem Oberkiefer durch eine kurze Quernath verbindet. Der Gaumentheil des Oberkiefers zeigt dem entsprechend in der Mitte einen dreieckigen mit seiner Spitze nach hinten gewendeten Ausschnitt (Fig. 5).

Fig. 5.



Zwischenkiefer des Faulthieres, Bradypus culiger von unten.



Ueber die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Convergenzgrenze.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 27. Dezember.)

In einer früheren Mittheilung „Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise" habe ich im Anschlusse an einen zuerst von Herrn Tauber bewiesenen Satz die Vermuthung ausgesprochen,[1]) dass die beiden Bedingungen:

$$\text{(A)} \qquad \lim_{\varrho=1-0} \mathfrak{P}(\varrho X) = A, \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$$

für die Convergenz von $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu$ an der Grenzstelle $x = X$ nicht hineinreichen dürften. Im folgenden will ich zeigen, dass es thatsächlich Reihen giebt, welche den Bedingungen (A) genügen — ja sogar der ersten dieser Bedingungen in dem erweiterten Umfange, dass $\lim_{x=X} \mathfrak{P}(x) = A$ beim Grenz-Uebergange auf einem beliebigen, dem Innern des Convergenzkreises angehörigen Strahle — und welche dennoch für

[1]) Sitz.-Ber. Bd. 30 (1900). p. 43. — Ich möchte bei dieser Gelegenheit bemerken, dass ein ähnlicher Satz, wie der a. a. O. p. 85 von mir formulirte, in einer anderen, mir inzwischen erst bekannt gewordenen Abhandlung des Herrn Tauber sich findet: „Ueber das Poisson'sche und das demselben conjugierte Integral" (Wiener Monatshefte, Jahrg. VI [1895], p. 118).

$x = X$ divergiren.[1]) Dabei wird es offenbar, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, gestattet sein, speciell $X = 1$ anzunehmen.

---

1. Ist die Reihe $\sum_1^\infty a_\nu$ convergent und ihre Summe $= s$, so bestehen die beiden Bedingungen:[2])

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + n \cdot a_n}{n} = 0$$

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = s \quad (\text{wo: } s_k = \sum_1^k{}^\nu a_\nu).$$

Jede dieser Beziehungen (die zweite in dem Sinne, dass der betreffende Grenzwerth irgend eine bestimmte Zahl s vorstellt) ist also nothwendig für die Convergenz, dagegen erweist sich keine allein auch als ausreichend: der Bedingung (1) genügt z. B. jede divergente Reihe, für welche $\lim_{n=\infty} n \cdot a_n = 0$ ist:[3]) der Bedingung (2) unendlich viele innerhalb endlicher Grenzen oscillirende Reihen, als deren einfachster Typus $\sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1}$ gelten kann.

Wohl aber sind beide Bedingungen zusammen genommen für die Convergenz von Σa_ν allemal auch hinreichend. Da nämlich:

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = n \cdot a_1 + (n-1) \cdot a_2 + \ldots + 1 \cdot a_n,$$

so ergiebt sich durch Addition der Beziehungen (1) und (2) unmittelbar:

$$\lim_{n=\infty} \frac{n+1}{n} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = s.$$

---

[1]) Natürlich „uneigentlich“, da ja bei eigentlicher Divergenz von $\Sigma a_\nu X^\nu$ allemal $\lim_{\varrho=1-0} \mathfrak{P}(\varrho X) = \infty$ sein müsste (vgl. a. a. O. p. 41).

[2]) Vgl. a. a. O. p. 44.

[3]) Dies folgt unmittelbar aus dem bekannten Cauchy'schen Grenzwerth-Satze: „Es ist $\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{n} = \lim_{n=\infty} (A_n - A_{n-1})$, falls der rechtsstehende Grenzwerth existirt.“

also schliesslich:

$$\lim_{n=\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu = s.$$

Es erscheint zweckmässig, dieses Resultat in folgender Weise ausdrücklich zu formuliren:

> Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die *Convergenz* von Σa_ν, also für die Existenz eines endlichen $\lim_{n=\infty} s_n = s$ lässt sich in die beiden Bedingungen (1) und (2) zerlegen, derart dass jede einzelne dieser Bedingungen als eine *nothwendige*, aber erst beide zusammen als *hinreichend* erscheinen.

Hierzu sei noch bemerkt, dass die Beziehung (1) allemal die für die Convergenz nothwendige Bedingung:

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0$$

in sich enthält. Ersetzt man nämlich in (1) n durch $(n-1)$, so folgt, dass für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ bei passender Wahl einer unteren Schranke für n die Ungleichung besteht:

$$|\, 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + (n-1) \cdot a_{n-1} \,| < (n-1) \cdot \varepsilon.$$

Da sodann auch:

$$|\, 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + (n-1) \cdot a_{n-1} + n \cdot a_n \,| < n \cdot \varepsilon,$$

so folgt durch Subtraction:

$$|\, n \cdot a_n \,| < (2n-1) \cdot \varepsilon, \text{ also a fortiori } |\, a_n \,| < 2\varepsilon,$$

d. h. schliesslich:

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0.$$

Etwas analoges findet bezüglich der Bedingung (2) nicht statt. Vielmehr sind gerade die zunächst sich darbietenden Beispiele von divergenten Reihen, welche der Bedingung (2) genügen (wie: $\sum_1^\infty {}^\nu (-1)^{\nu-1}$), durchweg von der Art, dass $\lim_{\nu=\infty} a_n$ nicht verschwindet. Es entsteht nun naturgemäss die

Frage: Giebt es wirklich divergente, der Bedingung (2) genügende Reihen, deren Glieder den Grenzwerth Null besitzen? Sobald die Existenz derartiger Reihen erwiesen ist, wird dann, wie leicht zu sehen, auch die am Anfange berührte Frage in bejahendem Sinne entschieden sein.

2. Es bedeute m_λ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$) eine unbegrenzte Folge wachsender natürlicher Zahlen von der Beschaffenheit, dass:

$$(3) \qquad \lim_{\lambda=\infty} (m_{\lambda+1} - m_\lambda) = \infty, \qquad \lim_{\lambda=\infty} \frac{m_{\lambda+1}}{m_\lambda} = 1$$

(z. B. $m_\lambda = \lambda^p$, wo $p > 1$); ferner sei Σd_ν eine divergente Reihe mit positiven, für $\nu = \infty$ verschwindenden Gliedern von der Art, dass:

$$(4) \qquad \lim_{\lambda=\infty} (d_{m_\lambda+1} + d_{m_\lambda+2} + \ldots + d_{m_{\lambda+1}}) = 2A > 0.^{1)}$$

Nun wurde gesetzt:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu = d_1 + \ldots + d_{m_1} - d_1 - \ldots - d_{m_1} \\ + d_{m_1+1} + \ldots + d_{m_2} - d_{m_1+1} - \ldots - d_{m_2} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + d_{m_{\lambda-1}+1} + \ldots + d_{m_\lambda} - d_{m_{\lambda-1}+1} - \ldots - d_{m_\lambda} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

so dass also:

[1] Die allgemeinen Beziehungen, welche zwischen den d_ν und m_λ bestehen müssen, damit ein solcher „singulärer Reihenrest“ $\sum_{m_\lambda+1}^{m_{\lambda+1}}{}^\nu d_\nu$ einen gewissen endlichen Grenzwerth besitzt, habe ich in einer früheren Arbeit („Ueber die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen und Producte“, Math. Ann. Bd. 22, 1883) ausführlich untersucht (vgl. a. a. O. p. 470; 485 ff.). Handelt es sich, wie im vorliegenden Falle, im wesentlichen nur um die Herstellung specieller Beispiele, so lassen sich die d_ν, m_ν in überaus einfacher Weise auswählen, wie im Texte weiter unten noch gezeigt wird.

$$(6)\quad a_{2m_\lambda+\mu}\begin{cases} = -\,d_{m_\lambda+\mu} \text{ für: } & 1 \leqq \mu \leqq m_{\lambda+1} - m_\lambda \\ = -\,d_{m_\lambda+\mu} \text{ für: } & (m_{\lambda+1}-m_\lambda)+1 \leqq \mu \leqq 2(m_{\lambda+1}-m_\lambda) \end{cases}$$

($\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ und $m_0 = 0$). Ist sodann wiederum $s_n = \sum_1^n {}^\nu a_\nu$, so hat man offenbar:

$$\begin{aligned} s_{2m_\lambda} &= 0 \\ s_{m_\lambda+m_{\lambda+1}} &= d_{m_\lambda+1} + d_{m_\lambda+2} + \ldots + d_{m_{\lambda+1}}, \end{aligned}$$

also:

$$\lim_{\lambda=\infty} s_{2m_\lambda} = 0, \qquad \lim_{\lambda=\infty} s_{m_\lambda+m_{\lambda+1}} = 2A.$$

Da aber die Zahlen s_{2m_λ}, $s_{m_\lambda+m_{\lambda+1}}$ die Minima und Maxima der Folge s_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) liefern, so findet man schliesslich:

$$(7)\qquad \underline{\lim}_{n=\infty}\, s_n = 0, \qquad \overline{\lim}_{n=\infty}\, s_n = 2A,$$

d. h. die Reihe Σa_ν ist uneigentlich divergent, sie oscillirt in den Grenzen 0 und $2A$.

Andererseits ergiebt sich nun:

$$\begin{aligned} s_{2m_{\lambda-1}+1} &= d_{m_{\lambda-1}+1} \\ s_{2m_{\lambda-1}+2} &= d_{m_{\lambda-1}+1} + d_{m_{\lambda-1}+2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{m_{\lambda-1}+m_\lambda} &= d_{m_{\lambda-1}+1} + d_{m_{\lambda-1}+2} + \ldots + d_{m_\lambda} \\ s_{m_{\lambda-1}+m_\lambda+1} &= \phantom{d_{m_{\lambda-1}+1} + {}} d_{m_{\lambda-1}+2} + \ldots + d_{m_\lambda} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{2m_\lambda-1} &= \phantom{d_{m_{\lambda-1}+1} + d_{m_{\lambda-1}+2} + \ldots + {}} d_{m_\lambda} \\ s_{2m_\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} & s_{2m_{\lambda-1}+1} + s_{2m_{\lambda-1}+2} + \ldots + s_{2m_\lambda} \\ & = (m_\lambda - m_{\lambda-1})\,(d_{m_{\lambda-1}+1} + d_{m_{\lambda-1}+2} + \ldots + d_{m_\lambda}). \end{aligned}$$

Daraus folgt weiter:

$$(8) \quad \sum_1^{2m_\lambda} {}^\nu s_\nu = m_1(d_1 + \dots + d_{m_1}) + (m_2 - m_1)(d_{m_1+1} + \dots + d_{m_2}) + \dots \\ \dots + (m_\lambda - m_{\lambda-1})(d_{m_{\lambda-1}+1} + \dots + d_{m_\lambda})$$

und sodann mit Benützung des Cauchy-Stolz'schen Grenzwerthsatzes:

$$(9) \quad \lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{2m_\lambda} \cdot \sum_1^{2m_\lambda} {}^\nu s_\nu = \lim_{\lambda=\infty} \frac{(m_\lambda - m_{\lambda-1})(d_{m_{\lambda-1}+1} + \dots + d_{m_\lambda})}{2(m_\lambda - m_{\lambda-1})} \\ = A.$$

Bedeutet jetzt n eine ganz beliebige natürliche Zahl, so kann man allemal setzen:

$$2\, m_\lambda \leqq n < 2\, m_{\lambda+1}.$$

Alsdann hat man:

$$\sum_1^{2m_\lambda} {}^\nu s_\nu \leqq \sum_1^{n} {}^\nu s_\nu \leqq \sum_1^{2m_{\lambda+1}} {}^\nu s_\nu$$

und, wegen:

$$\frac{1}{2\, m_{\lambda+1}} < \frac{1}{n} \leqq \frac{1}{2 m_\lambda},$$

auch:

$$\frac{1}{2\, m_{\lambda+1}} \cdot \sum_1^{2m_\lambda} {}^\nu s_\nu < \frac{1}{n} \cdot \sum_1^{n} {}^\nu s_\nu \leqq \frac{1}{2 m_\lambda} \cdot \sum_1^{2m_{\lambda+1}} {}^\nu s_\nu,$$

anders geschrieben:

$$\frac{m_\lambda}{m_{\lambda+1}} \cdot \left(\frac{1}{2\, m_\lambda} \cdot \sum_1^{2m_\lambda} {}^\nu s_\nu \right) < \frac{1}{n} \cdot \sum_1^{n} {}^\nu s_\nu \leqq \frac{m_{\lambda+1}}{m_\lambda} \cdot \left(\frac{1}{2\, m_{\lambda+1}} \cdot \sum_1^{2m_{\lambda+1}} {}^\nu s_\nu \right),$$

und somit schliesslich mit Benützung von Gl. (3) und (9):

$$(10) \quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_1^{n} {}^\nu s_\nu = A.$$

Die Reihe $\sum a_\nu$ besitzt also in der That die am Schlusse von Nr. 1 bezeichneten Eigenschaften.[1])

[1]) Auf einem weit weniger elementaren, ja sogar in seinen Grundlagen äusserst complicirten Wege, kann man — worauf mich Herr

Um Reihen dieser Art in der denkbar einfachsten Art wirklich herzustellen, wird man etwa alle diejenigen d_ν, welche in dem Reihen-Schema (5) jedesmal eine Zeile bilden, einander gleich setzen und zwar:

$$(11) \qquad d_\nu = \frac{2A}{m_{\lambda+1} - m_\lambda} \quad \text{für: } m_\lambda + 1 \leqq \nu \leqq m_{\lambda+1},$$

also:

$$(12) \quad a_{2m_\lambda+\mu} \begin{cases} = \dfrac{2A}{m_{\lambda+1}-m_\lambda} \text{ für: } & 1 \leqq \mu \leqq m_{\lambda+1} - m_\lambda \\ = -\dfrac{2A}{m_{\lambda+1}-m_\lambda} \text{ für: } & (m_{\lambda+1}-m_\lambda)+1 \leqq \mu \leqq 2(m_{\lambda+1}-m_\lambda). \end{cases}$$

An die Stelle der Gleichung (4) tritt dann die folgende, für jedes $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ gültige:

$$(13) \qquad d_{m_\lambda+1} + d_{m_\lambda+2} + \ldots + d_{m_{\lambda+1}} = 2A.$$

Die so definirte Reihe Σa_ν genügt wiederum der Beziehung (10), während sie andererseits in den Grenzen 0 und A oscillirt und auf Grund der ersten Bedingung (3) $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$ wird. Dabei wird man schliesslich noch die m_λ am einfachsten etwa in der Weise fixiren, dass man setzt $m_{\lambda+1} - m_\lambda = (\lambda+1)^p$ oder auch $m_\lambda = \lambda^{p+1}$, wo p eine natürliche Zahl bedeutet.

3. Setzt man jetzt:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu,$$

L. Fejér aufmerksam gemacht hat — die Existenz derartiger Reihen mit Hülfe eines Satzes nachweisen, den letzterer in den Comptes rendus (10. Dezember 1900) mitgetheilt hat. Darnach genügt die Summe einer Fourier'schen Reihe, welche eine stetige (oder nur mit gewöhnlichen Sprüngen behaftete) Function darstellt, durchweg der Bedingung (10). Da es nun nach Du Bois-Reymond stetige Functionen mit divergenter Fourier'scher Reihen-Entwicklung giebt, so liefert jede solche Reihe, wenn man der Veränderlichen den Werth einer Divergenz-Stelle beilegt, ein Beispiel der verlangten Art. (Vgl. im übrigen die Bemerkung am Schlusse von Nr. 3.)

wo Σa_ν eine Reihe von der eben construirten Art vorstellt, so hat man, wegen $\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n{}' s_\nu = A$, nach einem bekannten, von Herrn Frobenius bewiesenen Satze[1]) zunächst:

$$\lim_{\varrho=1-0} \mathfrak{P}(\varrho) = A,$$

wenn ϱ eine positive reelle Veränderliche bedeutet. Der betreffende Satz lässt sich aber, wie weiter unten (s. Nr. 6) noch gezeigt werden soll, analog wie der Abel'sche Satz über den Grenzwerth einer für $x = 1$ noch convergenten $\mathfrak{P}(x)$,[2]) dahin erweitern, dass aus $\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n{}' s_\nu = A$ allemal geschlossen werden kann:

$$\lim_{x=1} \mathfrak{P}(x) = A,$$

wenn x auf einem beliebigen Strahle (bezw. einer beliebigen den Einheitskreis nicht tangirenden Curve) aus dem Innern des Einheitskreises der Stelle 1 zustrebt. Damit wäre dann aber die zu Anfang ausgesprochene Behauptung vollständig bewiesen, d. h. es gilt der Satz:

Die Bedingungen:

$$\lim_{x=1} \sum_1^\infty{}' a_\nu x^\nu = A, \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$$

sind für die Convergenz von Σa_ν zwar nothwendig, aber keineswegs ausreichend.

Man bemerke noch, dass bei geeigneter Auswahl der a_ν die Reihe $\Sigma | a_\nu - a_{\nu+1} |$ convergent ausfällt, somit $\Sigma a_\nu x^\nu$ noch auf dem ganzen Einheitskreise mit Ausnahme der einzigen Stelle $x = 1$ convergirt und zwar, nach Ausschluss eines beliebig kleinen, die Stelle 1 umgebenden Bogens, gleichmässig. Definirt man nämlich die a_ν durch die Gleichungen (12), so wird im allgemeinen:

$$a_\nu - a_{\nu+1} = 0,$$

[1]) Journal f. Math. Bd. 89 (1880), p. 262.

[2]) Vgl. Sitz.-Ber. Bd. 27 (1897), p. 347.

nur:

$$(14)\quad \begin{cases} a_{2m_\lambda} - a_{2m_\lambda+1} = -\left(\dfrac{1}{m_\lambda - m_{\lambda-1}} + \dfrac{1}{m_{\lambda+1} - m_\lambda}\right) \\ a_{m_\lambda+m_{\lambda+1}} - a_{m_\lambda+m_{\lambda+1}+1} = \dfrac{2}{m_{\lambda+1} - m_\lambda} \end{cases}$$

(wenn man noch der Einfachheit halber $2A = 1$ annimmt). Darnach wird aber $\Sigma\, |a_\nu - a_{\nu+1}|$ allemal convergent, wenn die m_λ so gewählt werden, dass $\Sigma (m_{\lambda+1} - m_\lambda)^{-1}$ convergirt, also z. B. $m_{\lambda+1} - m_\lambda = (\lambda + 1)^p$ oder auch $m_\lambda = \lambda^{p+1}$, wo $p > 2$.

Die zur Potenzreihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ gehörige Randfunction $f(x)$ ist dann bis in beliebige Nähe der Stelle $x = 1$ vollkommen stetig und für $x = 1$ selbst noch „nach Innen" stetig. Fraglich bleibt nur noch das Verhalten von $f(x)$ für die der Stelle $x = 1$ benachbarten Randpunkte, also das Verhalten von $f(e^{\vartheta i})$ in der Nähe von $\vartheta = 0$. Jedenfalls erscheint die Stetigkeit auch hier keinesfalls a priori ausgeschlossen. Gelänge es, dieselbe an irgend einem zweckmässig gewählten Beispiele der vorliegenden Art wirklich festzustellen, so wäre damit eine Frage in verneinendem Sinne entschieden, die ich in der zu Anfang citirten Arbeit noch als eine offene bezeichnet habe:[1]) nämlich, ob die vollkommene Stetigkeit der Randfunction stets auch die durchgängige Convergenz von $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ nach sich ziehen müsse. Durch die blosse Existenz von stetigen Functionen $\psi(\vartheta)$ mit divergenter Fourier'scher Reihenentwickelung wird, wie a. a. O. des näheren ausgeführt ist, die Möglichkeit jener Annahme noch keineswegs beseitigt.

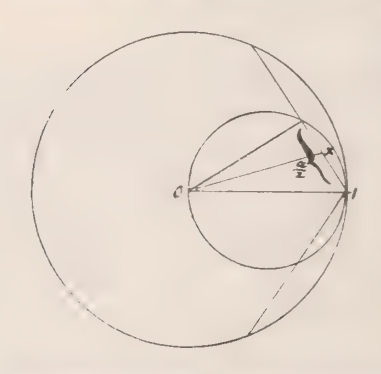
4. Um den Frobenius'schen Satz in der angedeuteten Weise zu verallgemeinern schicke ich zunächst den folgenden Hülfssatz voraus:[2])

---

[1]) a. a. O. p. 98.

[2]) Dieser Hülfssatz ist auch geeignet, die etwas weniger einfache, einen analogen Zweck verfolgende Betrachtung zu ersetzen, welche ich beim Beweise des verallgemeinerten Abel'schen Satzes (a. a. O. p. 348) benützt habe.

Zieht man vom Punkte 1 aus zwei zur reellen Axe symmetrische, dem Einheitskreise angehörige Sehnen, deren Länge $= a$ sein möge, und beschreibt um den Punkt $\frac{1}{2}$ einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}$, bezeichnet sodann mit (X) denjenigen zusammenhängenden Bereich, welcher von diesem Kreise und den beiden Sehnen begrenzt wird, so hat man:



$$(15)\qquad \frac{|1-x|}{1-|x|} < \gamma = \frac{4}{a}$$

für alle von 1 verschiedenen Stellen x im Innern und auf der Begrenzung von (X).

Beweis. Man bemerke zunächst, dass der mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $\frac{1}{2}$ beschriebene Kreis alle vom Punkte 1 aus gezogene Sehne halbirt. Wird sodann x für's erste auf einer der begrenzenden Sehnen von der Länge a angenommen, so hat man:

$$|x|^2 = 1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - |1-x|\right)^2$$
$$= 1 - a\cdot|1-x| + |1-x|^2,$$

also:

$$1 - |x|^2 = |1-x|\cdot(a - |1-x|)$$
$$> |1-x|\cdot\frac{a}{2}$$

(wobei das Gleichheitszeichen nur für den einen Fall $|1-x| = \frac{a}{2}$ gilt, d. h. wenn x im Mittelpunkte der betreffenden Sehne liegt). Daraus folgt weiter:

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} < \frac{2}{a}\cdot|1+x| < \frac{4}{a}\cdot$$

Liegt jetzt x auf einer anderen vom Punkte 1 aus gezogenen Sehne mit der Länge a', wobei dann allemal $a' > a$, so hat man auf Grund des eben gewonnenen Resultates:

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} < \frac{4}{a'}, \text{ also a fortiori } < \frac{4}{a},$$

womit der ausgesprochene Hülfssatz bewiesen ist.

5. Unter dem Grenzübergange $\lim\limits_{x=1}$ soll im folgenden ein für allemal verstanden werden, dass x auf einer beliebigen, dem Bereiche (X) angehörigen Curve der Stelle 1 zustrebt und somit der Ungleichung (15) genügt.

Alsdann gilt zunächst der folgende Satz:[1])

Ist:

$$(16^a) \qquad s_n = \sum_1^n{}^{\nu} a_\nu \text{ und } \lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = A$$

(wo A eine bestimmte Zahl incl. Null), so hat man:

$$(16^b) \qquad \lim_{x=1} (1-x) \cdot \sum_1^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu = A.$$

Beweis. Setzt man $\sum\limits_1^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu = \mathfrak{P}(x)$, so ergiebt sich durch Anwendung einer bekannten Transformation:[2])

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(x) &= (1-x) \cdot \sum_1^\infty{}^{\nu} s_\nu x^\nu \\ &= (1-x) \cdot \left\{ \sum_1^n{}^{\nu} s_\nu x^\nu + \sum_{n+1}^\infty s_\nu x^\nu \right\} \end{aligned}$$

und daher:

$$(17) \qquad |\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \cdot \left\{ \sum_1^n{}^{\nu} |s_\nu| + \sum_{n+1}^\infty |s_\nu| \cdot |x|^\nu \right\}.$$

[1]) Verallgemeinerung des Hülfssatzes II auf p. 49 der Sitz.-Ber., Bd. 30 (1900).

[2]) Vgl. a. a. O. p. 47. Dass die Voraussetzung (16a) allemal die Convergenz von $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| < 1$ nach sich zieht, ist leicht zu ersehen. Vgl. im übrigen auch Nr. 7.

Wegen $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot |s_n| = |A|$ hat jede Zahlenfolge $\frac{|s_\nu|}{\nu}$ für $\nu = (m+1), (m+2), \ldots$ *in inf.* eine endliche obere Grenze, welche mit σ_m bezeichnet werden möge. Darnach ergibt sich weiter:

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \left\{ \sigma_0 \cdot \sum_1^n \nu + \sigma_n \cdot \sum_{n+1}^\infty \nu \cdot |x|^\nu \right\}$$

$$< |1-x| \cdot \left\{ \tfrac{1}{2} \sigma_0 \cdot n(n+1) + \sigma_n \cdot \frac{1}{(1-|x|)^2} \right\}$$

und somit:

$$|(1-x) \cdot \mathfrak{P}(x)| < \tfrac{1}{2} \sigma_0 \cdot n(n+1) \cdot |1-x|^2 + \sigma_n \cdot \left(\frac{|1-x|}{1-|x|} \right)^2$$

$$< \tfrac{1}{2} \sigma_0 \cdot n(n+1) \cdot |1-x|^2 + \gamma^2 \cdot \sigma_n \text{ (nach Ungl. (15))}.$$

Es werde nun zunächst angenommen, dass $A = 0$. Alsdann kann σ_n durch passende Wahl von n beliebig klein, etwa:

$$\gamma^2 \cdot \sigma_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

gemacht werden, wenn ε eine positive Zahl von vorgeschriebener Kleinheit bedeutet. Wird jetzt noch x derartig eingeschränkt, dass:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sigma_0 \cdot n(n+1) \cdot |1-x|^2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\text{also: } |1-x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma_0 \cdot n(n+1)}}\right),$$

so hat man:

$$|(1-x) \cdot \mathfrak{P}(x)| < \varepsilon,$$

also schliesslich:

$$(18) \quad \lim_{x=1} (1-x) \cdot \mathfrak{P}(x) = 0 \quad \text{d. h.} \quad \lim_{x=1} (1-x) \cdot \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = 0.$$

Bedeutet jetzt A eine beliebige von Null verschiedene Zahl, so kann die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = A \quad \text{d. h.} \quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n {}^\nu a_\nu = A$$

zunächst folgendermaassen geschrieben werden:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n {}^\nu (a_\nu - A) = 0.$$

Alsdann ergiebt sich aber auf Grund des eben gewonnenen Resultates (Gl. (18)):

$$\lim_{x=1} (1-x) \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} (a_\nu - A) \cdot x^\nu = 0,$$

anders geschrieben:

$$\lim_{x=1} (1-x) \cdot \left\{ \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu - A \frac{x}{1-x} \right\} = 0$$

also schliesslich, wie behauptet:

$$\lim_{x=1} (1-x) \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu = A.$$

6. Da nach dem Cauchy'schen Grenzwerth-Satze die Beziehung $\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = A$ sicher erfüllt ist, wenn $\lim_{n=\infty} a_n = A$, so folgt noch, dass auch diese letztere Bedingung für die Existenz der Relation (16^b) hinreichend ist.

Ersetzt man ferner in dem zuvor gewonnenen Satze a_ν durch s_ν, so ergiebt sich:

Ist:

$$(19^a) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} s_\nu = A,$$

so hat man:

$$(19^b) \quad \lim_{x=1} (1-x) \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} s_\nu x^\nu = A, \quad \text{also:} \quad \lim_{x=1} \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu = A,$$

d. h. man erhält die oben angekündigte Verallgemeinerung des Frobenius'schen Satzes.

Da wiederum die Bedingung (19^a) sicher erfüllt ist, wenn $\lim_{n=\infty} s_n = A$, so resultirt noch als specieller Fall der verallgemeinerte Abel'sche Satz.

7. Der Satz von Nr. 5 gestattet unmittelbar noch die folgende Verallgemeinerung:[1])

---

[1]) Zugleich Verallgemeinerung des a. a. O. p. 49, Fussnote, angeführten Satzes. (NB. Daselbst steht in Folge eines Druckfehlers

$$\lim_{\varrho=1} (1-\varrho)^{1-p} \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu \varrho^\nu \text{ statt: } \lim_{\varrho=1} (1-\varrho)^{p} \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu \varrho^\nu).$$

Ist:

$$(20^a) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n^p} \sum_1^n{}^\nu a_\nu \equiv \lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n^p} = A \quad (p > 0),^{1)}$$

so ist $\sum a_\nu x^\nu$ convergent für $|x| < 1$ und man hat:

$$(20^b) \qquad \lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \Gamma(p+1) \cdot A.$$

Beweis: Aus (20^a) folgt, dass auch: $\lim_{n=\infty} \frac{s_{n-1}}{n^p} = A$ und somit:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^p} \equiv \lim_{n=\infty} \frac{s_n - s_{n-1}}{n^p} = 0.$$

Da sodann für $\varrho < 1$: $\lim_{n=\infty} n^p \cdot \varrho^n = 0$, so ergiebt sich durch Multiplication mit der vorhergehenden Gleichung:

$$\lim_{n=\infty} a_n \varrho^n = 0,$$

sodass $\sum a_\nu x^\nu$ sicher für $|x| < \varrho$, also schliesslich für $|x| < 1$ convergirt.

Man hat dann wiederum, wie in Nr. 5 (s. Ungl. (17)):

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \cdot \left\{ \sum_1^n{}^\nu |s_\nu| + \sum_{n+1}^\infty{}^\nu |s_\nu| \cdot |x|^\nu \right\}.$$

Aus der Voraussetzung:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n^p} = A$$

folgt mit Berücksichtigung der bekannten Beziehung:

---

1) Die zum Beweise dienlichen Schlüsse bleiben auch noch gültig für: $0 > p > -1$. Die Reihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ ist alsdann für die Stelle $x = 1$ nicht mehr divergent, sondern convergent und zwar mit der Summe $\lim_{n=\infty} s_n = 0$, wenn $p < 0$. Die Gleichung (20^b) macht also in diesem Falle eine bestimmte Aussage über die Art des Nullwerdens von $\lim_{x=1} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$. Für den Fall $p = 0$ resultirt wiederum der Abel'sche Satz: $\lim_{x=1} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \lim_{n=\infty} s_n$.

$$(21) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{(p+n)_n}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}$$

$$\left(\text{wo: } (p+n)_n = \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}{1\cdot 2\dots n} = \frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(n+1)}\right)$$

dass:

$$(22) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_n}{(p+n)_n} = \Gamma(p+1)\cdot A.$$

Jede Zahlenfolge $\frac{|s_\nu|}{(p+\nu)_\nu}$ für $\nu = (m+1), (m+2), \dots$ *in inf.* hat also eine endliche obere Grenze, welche mit σ_m bezeichnet werden möge. Darnach ergiebt sich aus der obigen Ungleichung die folgende:

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \cdot \left\{ \sigma_0 \cdot \sum_1^n{}^\nu (p+\nu)_\nu + \sigma_n \cdot \sum_{n+1}^\infty{}^\nu (p+\nu)_\nu \cdot |x|^\nu \right\}$$
$$< |1-x| \cdot \left\{ \sigma_0 \cdot (p+n+1)_n + \sigma_n \cdot \frac{1}{(1-|x|)^{p+1}} \right\}$$

wegen:

$$(23) \qquad \sum_0^n (p+\nu)_\nu = (p+n+1)_n \,^{1)}$$

$$(24) \qquad \sum_0^\infty (p+\nu)_\nu \cdot |x|^\nu = (1-|x|)^{-(p+1)},$$

und, wenn man die letzte Ungleichung noch mit $|1-x|^p$ multiplicirt:

$$(25) \qquad \begin{aligned} |(1-x)^p \cdot \mathfrak{P}(x)| &< |1-x|^{p+1} \cdot \sigma_0 \cdot (p+n+1)_n + \sigma_n \left(\frac{|1-x|}{1-|x|}\right)^{p+1} \\ &< |1-x|^{p+1} \cdot \sigma_0 \cdot (p+n+1)_n + \gamma^{p+1} \cdot \sigma_n \text{ (nach Ungl. (15))}. \end{aligned}$$

---

[1]) Man hat zunächst: $p_0 + (p+1)_1 = 1 + (p+1) = (p+2)_1.$

Angenommen man habe: $\sum_0^{n-1} (p+\nu)_\nu = (p+n)_{n-1}$,

so folgt unmittelbar: $\sum_0^n{}^\nu (p+\nu)_\nu = (p+n)_{n-1} + (p+n)_n = (p+n+1)_n.$

Es werde nun zunächst wiederum $A = 0$ angenommen. Man kann dann n derart fixiren, dass:

$$\gamma^{p+1} \cdot \sigma_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

darauf x nahe genug an 1 annehmen, dass auch:

$$|1 - x|^{p+1} \cdot \sigma_0 \cdot (p + n + 1)_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alsdann wird:

$$|(1 - x)^p \cdot \mathfrak{P}(x)| < \varepsilon,$$

und daher schliesslich:

$$\lim_{n=\infty} (1 - x)^p \cdot \sum_{1}^{\infty} {}^{\nu}\, a_\nu\, x^\nu = 0. \tag{26}$$

Bedeutet jetzt A eine von Null verschiedene Zahl, so kann die Voraussetzung (20^{a}) zunächst durch die Beziehung (22) ersetzt werden. Man hat nun aber nach Gl. (23), wenn man darin p durch $p - 1$ ersetzt:

$$\sum_{0}^{n} {}^{\nu}\, (p + \nu - 1)_\nu = (p + n)_n$$

für jedes positive ganzzahlige n, also auch:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{(p + n)_n} \cdot \sum_{0}^{n} {}^{\nu}\, (p + \nu - 1)_\nu = 1. \tag{27}$$

Fügt man diesen letzteren Grenzwerth der rechten Seite von Gl. (22) als Factor hinzu, so lässt sich dieselbe folgendermaassen schreiben:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{(p + n)_n} \cdot \left\{ s_n - \Gamma(p + 1) \cdot A \cdot \sum_{0}^{n} {}^{\nu}\, (p + \nu - 1)_\nu \right\} = 0,$$

oder auch, wenn man s_n durch $\sum_{0}^{n} {}^{\nu}\, a_\nu$ ersetzt (wo: $a_0 = 0$), mit Berücksichtigung von Gl. (21):

$$(28) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n^p} \cdot \sum_0^n {}^{\nu} \left\{ a_\nu - \Gamma(p+1) \cdot A \cdot (p+\nu-1)_\nu \right\} = 0.$$

Die Anwendung des in Gl. (23) enthaltenen Resultates giebt alsdann:

$$\lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \sum_0^\infty {}^{\nu} \left\{ a_\nu - \Gamma(p+1) \cdot A \cdot (p+\nu-1)_\nu \right\} \cdot x^\nu = 0,$$

anders geschrieben:

$$\lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \left\{ \sum_1^\infty {}^{\nu} a_\nu x^\nu - \Gamma(p+1) \cdot A (1-x)^{-p} \right\} = 0,$$

also schliesslich, wie behauptet:

$$(29) \qquad \lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \sum_1^\infty {}^{\nu} a_\nu x^\nu = \Gamma(p+1) \cdot A.^{1)}$$

8. Nach dem Cauchy-Stolz'schen Grenzwerth-Satze hat man:[2])

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n^p} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^p - (n-1)^p}$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} \left[\text{wegen: } n^p - (n-1)^p = n^p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^p \right) \simeq p \cdot n^{p-1} \right]$$

falls der rechts stehende Grenzwerth existirt. Ist nun:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} = A',$$

so wird also:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n^p} = \frac{1}{p} \cdot A',$$

[1]) Der Satz findet sich auch in einer jüngst erschienenen Arbeit des Herrn E. Lasker („Ueber Reihen auf der Convergenzgrenze." Lond. Philos. Transactions, Vol. 196 [1901], p. 438) als Folgerung aus einem allgemeinerem Grenzwerth-Satze. Der Beweis enthält indessen einen auf verkehrter Anwendung einer Ungleichung beruhenden Trugschluss (a. a. O. p. 437).

[2]) Hier ist die Bedingung $p > 0$ durchaus wesentlich.

und die Gleichung (29) liefert somit, wenn man noch berücksichtigt, dass:

$$\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$$

den folgenden, für reelle positive x und A' von Herrn Appell bewiesenen[1]) Satz:

Ist:

$$(30^a) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} = A' \quad (p > 0),$$

so hat man:

$$(30^b) \qquad \lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \Gamma(p) \cdot A'.$$

9. Dem Satze in Nr. 7 lässt sich der folgende an die Seite stellen:

Ist:

$$(31^a) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_n}{\lg n} = A,$$

so hat man:

$$(31^b) \qquad \lim_{x=1} \left(\lg \frac{1}{1-x}\right)^{-1} \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = A.$$

Beweis. Aus Ungl. (17) folgt, wenn man die obere Grenze von $\dfrac{|s_\nu|}{\lg \nu}$ für $\nu = (m+1), (m+2) \ldots$ *in inf.* mit σ_m bezeichnet:

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \left\{ \sum_1^n{}^\nu |s_\nu| + \sigma_n \cdot \sum_{n+1}^\infty{}^\nu \lg \nu \cdot |x|^\nu \right\}.$$

---

[1]) Comptes rendus, T. 87 (1878), p. 690. Auch: Picard, Traité d'Analyse, T. I (1891), p. 210, jedoch mit der Beschränkung $p > 1$. — Für complexe x findet sich der Satz als Folgerung aus einem allgemeineren Satze bei Herrn Hadamard: Journ. de Math. (4), T. 8 (1892), p. 176. (NB. Auf der rechten Seite derjenigen Relation, welche der Gl. (30^b) entspricht, steht dort fälschlich A statt: $\Gamma(\omega) \cdot A$, was wohl lediglich auf einem Schreibfehler beruhen dürfte.)

Da sodann:

$$|1-x| \cdot \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} \lg \nu \cdot |x|^{\nu} < \gamma \cdot (1-|x|) \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \lg \nu \cdot |x|^{\nu}$$

$$= \gamma \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} (\lg(\nu+1) - \lg \nu) \cdot |x|^{\nu}$$

$$< \gamma \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{1}{\nu} \cdot |x|^{\nu} = \gamma \cdot \lg \frac{1}{1-|x|}$$

$$< \gamma \left(\lg \frac{1}{|1-x|} + \lg \gamma \right)$$

so folgt:

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu} |s_{\nu}| + \sigma_n \cdot \gamma \left(\lg \frac{1}{|1-x|} + \lg \gamma \right),$$

also, wenn man noch mit $\left| \lg \frac{1}{1-x} \right|^{-1}$ multiplicirt und beachtet, dass $\left| \lg \frac{1}{1-x} \right| \geqq \lg \frac{1}{|1-x|}$:

$$\left| \left(\lg \frac{1}{1-x} \right)^{-1} \cdot \mathfrak{P}(x) \right| < |1-x| \cdot \left| \lg \frac{1}{1-x} \right|^{-1} \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu} |s_{\nu}|$$

$$+ \sigma_n \cdot \gamma \left(1 + \lg \gamma \cdot \left| \lg \frac{1}{1-x} \right|^{-1} \right).$$

Daraus folgt dann zunächst wieder im Falle $A = 0$ (also: $\lim_{n=\infty} \sigma_n = 0$), dass:

$$(32) \qquad \lim_{x=1} \left(\lg \frac{1}{1-x} \right)^{-1} \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} a_{\nu} x^{\nu} = 0.$$

Ist nun andererseits A von 0 verschieden, so lässt sich mit Berücksichtigung der bekannten Relation:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg n} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \frac{1}{\nu} = 1$$

die Voraussetzung (31^{a}) auf die Form bringen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg n} \left(s_n - A \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \frac{1}{\nu} \right) = 0,$$

anders geschrieben:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg n} \cdot \sum_1^n{}^{\nu} \left(a_\nu - A \cdot \frac{1}{\nu}\right) = 0.$$

Die Anwendung des in Gl. (32) enthaltenen Resultates giebt dann zunächst:

$$\lim_{x=1} \left(\lg \frac{1}{1-x}\right)^{-1} \cdot \sum_1^\infty{}^{\nu} \left(a_\nu - A \cdot \frac{1}{\nu}\right) \cdot x^\nu = 1$$

also, wegen: $\sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu} \cdot x^\nu = \lg \frac{1}{1-x}$, schliesslich, wie behauptet:

$$\lim_{x=1} \left(\lg \frac{1}{1-x}\right)^{-1} \cdot \sum_1^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu = A.$$

10. Da wiederum nach dem Cauchy-Stolz'schen Grenzwerth-Satze:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{\lg n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\lg n - \lg (n-1)}$$
$$= \lim_{n=\infty} n\, a_n,$$

falls dieser letztere Grenzwerth existirt, so erweist sich auch die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} n \cdot a_n = A \tag{33}$$

als hinreichend für die Existenz der Beziehung (31^b).[1]

Einen allgemeineren Satz, welcher die in Nr. 5—10 angegebenen Sätze als specielle Fälle enthält, werde ich in einem demnächst in den Acta mathematica erscheinenden Aufsatze mittheilen.

[1]) Für reelle positive x und A wiederum bei Appell, Comptes rendus, a. a. O.

Berichtigung zu A. Korn, Allgemeine Lösung des Problems der magnetischen Induktion S. 435, ist Zeile 6 von oben vor „Gesammtpotential einzuschalten: „inducierte".

Namen-Register.

Sach-Register.



Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1901.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. Bd. XXII. 1900. 8⁰.

Historische Gesellschaft des Kantons Aargau in Aarau:

Taschenbuch für das Jahr 1900. 8⁰.

University of Aberdeen:

Studies. No. I—III. 1900. 4⁰.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. 24, part 2. 1900. 8⁰.

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations during the year 1897. 1900. fol.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Rad. Bd. 143, 144. 1900. 8⁰.
Zbornik za narodni život. Bd. V, 2. 1900. 8⁰.
Natko Nodilo, Historija srednjega vijeka. 1900. 8⁰.

K. kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. 3, Heft 1, 2. 1901. 4⁰.

New-York State Library in Albany:

New-York State Library. 81th annual Report for 1898. 1899. 8⁰.

University of the State of New-York in Albany:

New-York State Museum. 49th Report part 3. 4⁰. 50th Report part 2. 4⁰. 51th Report part 1, 2. 8⁰. 1898—99.
Second annual Report of the College Department. Vol. I. 1900. 8⁰.
Bulletin of the New-York State Museum. Vol. IV, No. 19. 1898; Vol. V, No. 20—24. 1898; Vol. VI, No. 26—31. 1899; Vol. VII, No. 32. 1900. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mitteilungen aus dem Osterlande. N. F. Bd. 9. 1900. 8⁰.

Historischer Verein in Ansbach:

47. u. 48. Jahresbericht. 1900/01. 4⁰.

Paedologisches Laboratorium der Stadt Antwerpen:

Paedologisch Jaarboek. II. Jahrg. 1901. 8⁰.

Redaktion der Zeitschrift „Athena“:

Athena. Tom. 12, fasc. 4. 1900; Tom. 13, fasc. 1—3. 1901. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Ophiura brevispina by Caswell Grave. 1900. 4⁰.
Circulars. Vol. 20, No. 144—151. 1900—01. 4⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XXII, No. 2—4; Vol. XXIII, No. 1. 1900—01. 4⁰.
The American Journal of Philology. Vol. XXI, No. 1—4. 1900. 8⁰.
American Chemical Journal. Vol. 23, No. 5, 6; Vol. 24, No. 1—6; Vol. 25, No. 1—3. 1900—01. 8⁰.
Johns Hopkins University Studies. Ser. XVIII, No. 5—12; Ser. IX, No. 1—3. 1900—01. 8⁰.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. XI, No. 109; Vol. XII, No. 120. 1901—01. 4⁰.
The Johns Hopkins Hospital Reports. Vol. VIII, No. 3—9. 1900. 4⁰.

Maryland Geological Survey in Baltimore:

Allegany County mit Atlas. 1900. 4⁰ u. fol.

Historischer Verein in Bamberg:

60. Bericht für das Jahr 1899. 8⁰.
H. Weber, Die Privilegien des alten Bistums Bamberg. 1900. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Bd. XIII, Heft 1. 1901. 8⁰.
Gesammelte kleine Schriften von L. Rütimeyer. 2 Bde. 1898. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 43, afl. 1, 2. 1900; afl. 3—6. 1901. 8⁰.
Notulen. Deel 38, afl. 2, 3. 1900. 8⁰.
Nederlandsch-Indisch-Plakaatboek 1602—1811. Deel XVII. 1900. 8⁰.
Dagh-Register gehonden int Casteel Batavia. Anno 1637. s'Gravenhage 1899. 4⁰.

Observatory in Batavia:

Observations. Vol. XXII. 1899. Part 1. 1900. fol.
Regenwaarnemingen. XXI. Jaarg. 1899. 1900. gr. 8⁰.

Historischer Verein in Bayreuth:

Archiv. Bd. XXI, 2. 1900. 8⁰.

K. Serbische Akademie in Belgrad:

Zur Erinnerung an Dimitrije Stamenković, in serb. Sprache. 1901. 8⁰.
Glas. LIX, LXI. 1900. 8⁰.
Spomenik. No. XXXV u. XXXVIII. 1900—01. fol.
Godischniak. XIII. 1899. 1900. 8⁰.
Geologija Srbnie. Teil 2 mit Atlas. 1900. 4⁰.
Katalog der Handschriften und alten Drucke der k. serb. Akademie der Wissenschaften von L. Stojanović, in serb. Sprache. 1901. 8⁰.

Museum in Bergen (Norwegen):

Aarsberetning for 1900. 1901. 8⁰.
Meeresfauna von Bergen. Redig. v. A. Appellöf. Heft 1. 1901. 8⁰.
Aarbog für 1900. 1901. 8⁰.

University of California in Berkeley:

Schriften aus dem Jahre 1900.

K. preuss. Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Abhandlungen aus dem Jahre 1899—1900. 1900. 4⁰.
Sitzungsberichte 1900, No. XXXIX—LIII; 1901, No. I—XXXII. 4⁰.
Politische Korrespondenz Friedrich's des Grossen. Bd. 26. 1900. 8⁰.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Jahrbuch für das Jahr 1899. Bd. XX. 1900. gr. 8⁰.
Abhandlungen. N. F. Heft 30. 1900. gr. 8⁰.

Zentralbureau der internationalen Erdmessung in Berlin:

Veröffentlichungen. N. F. No. 3. 1901. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 33. Jahrg., No. 20; 34. Jahrg., No. 1—9. 1900. 1901. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 52, Heft 4. 1900. 8⁰.

Medizinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Bd. XXXI. 1901. 8⁰.

Deutsche physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1899. 55 Jahrg., Abtlg. 1—3. Braunschweig 1900. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 3, No. 1—7. Leipzig 1901. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Zentralblatt für Physiologie. 1900. Bd. XIV, No. 21—26; 1901. Bd. XV, No. 1—6. 1901. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 1900/01, No. 3—5. Leipzig 1901. 8⁰.

K. technische Hochschule in Berlin:

Die Hundertjahrfeier der k. techn. Hochschule Berlin. 1900. fol.
Berlin, die Stadt der Hohenzollern. Rede bei der Feier des 200jährigen Jubiläums des Königreiches Preussen. 1901. 4⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XV, Heft 4; Bd. XVI, Heft 1. 1901. 4⁰.

K. preuss. geodätisches Institut in Berlin:

Veröffentlichung. N. F. No. 5. 1901. 4⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Abhandlungen. Bd. 1, No. 7. 1901. 4⁰.
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen. II. u. III. Ordnung im Jahre 1900. 1901. 4⁰.

Physikal.-techn. Reichsanstalt in Berlin:

Verzeichnis der Veröffentlichungen 1887—1900. 1901. 4⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. Jahrg. 1901, Heft 2—13. 8⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Bd. XVI, 1. Hälfte. Leipzig 1901. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Bd. XVI, Heft 1—6. 1901. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 21. Jahrg., 1.—6. Heft. 1901. 4⁰.

Société d'Émulation du Doubs in Besançon:

Mémoires. VIIe Série, Vol. 4. 1899. 1900. 8⁰.

Natural History and Philosophical Society in Birmingham:

Proceedings. Vol. X, part 1, 2; Vol. XI, part 1. 1896—99. 8⁰.
Records of Meteorological Observations for 1896 and 1897. 1899. 8⁰.

R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna:

Memorie. Serie 5. Vol. 7. 1897. 4⁰.
Renticonto. N. Ser. Vol. 2, fasc. 1—4; Vol 3, fasc. 1—4. 1898—99. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti e Memorie. IIIa Serie. Vol. XVIII, fasc. 4—6. 1900. 8⁰.

Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande in Bonn:

Bonner Jahrbücher. Heft 106. 1901. 4⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1901. No. 1—12. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 36, No. 9—19. 1900—1901. 8⁰.

Boston Society of natural History in Boston:

Proceedings. Vol. 29, No. 9—14. 1900. 8⁰.
Memoirs. Vol. 5, No. 6, 7. 1900. 4⁰.
Occasional Papers IV. 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Bd. XV, Heft 3. 1901. 8⁰.
Beiträge zur nordwestdeutschen Volks- und Landeskunde. Heft 3. 1901. 8⁰.

Queensland Museum in Brisbane:

Annals. No. 5. 1900. 8⁰.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens u. Schlesiens in Brünn.

Zeitschrift. Jahrg. 5, Heft 1—3. 1901. gr. 8⁰.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen. Bd. 38. 1900. 8⁰.
XVIII. Bericht der meteorol. Kommission für das Jahr 1898. 1900. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Mémoires couronnés. Tome 15, fasc. 7 u. 8. 1901. 8⁰.
Bulletin. IV. Série. Tome 14, No. 11; Tome 15, No. 1—4. 1900/01. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Annuaire 1901. 67e année. 8⁰.
Bulletin. a) Classe des lettres 1900, No. 12; 1901, No. 1—5. 8⁰.
b) Classe des sciences 1900, No. 12; 1901, No. 1-5. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tome XX, fasc. 1, 2. 1901. 8⁰.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tom. 44. 1900. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. XIe année, tom. 11, fasc. 4, 5; XIIIe année, tom. 13, fasc. 2; XVe année, tom. 15, fasc. 1—3. 1901. 8⁰.

Société Royale malacologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tome 35. Année 1900.

Observatoire Royale in Brüssel:

Bulletin mensuel. 2e année 1900. Avril—Novembre. 8⁰.

K. ungar. geologische Anstalt in Budapest:

Mitteilungen aus dem Jahrbuche. Bd. 12. Heft 3—5. 1900/01. 4⁰.
Földtani Közlöny. Bd. 30, Heft 8—12; Bd. 31, Heft 1—4. 1900. gr. 8⁰.
Jahresbericht für 1898. 1901. 4⁰.

K. ungar. Ackerbau-Ministerium in Budapest:

Landwirtschaftliche Statistik der Länder der ungarischen Krone. Bd. V. 1900. 4⁰.

Museo nacional in Buenos Aires:

Comunicationes tom. I. No. 8. 1901. 8⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Mededeelingen. No. 42, 44, 45, 46, Deel 1, 47. Batavia 1900/01. 4⁰.
Catalogus plantarum phanerog. etc. Fasc. II. 1901. 8⁰.
Bulletin. No. VII. 1900. 4⁰.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Mémoires. Vol. 20, fasc. 1, 2. 1899—1900. 4⁰.
Bulletin. 5e Série. Vol. 3. Année 1899. 1900. 8⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review. August—Dezember 1900, Januar 1901. 1901. 8⁰.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. XI, part 3. 1901. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser. No. 971—76. 1900. 8⁰.
Journal. No. 387—391. 1900/01. 8⁰.
Proceedings. 1900, No. IX—XI; 1901, No. I, II. 8⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Memoirs. Vol. 28, part 2. 1900; Vol. 33, part 1. 1901. 4⁰.
Paläontologica Indica. Ser. IX. Vol. II, part 2. 1899—1900. fol.
General Report. Ser. XV. Vol. III, part 2. 1899—1900. fol.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.

Bulletin. Vol. 36, No. 5, 6; Vol. 38, No. 1—4. 1900/01. 8⁰.
Annual Report for 1899—1900. 1901. 8⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

55th annual Report for 1899—1900. 1900. 8⁰. Vol. 19, 1; 20, 1, 2; 21, 2; 30, 1—3; 31, 1, 2; 37, 1; 40, 1—3; 41, 1, 2, 6; 43, 1; 45. 1889—1901. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

List of Fellows. January 1901. 8⁰.
Proceedings. Vol. 10, part 7; Vol. 11, part 1, 2. 1901. 8⁰.

Observatory in Cambridge:

Annual Report for 1898—99, 1899—1900. 1900—01. 8⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Serie IV. Vol. 13. 1900. 4⁰.
Bullettino mensile. Nuova Ser. Fasc. 64—67. 1900—01. 4⁰.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg:

Die Thätigkeit der physikalisch-technischen Reichsanstalt im Jahre 1900. Berlin 1901. 4⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Das Klima des Königreiches Sachsen. Heft 6. 1901. 4⁰.
Jahrbuch 1898. Jahrg. XVI, 1. Abtlg. 1900. fol.
Abhandlungen. Heft 5. Leipzig 1901. 4⁰.

Société des sciences naturelles in Cherbourg:

Mémoires. Tom. 31. 1898—1900. 8⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 45, 51—54. 1901. 8⁰.

Yerkes Observatory of the University of Chicago:

Bulletin. No. 16, 17. 1901. 8⁰.

Zeitschrift „Astrophysical Journal" in Chicago:

Vol. XII, No. 5; Vol. XIII, No. 1—4. 1901. gr. 8⁰.

Norsk Folkemuseum in Christiana:

Aarsberetning 1900. 1901. 8⁰.

Fridtjof Nansen Fund for the advancement of science in Christiana:

The Norwegian North Polar-Expedition 1893—1896. Vol. 2. 1901. 4⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Colmar:

Mitteilungen. N. F. Bd. 5. 1899 u. 1900. 1900. 8⁰.

Academia nacional de ciencias in Cordoba (Republik Argentinien):

Boletin. Tom. XVI, 2, 3. Buenos Aires 1900. 8⁰.

Franz Josefs-Universität in Czernowitz:
Schriften aus dem Jahre 1900—1901 in 4⁰ u. 8⁰.

Westpreussischer Geschichtsverein in Danzig:
Zeitschrift. Heft 43. 1901. 8⁰.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:
Proceedings. Vol. 7, pag. 1—40. 1901. 8⁰.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:
Mitteilungen. Bd. 9, Teil 1, 2. 1901. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:
Bulletin. Tom 21, trimestre 2. 1900. 8⁰.

Pollichia in Dürkheim:
Mitteilungen. 57. Jahrg., 1900, No. 13. 1900. 8⁰.

American Chemical Society in Easton, Pa.:
The Journal. Vol. 23, No. 1—5. 1901. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:
Proceedings. Vol. 23, pp. 161—224. 1901. 8⁰.

Geological Society in Edinburgh:
Transactions. Vol. VIII, part 1. 1901. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:
Atti. IV. Ser. Vol. 23, disp. 3e, 4; Vol. 24, disp. 1. 1900—01. 8⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:
Abhandlungen. Bd. XXV, 1, 2; XXVI, 2; XXVIII. 1900/01. 4⁰.
Bericht. 1900. 8⁰.

Verein für Geschichte und Altertumskunde in Frankfurt a/M.:
Archiv für Frankfurts Geschichte u. Kunst. 3. Folge, Bd. 7. 1901. 8⁰.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:
Das Klima von Frankfurt a/M., von Jul. Ziegler u. Walter König. 1901. 4⁰.

Kirchengeschichtlicher Verein in Freiburg i. Br.:
Freiburger Diöcesan-Archiv. N. F. Bd. I. 1900. 8⁰.

Universität Freiburg in der Schweiz:
Collectanea Friburgensia. Nouv. Série. Fasc. 1. 1901. gr. 8⁰.

Société d'histoire et d'archéologie in Genf:
Bulletin. Tome 2, livre 4. 1900. 8⁰.

Museo civico di storia naturale in Genua:
Annali. Serie II. Vol. 20 und Indice zu Vol. 1—40. 1901. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:
Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 76. 1900. 8⁰.
Codex diplomaticus Lusatiae superioris. II Bd., Heft 1. 1900. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1900. No. XII; 1901. No. I—V. Berlin. 4⁰.
Abhandlungen. N. F. Philol.-hist. Classe. Bd. IV, No. 5. Berlin 1901. 4⁰.
Nachrichten. a) Philol.-hist. Classe 1900. Heft 3, 4. 4⁰.
b) Mathem.-phys. Classe. 1900. Heft 3. 4⁰.
c) Geschäftliche Mitteilungen. 1900. Heft 3. 4⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville (U. St. A.):

The Journal. Vol. 10, No. 4. 1900. 8⁰.

Scientific Laboratories of Dension University in Granville, Ohio:

Bulletin. Vol. XI, 9. 1900. 8⁰.

Historischer Verein für Steiermark in Graz:

Mitteilungen. Heft 47. 1899. 8⁰.
Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. 30. Jahrgang. 1899. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:

Mitteilungen. 32. Jahrg., 1900. 1901. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:

Bijdragen. VI. Volgreeks. Deel 8, aflev. 3 en 4. Register op de eerste 50 Deelen (1853—1899) var de Bijdragen. 1901. 8⁰.
Naamlijst der leden op 1. Juni 1901.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Série II. Tom. 4, livr. 2; Tom. 5. La Haye 1900/01. 8⁰.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax:

The Proceedings and Transactions. Vol. X, part 2. 1900. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 36, No. 12; Heft 37, No. 1—6. 1900—01. 4⁰.
Nova Acta. Abhandlungen, Bd. 75, 76. 1900. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Bd. 54, Heft 4; Bd. 55, Heft 1, 2. Leipzig 1900/01. 8⁰.

Universität Halle:

Verzeichnis der Vorlesungen. Sommer-Semester 1901. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 13, Heft 5 u. 6. Stuttgart 1901. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Hamburg:

Mitteilungen. Bd. 4, Heft 1. Leipzig 1901. 8⁰.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:

Mitteilungen. 20. Jahrg., 1900. 1901. 8⁰.
Zeitschrift. Bd. X, 1. 1901. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Verhandlungen. 1900. Dritte Folge. VIII. 1901. 8⁰.
Abhandlungen. Bd. XVI, 2. Hälfte. 1901. 4⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Hannover:

48 u. 49. Jahresbericht für 1897/98 u. 1898/99. 1900. 8⁰.

Naturhistorisch-medizinischer Verein zu Heidelberg:

Verhandlungen. N. F. Bd. VI, 4. 1900. 8⁰.

Geschäftsführender Ausschuss der Reichslimeskommission in Heidelberg:

Limesblatt Nr. 33. 1901. Trier. 8⁰.
Der Obergermanisch-Raetische Limes des Römerreiches. Liefg. XII, XIII. 1900. 4⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F. Bd. 29, Heft 3. 1900. 8⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1900. 1901. 8⁰.

Verein für Meiningische Geschichte und Landeskunde in Hildburghausen:

Schriften. 37. Heft. 1901. 8⁰.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. 5, No. 2—5. 1901. 8⁰.

Université de Jassy:

Annales scientifiques. Tom. 1, fasc. 3. 1901. 8⁰.

Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 35, Heft 1—4. 1901. 8⁰.

Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde in Jena:

Zeitschrift. N. F. Bd. XI, Heft 2—4; Bd. XII, Heft 1. 1898—1900. 8⁰.
Regesta diplomatica historiae Thuringiae. Bd. II, 2. 1900. 4⁰.

Universität Jurjew (Dorpat):

Schriften aus dem Jahre 1899/1900. 8⁰.

Grossherzogliche Sternwarte in Karlsruhe:

Veröffentlichungen. Bd. 1. 1900. 4⁰.

Universität Kasan:

Utschenia Sapiski. Bd. 67, No. 11, 26; Bd. 68, No. 1—4. 1900—01. 8⁰.
Godischnij Akt 1900. 1901. 8⁰.

Verein für hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:

Zeitschrift. N. F. Bd. XXIV, 2. 1901. 8⁰.
Mitteilungen. Jahrg. 1899. 1901. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Kassel:

Abhandlungen und Bericht XLVI. 1901. 8⁰.

Société mathématique in Kharkow:

Communications. 2e Série. Tome VII, No. 1. 1900. 8⁰.

Université Impériale in Kharkow:

Annales 1901. Kniga 1. gr. 8⁰.

Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. IV. Abteilung Helgoland, Heft 2; Bd. V, Heft 2, Abteilung Kiel. 1900—01. fol.

Universität in Kiew:

Iswestija. Bd. 40, No. 10—12. 1900; Bd. 41, No. 1—2. 1901. gr. 8⁰.

Mediz.-naturwissenschaftl. Sektion des Museumsvereins in Klausenburg:

Sitzungsberichte. Abtlg. I, Bd. 22, Heft 3. 1901. 8⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 41. Jahrg. 1900. 4⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1900, No. 6; 1901, No. 1—3. 8⁰.
Mémoires. Section des sciences. Serie VIᵉ. Tom. 10, No. 2. 1901. 4⁰.
Regesta diplomatica historiae Danicae. Series II. Tom. II, 5. 1901. 4⁰.

Gesellschaft für nordische Altertumskunde in Kopenhagen:

Aarböger, II. Raekke. 15. Bd., Heft 3, 4. 1900/01. 8⁰.

Musée national in Kopenhagen:

Affaldsdynger fra Stenalderen i Danmark. 1900. fol.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger 1900. November, Dezember; 1901. Januar—März. 8⁰.
Rozprawy filologiczne. Ser. II. Tom. 15, 16, histor.-filozof.; Ser. II. Tom. 14. 1900. 8⁰.
Biblioteka pisarzow polskich. Tom. 37, 38. 1900. 8⁰.
Rocznik. Rok 1899/1900. 1900. 8⁰.
Collectanea ex Archivo collegii juridici. Tom. VII. 1900. gr. 8⁰.
Atlas geologiczny Galicyi. Zeszyt XII. Text und Atlas. 1900. 8⁰.
Finkel, Bibliografie. Tom. 2, Heft 3. 1900. 8⁰.
Karlowicz, Slownik. Tom. 1. 1900. 8⁰.
P. Royzii carmina pars 1, 2. 1900. 8⁰.
Inszykiewicz, Melodye litewskie. 1900. 4⁰.
Birkenmajer, Kopernik. 1900. 4⁰.
K. J. Fijalek, Mistrz Jakób z Paradyża. 1900. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. IV. Série. Vol. 36, No. 138; Vol. 37, No. 139. 1900—01. 8⁰.

Sternwarte in Leiden:

Verslag 1896—1900 in 2 Heften. 1898—1901. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-histor. Classe. Bd. XX, 3. 1901. 4⁰.
Berichte der philol.-histor. Classe. Bd. 52, IX. 1900. 8⁰.
Berichte der mathem.-physik. Classe. Bd. 52, VII. 1900. 8⁰.

Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig:

Jahresbericht. 1901. 8⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 62, Heft 12; Bd. 63, Heft 1—8. 1901. 8⁰.

Université de Lille:

Travaux et Mémoires. No. 22—27. 1899—1900. 8⁰.
Livret de l'étudiant. 1900—1901. 1900. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Liverpool:

Proceedings. 89th Session 1899—1900, No. 54. 1900. 8⁰.

Université Catholique in Loewen:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1899—1900.

Zeitschrift „La Cellule“ in Loewen:

La Cellule. Tome 18, fasc. 1. 1901. 4⁰.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. XVI, part 1, No. 93. 1900. 8⁰.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. XVI, No. 62. 1901. 8⁰.

Royal Society in London:

Reports to the Malaria Committee. IVth and Vth Series. 1901. 8⁰.
Proceedings. Vol. 67, No. 440, 441; Vol. 68, No. 442—446. 1901. 8⁰.
Philosophical Transactions. Year-Book 1901. 8⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Apendix to Vol. 60; Vol. 61, No. 2—7. 1900/01. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal 1900. Supplementary Number (Titlepager and Indexes), No. 459 bis 464 (Febr.—July). 1901. 8⁰.
Proceedings. Vol. 16, No. 230; Vol. 17, No. 231—239. 1901. 8⁰.

Linnean Society in London:

The Journal. a) Botany. Vol. 35, No. 242; b) Zoology. Vol. 28, No. 181. 1901. 8⁰.
List of the Linnean Society 1900—1901. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal 1901. Part 1—3. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1900, part 4; 1901, part 1. 1901. 8⁰.
Transactions. Vol. XV, part 6, 7; Vol. XVI, part 1. 1901. 4⁰.

Zeitschrift „Nature“ in London:

Nature. No. 1630—1653. 4⁰.

Academy of Science in St. Louis:

Transactions. Vol. IX, No. 6, 8, 9; Vol. X, No. 1—8. 1899—1900. 8⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome 25, livr. 1 in 4⁰. Tome 27, livr. 8 und Tome 28, livr. 1, 2 in 8⁰. 1899—1901.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. Register zu Band 41—50. Stans 1901. 8⁰.

Université in Lyon:

Annales. I. Sciences, fasc. 4. II. Droit, Lettres, fasc. 4—6. Paris et Lyon 1900—01. 8⁰.

Wisconsin Academy of Sciences in Madison:
Transactions. Vol. VII, part 2, 1899. 1900. 8⁰.

Wisconsin Geological and Natural History Survey in Madison:
Bulletin. No. III, V, VI. 1898—1900. 8⁰.

Government Museum in Madras:
Bulletin. Vol. 4, No. 1. 1901. 8⁰.

R. Academia de ciencias exactas in Madrid:
Memorias. Tomo 19, fasc. 1. 1893—1900. 4⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:
Boletin. Tom. 38, cuad. 1—6. 1901. 8⁰.

Istituto tecnico superiore in Mailand:
Inaugurazione del Monumento a Francesco Brioschi. 1900. 4⁰.

R. Osservatorio di Brera in Mailand:
Publicazioni. No. 41. 1901. 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:
Atti. Vol. 39, fasc. 3, 4; Vol. 40, fasc. 1. 1901. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:
Archivio Storico Lombardo. Serie III. Fasc. 28—30. 1900—01. 8⁰.
Supplementi all' Archivio. Fasc. I, II. 1900. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:
Memoirs and Proceedings. Vol. 45, part. 1, 2. 1901. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule St. Afra in Meissen:
Jahresbericht für das Jahr 1900—01. 4⁰.

Royal Society of Victoria in Melbourne:
Proceedings. Vol. XIII, part 1. 1900. 8⁰.

Rivista di Storia Antica in Messina:
Rivista. N. Ser. Anno 5, fasc. 4. 1901. 8⁰.

Instituto geológico in Mexico:
Boletin. No. 14. 1900. 4⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in Mexico:
Boletin mensual. Julio—Diciembre 1900. 4⁰.

Observatorio astronómico nacional de Tacubaya in Mexico:
El Clima de la Republica Mexicana por M. Moreno y Anda y Antonio Gomez. Anno 2. 1900. 8⁰.
Boletin. Tom. II, No. 6. 1900. 4⁰.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:
Memorias y revista. Tomo 14, No. 11—12; Tomo 15, No. 1—6. 1901/01. 8⁰.

Società dei naturalisti in Modena:
Atti. Serie IV. Vol. 2. Anno 33. 1900. 1901. 8⁰.

Museo nacional in Montevideo:

Annales. Tomo 2, fasc. 17; Tomo 3, fasc. 18. 1900—01. fol.

Académie de sciences et lettres in Montpellier:

Mémoires. Section des lettres. 2e Série. Tom. 3, fasc. 1. 1900. 8⁰.
Section des sciences. 2e Série. Tom. 2, fasc. 6, 7. 1899 bis 1900. 8⁰.

Oeffentliches Museum in Moskau:

Ottschet. Jahrg. 1900. 1901. 8⁰.

Lazarev'sches Institut für Orientalische Sprachen in Moskau:

Trudy. Bd. 1—3. 1900. 4⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1900, No. 1—3. 1900—01. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Moskau:

Matematitscheskij Sbornik. Bd. XXI, 3, 4. 1900—01. 8⁰.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:

Bulletin. No. 1. 1900. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Korrespondenzblatt 1900, No. 9—12; 1901, No. 1—6. 4⁰.

Hydrotechnisches Bureau in München:

Jahrbuch 1900, Heft IV, Teil 1 u. 2; 1901, Heft I. 4⁰.

Generaldirektion der k. b. Posten und Telegraphen in München:

Verzeichnis der in und ausserhalb Bayern erscheinenden Zeitungen. Acht Nachträge zu den Zeitungspreisverzeichnissen. fol.

K. bayer. technische Hochschule in München:

Personalstand. Sommer-Semester 1901. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1901. 8⁰.
Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1901, No. 1—17. 8⁰.

K. Oberbergamt in München:

Geognostische Jahreshefte. XIII. Jahrg. 1900. 1901. 4⁰.

Universität in München:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ u. 8⁰.
Amtliches Verzeichnis des Personals. Sommer-Semester 1901. 8⁰.
Verzeichnis der Vorlesungen im Sommer-Semester 1901. 4⁰.
Rede des Rektors Emanuel Ullmann, der Deutsche Seehandel. 1901. 4⁰.

Aerztlicher Verein in München:

Sitzungsberichte. Bd. X. 1900. 8⁰.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten 1901, No. 124—129. 4⁰.

Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens in Münster:
Zeitschrift. Bd. 58. 1900. 8⁰.

Académie de Stanislas in Nancy:
Mémoires 1899—1900. 5e Série. Tom. 17. 1900. 8⁰.

Société des sciences in Nancy:
Bulletin. Série III. Tom. 1, fasc. 4, 5. Paris et Nancy 1900. 8⁰.

Reale Accademia di scienze morali et politiche in Neapel:
Atti. Vol. 32. 1901. 8⁰.
Rendiconto. Anno 39. 1900. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:
Rendiconto. Ser. III. Vol. 6, fasc. 8—12. 1900; Vol. 7, fasc. 1—4. 1901. 4⁰.
Atti. Ser. II. Vol. X. 1901. 4⁰.

Gesellschaft Philomathie in Neisse:
30. Bericht. 1898—1900. 8⁰.

Historischer Verein in Neuburg a/D.:
Neuburger Kollektaneen-Blatt. 63. Jahrg., 1899. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):
Transactions. Vol. 48, No. 7, 8; Vol. 49, No. 3—5; Vol. 50, No. 1. 1900. 8⁰.
Annual Report for the year 1899—1900. 1900. 8⁰.

Connecticut Academy of Arts and Sciences in New-Haven:
Transactions. Vol. X, part 2. 1900. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:
Journal. IV. Ser. Vol. 11, No. 62—66. 1901. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:
Journal. Vol. 31, 2. 1901. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:
Memoirs. Vol. II, part 2. 1900. 4⁰.
Annals. Vol. XIII, part 1. Lancaster 1900. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:
Bulletin. Vol. XI, 3 u. XIII. 1900. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:
Bulletin. Vol. 32, No. 5; Vol. 33, No. 1 u. 2. 1900—01. 8⁰

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:
American Journal of Archaeology. Vol. IV, No. 4 und Supplement; Vol. V, No. 1. Norwood 1900/01. 8⁰.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:
Anzeiger und Mitteilungen 1900, Heft 1—4. gr. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Odessa:
Sapiski. Tom. 19. 1899. 8⁰.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Bd. XXIII, Heft 1, 2. 1899—1900. 8⁰.

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:

Mitteilungen. 25. Bd. 1900. 1901. 8⁰.

Radcliffe Obesrvatory in Oxford:

Observations. 1892—99. Vol. 48. 1901. 8⁰.

R. Accademia di scienze in Padua:

Atti e Memoire. Nuova Serie. Vol. XVI. 1900. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. XIV, fasc. 6; Tom. XV, fasc. 1—4. 1900—01. 4⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. 1900. Luglio—Dicembre. 4⁰.
Bollettino. Anno I, No. 1. Maggio 1901. fol.

Académie de médecine in Paris:

Rapport annuel de la commission de l'hygiéne de l'enfance pour l'année 1899. 8⁰.
Rapport sur les vaccinations pour l'année 1898. 1899. 8⁰.
Bulletin. No. 1—24. 1901. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tome 132, No. 1—25. 1901. 4⁰.

Comité international des poids et mesures in Paris:

Procès-verbaux des séances de 1900. 1900. 8⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 710—715. Février—Juillet 1901. 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Revue de l'histoire des réligions. Année 21, Tom. 41, No. 3; Tom. 42, No. 1. 1900. 8⁰.
Petit guide illustré du Musée par L. de Milloué. 1899. 8⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1900, No. 5, 6. 8⁰.
Nouvelles Archives. IVᵉ Série. Tom. 2, fasc. 1. 1900. 4⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Deuxiéme étude sur les pierres figures par A. Thieullen. 1901. 4⁰.
Bulletins. IVᵉ Série. Tom. 10, fasc. 6; Vᵉ Série. Tom 1, fasc. 1 u. 2 et table générale 1860—1899. 1899—01. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

La Géographie. Année 1901, No. 1—6. 4⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. 29, No. 1, 2. 1901. 8⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Sbornik. Bd. 61. 1900. 8⁰.
Procès-verbaux des séances de l'Académie Imp. des sciences depuis sa fondation. Tom. 1—3. 1897—1900. 8⁰.
Byzantina Chronika. Tom. 7, Liefg. 3. 1900. gr. 8⁰.
Mémoires. a) Classe historico-philologique. Tom. 4, No. 8; b) Classe physico-mathémat. Tom. 10, No. 3—9. 1900. 4⁰.
Bulletin. Tom. 12, No. 2—5; Tom. 13, No. 1—3. 1900. 4⁰.
Annuaire du Musée zoologique. Tome 5, No. 4. 1900. 8⁰.
S. Patkanov, Die Irtisch-Ostjaken. Teil II. 1900. 4⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Tom. 19, No. 1—6. 1900. 8⁰.
Mémoires. Vol. XIII, No. 3. 1900. 4⁰.

Kaiserl. botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. XVI, XVIII, fasc. 1—3. 1900—01. gr. 8⁰.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie. Bd. 38, Liefg. 2. 1900. 8⁰.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der kais. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Tom. XXXII, No. 9; Tom. XXXIII, No. 1—4. 1900—01. 8⁰.

Physikalisches Zentral-Observatorium in St. Petersburg:

Annalen. Jahrg. 1899, Teil I, II. 1901. 4⁰.

Kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Ottschet 1900. 1901. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Journal. II. Series. Vol. XI, part 3. 1900. fol.
Proceedings. 1900, part 2, 3. 1900—01. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 24, No. 4; Vol. 25, No. 1, 2. 1900—01. 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 36, No. 12; Vol. 37, No. 1—6. 1900—01. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 39, No. 163, 164. 1900. 8⁰.

R. Scuola normale superiore di Pisa:

Annali. Filosofia e filologia. Vol. XIV. 1900. 8⁰.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il nuovo Cimento. Ser. IV. Tom. 12. Settembre—Dicembre 1900; Ser. V. Tom 1. Gennaio—Giugno 1901. 1900/01. 8⁰.

Historische Gesellschaft in Posen:

Zeitschrift. Jahrg. 15, 1. u. 2. Halbbd. 1900. 8⁰.
Historische Monatsblätter. Jahrg. 1, 1900, No. 8—12; Jahrg. 2, 1901, No. 1—3. 8⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. Photographische Himmelskarte. Bd. II. 1901. 4⁰.

Böhmische Kaiser Franz Josef-Akademie in Prag:

Památky archaeologické. Díl XIII, sešit 6—8 u. Register; Díl XIX, sešit 1—5. 1899—1900. 4⁰.

Starožitnosti země české. Díl I, svazek 2. 1900. 4⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Litteratur in Prag:

Uebersicht der Leistungen der Deutschen Böhmens 1895—97. 1900. 4⁰.
Beiträge zur Kenntnis der Wirbeltierfauna der böhmischen Braunkohlenformation I. 1901. 4⁰.
Mitteilung. No. XIII u. XIV. 1901. 8⁰.
Rechenschaftsbericht für das Jahr 1900. 1901. 8⁰.

K. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Jahresbericht für das Jahr 1900. 1901. 8⁰.
Sitzungsberichte 1900. a) Classe für Philosophie. b) Mathem.-naturw. Classe. 1901. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. Ročník 30, No. 4, 5. 1901. 8⁰.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Bericht für das Jahr 1900. 1901. 8⁰.
Časopis. Bd. 75, Heft 1. 1901. 8⁰

K. K. Sternwarte in Prag:

Astronomische Beobachtungen in den Jahren 1892—99. Herausgegeben von L. Weinek. 1901. 4⁰.

Deutsche Karl Ferdinands-Universität in Prag:

Die feierliche Installation des Rektors am 8. November 1900. 8⁰.

Verein böhmischer Mathematiker in Prag:

Sbornik. Bd. IV. 1901. 8⁰.
Časopis. Bd. 30, Heft 1—3. 1900—01. 8⁰.

Historischer Verein in Regensburg:

Verhandlungen. 52. Bd. 1900. 8⁰.

Naturforscher-Verein in Riga:

Arbeiten. N. F. Heft 10. 1901. 8⁰.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Vol. XI. 1900. 8⁰.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Annuario 1901. 8⁰.
Atti. Ser. V. Classe di scienze morali. Vol. VIII, parte 2. Notizie degli scavi 1900, Settembre—Dicembre; Vol. IX, parte 2, 1901. Gennaio. 1900—01. 4⁰.
Atti. Serie V. Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. IX, semestre 2, fasc. 12; Vol. X, semestre 1, fasc. 1—11. 1900/01. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali e filologiche. Serie V. Vol. IX, fasc. 7—12; Vol. X, fasc. 1—4. 1900/01. 8⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 54, Sessione I. 1900—01. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1900, No. 3, 4. 8⁰.

Kaiserl. deutsches archäologisches Institut (röm. Abtlg.) in Rom:

Mitteilungen. Bd. XV, 4; XVI. 1901. 8⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XXIII, 3, 4. 1900. 8⁰.

Académie des sciences in Rouen:

Précis analytique des travaux. Année 1898—99. 1900. 8⁰.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III. Vol. 6, fasc. 4. 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Bericht 1898—99. 1900. 8⁰.

Californio Academy of Sciences in San Francisco:

Occasional Papers. Vol. 7. 1900. 8⁰.
Proceedings. IIId Series. Zoology, Vol. II, No. 1—6; Botany, Vol. I, No. 10, II, No. 1, 2; Geology, Vol. I, No. 7—9; Math.-Phys., Vol. I, No. 5—7. 1899—1900. 8⁰.

Observatorio astronómico y meteorológico in San Salvator:

Anales. 1900. fol.

Bosnisch-Herzegovinisches Landesmuseum in Sarajevo:

Wissenschaftliche Mitteilungen. (Siehe Wien.)

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Mecklenburgisches Urkundenbuch. Bd. XXII. 1900. 4⁰.

R. Accademia dei fisiocritici in Siena:

Atti. Serie IV. Vol. 12, No. 4—10. 1900. 8⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno 23, 1900, No. 12; Anno 24, 1901, No. 1—5. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Meteorologiska iakttagelser i Sverige. Bd. 37 (1895). 1900. 4⁰.
Öfversigt. 57. Årgång 1900. 1901. 8⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Bd. 22, No. 7; Bd. 23, No. 1—4. 1901. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Bd. 34, Heft 7 u. 10; Bd. 35, Heft 1—5. 1900—01. 8⁰.

K. öffentliche Bibliothek in Stuttgart:

Hermann Fischer, Schwäbisches Wörterbuch. Liefg. 1. Tübingen 1901. 4⁰.

K. württemberg. Kommission für die internationale Erdmessung in Stuttgart:

Veröffentlichung. Heft IV. 1901. 4⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:

Boletin. Tomo II, No. 7. Mexico 1901. fol.
Anuario. Año XXI. Mexico 1901. 8⁰.

Physikalisches Observatorium in Tiflis:

Beobachtungen im Jahre 1897. 1900. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Mitteilungen. Bd. VIII, Heft 2. 1901. 8⁰.

Kaiserl. Universität Tokyo (Japan):

The Journal of the College of Science. Vol. XV, 1. 1901. 4⁰.

Earthquake Investigation Committee in Tokyo:

Publications, No. 5, 6. 1901. 4⁰.

Canadian Institute in Toronto:

Proceedings. Vol. II, part 4. 1901. gr. 8⁰.

University of Toronto:

Studies. a) Psychological, Series No. 4. b) Geological, Series No. 1. c) Anatomical, Series No. 1. 1900. 4⁰.
Edw. C. Jeffrey, The Morphology of the central cylinder in the Angiosperms. 1900. 4⁰.

Université in Toulouse:

Annales du Midi XIIe année, No. 46—48. 1900. 8⁰.
Annales de la faculté des sciences. IIe Série. Tom. 2. Année 1900. Paris. 4⁰.
Livret de l'Université 1900.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XV, 2. 1901. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1900. 1901. 8⁰.
Atti. Vol. 36, disp. 1—5. 1901. 8⁰.
Memorie. Serie II. Tom. 50. 1901. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala:

Nova Acta. Ser. III. Vol. 19. 1901. 4⁰.

Meteorolog. Observatorium der Universität Upsala:

Bulletin mensuel. Vol. XXXII, Année 1900. 1900—01. 4⁰.

K. Universität in Upsala:

Uppsatser i Romansk Filologi tillägnade Professor P. A. Geijer på hans sextio årsdag den 9. April 1901. 1901. 8⁰.
Urkunder till Stockholms historia I. Andra häftet. 1900. 8⁰.

Historisch Genootschap in Utrecht:

Bijdragen en Mededeelingen. Deel XXI. Amsterdam 1900. 8⁰.
Werken. N. Serie. No. 52* u. 61. 1899—1900. 8⁰.

Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Nederlandsch Meteorologisch Jaarboek voor 1898. 1901. 4⁰.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:

Aanteekeningen 1900. 8⁰.
Verslag. 1900. 8⁰.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. V. Reeks. Bd. II, aflev. 2. 1901. 8⁰.

Accademia di Scienze in Verona:

Atti e Memorie. Serie IV. Vol. I, fasc. 1. 1900. 4⁰.

Bureau of American Ethnology in Washington:

17. annual Report (1895—96), part II. 1898. 4⁰.

Bureau of Education in Washington:

Report 1898—99. Vol. 2. 1900. 8⁰.

U. S. Departement of Agriculture in Washington:

Report. 1900, No. 67; 1901, No. 68. 8⁰.
Bulletin. Division of biological Survey No. 14. 1900. 8⁰.
North American Fauna No. 16. 1899. 8⁰.
Yearbook 1900. 1901. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Report on the U. S. National-Museum. Part II. 1901. 8⁰.
Annual Report 1898. Part I, II. 1900. 8⁰.
A select Bibliography of Chemistry by H. C. Bolton. 1901. 8⁰.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Publications. IInd Series. Vol. I. 1900. 4⁰.
Observations made during the year 1891 and 1892. 1899—1900. 4⁰.
Report for the year 1899—1900. 1900. 8⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Special Publication No. 4. 1900. 4⁰.
Report of the Superintendent for the year 1898—99. 1900. 4⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 33. Jahrg., 1900, 2. Hälfte. 1900. 8⁰.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. Philos.-histor. Classe. Bd. 141, 142 und Register XIV. 1899—1900. 8⁰.
Mathem.-naturwissenschaftl. Classe.
1899, Abtlg. I, No. 1—10. 1900, No. 1—6.
1899, Abtlg. IIa, No. 1—10. 1900, No. 1—7.
1899, Abtlg. IIb, No. 1—10. 1900, No. 1—7.
1899, Abtlg. III, No. 1—10. 1900, No. 1—7.
1900. 8⁰.
Denkschriften. Philos.-histor. Classe. Bd. 46.
Mathem.-naturw. Classe. Bd. 66, Abtlg. III; Bd. 68.
Archiv für österr. Geschichte. Bd. 87, Hälfte I, II; Bd. 88, Hälfte I, II; Bd. 89, Hälfte I. 1900. 8⁰.
Fontes rerum Austriacarum. II. Abtlg., Bd. 48, Hälfte II; Bd. 49, Hälfte 2. 1900. 8⁰.
Almanach. 49. Jahrg., 1899. 8⁰.
Tituli Asiae Minoris. Vol. I. Tituli Lyciae ed. E. Kalinka. 1901. fol.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Abhandlungen. Schriften der Balkankommission. Linguistische Abteilung. I. Südslavische Dialektstudien. Heft I. 1900. 4⁰.
Jahrbuch 1900. Bd. 50, Heft 2, 3. 1900/01. 4⁰.
Abhandlungen. Bd. XVI, Heft 1. 1900. fol.
Verhandlungen 1900, No. 13—18; 1901, No. 1—6. 4⁰.

K. K. Zentralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Jahrg. 1898. N. F. Bd. 35; 1899. N. F. Bd. 36, Teil I. 1900. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift 1901, No. 3—26. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mitteilungen. Bd. XXX, Heft 6. Generalregister zu den Bänden 21—30. 1900/01. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Bd. 50, Heft 10; Bd. 51, Heft 1—4. 1901. 8⁰.
Botanik und Zoologie in Oesterreich 1850—1890. 1901. 8⁰.

K. K. gemeinsames Ministerium in Angelegenheiten Bosniens und der Herzegovina in Wien:

Wissenschaftl. Mitteilungen aus Bosnien und der Herzegovina. Bd. VII. Wien 1900. 4⁰.

Verein für Nassauische Altertumskunde etc. in Wiesbaden:

Annalen. 31. Bd., Heft 2. 1901. 4⁰.
Mitteilungen 1900/01, No. 1—4. 4⁰.
Gottfried Zedler, Die Inkunabeln Nassauischer Bibliotheken. 1900. 4⁰.

Physikalisch-medizinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. Bd. 34, No. 2—6. 1901. 8⁰.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1900, No. 2—4. 8⁰.

Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:

Archiv. Bd. 42. 1900. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Neujahrsblatt auf das Jahr 1901. 103. Stück. 4⁰.
Vierteljahrsschrift. 45. Jahrg., 1900, Heft 3 u. 4. 1901. 4⁰.

Schweizerische geologische Kommission in Zürich:

Beiträge. N. F. Liefg. 10. Bern 1900. 4⁰.
Notice explicative de la feuille XI (2de ed.). Bern 1900. 8⁰.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde. N. F. Bd. 2, 1900, No. 3. 4⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Albert I. Prince de Monaco:

Résultats des campagnes scientifiques. Fasc. 17, 18. 1900. fol.
Notes de géographie biologique marine. Berlin 1900. 8⁰.

Archer de Lima in Lissabon:

Pour la Paix et pour l'humanité. 1898. 8⁰.

Verlagshandlung von Johann Ambrosius Barth in Leipzig:

Beiblätter zu den Annalen der Physik. 1900, No. 12; 1901, No. 1—7. 8⁰.

Verlag von Hugo Bermühler in Berlin:

Forschungen zur Geschichte Bayerns. Bd. I—VIII. 1893—1900. 4⁰.

E. Bortolotti in Modena:

Sulla determinazione dell' ordine di infinito. 1901. 8⁰.

Emanuele Ciaceri in Catania:

La Alessandra di Licofrone-Testo, traduzione e commento. 1901. 8⁰.

Théodore Crivetz in Bukarest:

Essai sur l'equidistante. 1900. 8⁰.

H. Fritsche in St. Petersburg:

Die Elemente des Erdmagnetismus. Publikation III. 1900. 8⁰.

Madame Vve Godin in Guise (Aisne):

Le Devoir. Tom. 25. Janvier—Juin 1901. 8⁰.

Friedrich Goppelsröder in Basel:

Capillaranalyse. 1901. 8⁰.

Hugo Groth in Hamburg:

Zur Dynamik des Himmels. 1901. 8⁰.

Robert Hartig in München:

Holzuntersuchungen. Altes und Neues. Berlin 1901. 8⁰.

Franz J. Heilemann-Vollshausen in Schöneberg bei Berlin:

Die Kraft des Weltalls. Berlin 1900. 8⁰.

H. Herkenne in Bonn.

Die Textüberlieferung des Buches Sirach. Freiburg 1901. 8⁰.

Hermann Hippauf in Breslau:

Die Rektifikation und Quadratur des Kreises. 1901. 8⁰.

A. von Kölliker in Würzburg:

Die Medulla oblongata von Ornithorhynchus und Echidna. Leipzig 1901. 4⁰.

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. Bd. 10, Heft 1, 2. Leipzig 1901. 8⁰.

Robert Lauterborn in Heidelberg:

Der Formenkreis von Anuraea cochlearis. Teil I. 1900. 8⁰.

Henry Charles Lea in Philadelphia:

The Moriscos of Spain. 1901. 8⁰.

Fr. Lehmanns Buchhandlung in Zweibrücken:

Luitpold von Bayern von Richard Graf Du Moulin Eckart. 1901. 8⁰.

C. Mehlis in Neustadt a/H.:

Walahstede. Eine rheinische Burganlage. Kaiserslautern 1901. 8⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique Année XXVI. Tom. 75, No. II (Mars & Avril); Tom. 76, No. I, II (Mai—Août). 1901. 8⁰.

Antonio Pranzelòres in Trient:

Niccolo d'Arco, studio biologico. 1901. 8⁰.

Dietrich Reimers Verlagshandlung in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische und ozeanische Sprachen. 5. Jahrg., 3 Heft. 1900. 4⁰.

Gustav Retzius in Stockholm:

Crania Suecica Antiqua. Jena 1900. fol.

Édouard Sarasin in Genf:

Les oscillations du lac des quatre-cantons. 1901. 8⁰.

Verlag von Seitz & Schauer in München:

Deutsche Praxis. 10 Jahrg., 1901, No. 3—12. 8⁰.

Serge Socolow in Moskau:

Corrélations régulières supplémentaires du sytème planétaire. 1901. 8⁰.

B. G. Teubner in Leipzig:

Thesaurus linguae latinae. Vol. II, fasc. 1. 1901. 4⁰.
Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe, Bd. I, Heft 1 und 2. 1901. gr. 8⁰.
Enkyclopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. I, Heft 6; Bd. IV, 2, Heft 1. 1901. 8⁰.

E. Teza in Padua:

All' Ascoli. Intorno al Vocabolario di Nic. Volla da Girgenti. 1901. 8⁰.

N. Wecklein in München:

Euripidis fabulae. Vol. III, 4. Phoenisse ed. N. Wecklein. Leipzig 1901. 8⁰.

Johannes Wislicenus in Leipzig:

Sir Edward Frankland. s. l. 1901. 8⁰.

Ed. von Wölfflin in München:

Archiv für lateinische Lexikographie. Bd. XII, 2. 1901. 8⁰.

Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis Dezember 1901.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XXV, part 1. 1901. 8⁰.

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations of the year 1898. 1901. fol.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Ljetopis 1900. 1901. 8⁰.
Rad. Bd. 145. 1901. 8⁰.
Monumenta historico-juridica. Vol. VIII. 1901. 8⁰.
Zbornik za narodni život. Bd. VI, 1. 1901. 8⁰.

K. kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. 3, Heft 3, 4. 1901. 4⁰.

Kroatische archäologische Gesellschaft in Agram:

Vjesnik. N. Ser. Sveska 5. 1901. 4⁰.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

La Picardie historique et monumentale. Tom. I, No. 6. 1899. fol.
Bulletin. Année 1899, trimestre 2—4; 1900, trimestre 1. 1900. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde I. Sectie. Deel VII, No. 6, 7; II. Sectie, Deel VII, No. 4—6.
Verhandelingen. Afd. Letterkunde. Deel III, No. 1—4. 1900. 4⁰.
Jaarboek voor 1900. 1901. 8⁰.
P. H. Damsté, Patria rura, carmen. 1901. 8⁰.

Redaktion der Zeitschrift „Athena":

Athena. Tom. 13, fasc. 4. 1900. 8⁰.

Historischer Verein für Schwaben und Neuburg in Augsburg:

Zeitschrift. 27. Jahrg. 1900. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XX, No. 52, 53; Vol. XXI, No. 54. 1901. 4⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XXIII, No. 2—4. 1901. 4⁰.
The American Journal of Philology. Vol. XXII, 1. 1901. 8⁰.
American Chemical Journal. Vol. 25, No. 4—6; Vol. 26, No. 1—3. 1901. 8⁰.
Johns Hopkins University Studies. Vol. XIX, No. 4—9. 1901. 8⁰.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. XII, Nr. 121—128. 1901. 4⁰.
The Johns Hopkins Hospital Reports. Vol. IX, Vol. X, No. 1, 2. 1901. 4⁰.

Peapody Institute in Baltimore:

34th annual Report June 1. 1901. 8⁰.

Maryland Geological Survey in Baltimore:

Volume Eocene. 1901. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Bamberg:

XVIII. Bericht. 1901. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Beiträge zur vaterländischen Geschichte. N. F. Bd. V, Heft 4. 1901. 8⁰.
25. Jahresbericht 1899/1900. 1900. 8⁰.
Basler Zeitschrift für Geschichte. Bd. 1, Heft 1. 1901. 8⁰.

Universitätsbibliothek in Basel:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 44, afl. 1—4. 1901. 8⁰.
Notulen. Deel 38, afl. 4; Deel 39, afl. 1. 1900—1901. 8⁰.
Dagh-Register. Anno 1641—42 and 1673. 1900/01. 8⁰.

Observatory in Batavia:

Observations. Vol. XXII, part 2. 1901. fol.
Regenwaarnemingen. XXII. Jahrg. 1900. 4⁰.

K. natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indie zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 60. 1901. 8⁰.

K. Serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Glas. No. LX, LXII. 1901. 8⁰.
Gedächtnisfeier für Nicifor Dučić, Archimandriten und Akademiker am 22. April 1901. 8⁰.

Museum in Bergen (Norwegen):

An Account of the Crustacea of Norwey. Vol. IV, pars 1, 2. 1901. 4⁰.
Aarbog für 1901. 8⁰.

K. preuss. Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Acta borrussica. Behördenorganisation. Bd. VI, Abtlg. 1—3. Getreidehandelpolitik. Bd. 3. 1901. 8⁰.
Sitzungsberichte 1901. No. XXIII—XXXVIII. gr. 8⁰.
Corpus inscriptorum latinarum. Vol. XI, partis posterioris fasc. I; Vol. XIII, partis tert. fasc. I. 1901. fol.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen. N. F. Heft 34. 1901. 4⁰.
Geologisch-morphologische Uebersichtskarte der Provinz Pommern 1901.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 34. Jahrg., No. 10—17. 1901. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 53, Heft 1—3. 1901. 8⁰.

Deutsche physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1900. 56 Jahrg., Abtlg. I—III. Braunschweig 1901. 8⁰.
Verhandlungen im Jahre 1901. Leipzig 1901. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Zentralblatt für Physiologie. 1901. Bd. XV, Nr. 7—17 und Register zu Bd. XIV. Leipzig. 8⁰.
Verhandlungen 1900—1901. No. 11—19. 8⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XVI, Heft 2, 3. 1901. 4⁰.
Antike Denkmäler. Bd. II, Heft 4. 1901. fol.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Regenkarte der Provinzen Brandenburg und Pommern von G. Hellmann. 1901. 8⁰.
Bericht über das Jahr 1900. 1901. 8⁰.
Abhandlungen. Bd. 1, No. 6—8. 1901. 4⁰.
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen. II. u. III. Ordnung im Jahre 1896 und 1900. 1901. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XXX, Heft 1—3. 1901. 8⁰.

K. Sternwarte in Berlin:

Beobachtungsergebnisse. Heft 9. 1901. 4⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. 50. Jahrg. 1901, No. 14—24. 1901. 8⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Bd. 14, 2. Hälfte. Leipzig 1901. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Bd. XVI, Heft 7, 8.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 21. Jahrg. 1901, Heft 7—12. 4⁰.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 26. Bd. Zürich 1901. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Bern:

82. Jahresversammlung in Neuchatel. 31. Juli bis 2. August 1899; 83. Jahresversammlung in Thusis. 2. bis 4. Sept. 1900. 8⁰. Nebst französischem Auszuge aus beiden.

Société d'Émulation du Doubs in Besançon:

Mémoires. 5e Sér. Tom. 5 cahier 2. Paris 1901. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti e Memorie. Serie III. Vol. XIX fasc. 1—3. 1901. 8⁰.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:

Sitzungsberichte 1900. 2. Hälfte. 1900. 8⁰.

Universität in Bonn:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande in Bonn:

Bonner Jahrbücher. Heft 107. 1901. 4⁰.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 57. Jahrg. 2. Hälfte. 1900. 8⁰.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Procès-verbaux des séances Année 1899—1900. Paris 1900. 8⁰.
Observations pluviométriques 1899—1900. 1900. 8⁰.
Mémoires. 5e Sér. Tom. 5 cahier 2. Paris 1901. 8⁰.

Société Linnéenne in Bordeaux:

Actes. Vol. 55. 1900. 8⁰.
Catalogue de la bibliothèque. Fasc. 2. 1901. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1901. 27e année No. 13—24. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 36 No. 20—29; Vol. 37 No. 1—3. 1901. 8⁰.

American Philological Association in Boston:

Transactions and Proceedings. Vol. 31. 1900. 8⁰.

K. Lyceum Hosianum in Braunsberg:

Arbeiten aus dem botanischen Institut. I. 1901. 4⁰.

Meteorologisches Observatorium in Bremen:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1900. 1901. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Bd. XVII, 1. 1901. 8⁰.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur in Breslau:

78. Jahresbericht 1900 und Ergänzungsheft 1901. 8⁰.

Sternwarte in Breslau:

Mitteilungen. Bd. I. 1901. 4⁰.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens u. Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. Jahrg. 5 Bd. 4. 1901. gr. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Série. Tome XV No. 5—9. 1901. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Mémoires couronnés in 4⁰. Tom. 57, 58.
Mémoires couronnés in 8⁰. Tom. 58—60 avec carte pour le tom. 48.
Biographie nationale. Tom. XV, 2; XVI, 1. 1899—1900. 8⁰.
Bulletin. a) Classe des lettres 1901, No. 6—10. 8⁰.
b) Classe des sciences 1901, No. 6—10. 8⁰.
4 volumes Croniques in 8⁰. 1899—1900.
4 volumes Croniques in 4⁰. 1899—1900.

Bibliothèque Royale in Brüssel:

Catalogue des Manuscits. Tom 1. 1901. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. XX fasc. 3, 4. 1901. 8⁰.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Mémoires. VIII. 1901. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. Tom. XII fasc. 3; Tom. 14 fasc. 5; Tom. 15 fasc. 4, 5. 1901. 8⁰.

K. ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Almanach. 1901. 8⁰.
Nyelvtudományi Közlemények. (Sprachwissenschaftliche Mitteilungen.) Bd. 30 Heft 3, 4; Bd. 31 Heft 1, 2. 1900/01. 8⁰.
Archaeologiai Értesitö. Uj folyam. (Archäologischer Anzeiger.) Bd. 20 Heft 3—5; Bd. 21 Heft 1, 2. 1900/01. 4⁰.
Értekezések a nyelvtudományok köréből. Bd. 17, Heft 6—8. 1900—01. 8⁰.
Ertekezések a társadalmi tudományok köréből. Bd. 12, Heft 5—7. 1901. 8⁰.
Ertekezések a történeti tudományok köréből. Bd. 19, Heft 1—5. 1901. 8⁰.
Mathematikai Ertesitö. (Mathemat. Anzeiger.) Bd. 18, Heft 3—5; Bd. 19, Heft 1, 2. 1900/01. 8⁰.
Mathematikai Közlemények. (Mathemat. Mitteilungen.) Bd. 27 Heft 5. 1901. 8⁰.
Mathematische und naturwissensch. Berichte aus Ungarn. Bd. 14—16. Berlin 1898—99. 8⁰.
Rapport sur les traveaux de l'Académie en 1900. 1901. 8⁰.
Gróf Kuun Géza, Ismereteink tibetröl. 1900. 8⁰.
Daday Jenö, A Magyarországi kagylósrákok Mayánrajza. 1900. 8⁰.
A Magyar Nemzetségek a XIV. század Közepéig Irta Karácsonyi János. 1900. 8⁰.
Árja és Kaukázusi elemek. Irta Munkácsi Bernát. 1901. 8⁰.

K. ungar. geologische Anstalt in Budapest:

Abafi Aigner, A lepkészet töténele Magyarországon. 1898. 8⁰.
Héjas A., A zivatarok Magyarországou 1871—95. 1898. 8⁰.

Statistisches Bureau der Haupt- und Residenzstadt Budapest:

Publikationen. No. XXIX, 1; XXX, XXXI. Berlin 1900—1901. 4⁰.

Museo nacional in Buenos Aires:

Camunicaciones. Tom. I, No. 9. 1901. 8⁰.

Deutsche akademische Vereinigung in Buenos Aires:

Veröffentlichungen. Bd. I Heft 4, 5. 1901. 8⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Verslag over het jaar 1900. 1901. 4⁰.
Grondsoortenkaart van een gedeelte van Deli door D. S. Hissink. Karte mit erläuterdem Text. 1901. 4⁰.
Mededeelingen. No. 48—50. 1901. 4⁰.
Bulletin. No. VIII. 1901. 4⁰.

Society of natural sciences of Buffalo:

Bulletin. Vol. VII, No. 1. Albany 1901. 8⁰.

Academia Romana in Bukarest:

Discursuri de recepţiune XXIII. 1901. 4⁰.
Analele. Serie II. Tome 22 1899—1900. Memoriile secţiunii sciitifice;
„ 22. 1899—1900. Memoriile secţiunii istorice;
„ 23. 1900—1901. Partea administrativa. 1900 bis 1901. 4⁰.
Publicaţiunile fondului Princesa Alina Stirbei. No. II—IV. 1896.
Grigorie Cretu, Lexicon Slavo-Românesc. 1900. 8⁰.
Sim. Fl. Marian Serbatorile la Românì. Vol. 3. 1901. 8⁰.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Mémoires. Vol. XX, fasc. 3. 1900/01. 4.
Bulletin. 5e Série. Vol. 4. 1901. 8⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review 1901. February—July und Annual Summary 1900. fol.
Rainfall in India 9th year 1899. 1900. fol.
Report on the Administration 1900—1901. 1901. fol.

Departement of Revenue and Agriculture of the Government of India in Calcutta:

Memorandum on the snowfall in the mountain districts 1900. 1901. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Catalogue of printed Books and Manuscripts. Fasc. 3. 1901. 4⁰.
Bibliotheca Indica. New Ser. No. 977—982, 956, 984—998, 1000. 1899 bis 1901. 8⁰.
Journal. No. 392—394. 1901. 8⁰.
Proceedings. 1901. No. 3—8. 8⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Memoirs. Vol. XXX, 2; Vol. XXXI, 1; Vol. XXXII, 2; Vol. XXXIII, 2. 1900/01. 4⁰.
Paläontologica Indica. Ser. IX. Vol. III, part I und New Series. Vol. 1, No. 3. 1900—1901. fol.
General Report 1900/01. 1901. 4⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 36, No. 7, 8; Vol. 37, No. 3; Vol. 39, No. 1. 1901. 8⁰.
Annual Report for 1900—1901. 1901. 8⁰.
Memoirs. Vol. XXV, No. 1. 1901. 4⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

Annals. Vol. 28, part 2; Vol. 41, part 7. 1901. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. XI, part 3. 1901. 8⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bollettino. Fasc. 68—70. 1901. 8⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Jahrbuch. Jahrg. XVI, Abtlg. II. 1901. 4⁰.
Dekaden-Monatsberichte. Jahrg. III, 1900. 1901. 4⁰.
Abhandlungen. Heft 6. Leipzig 1901. 4⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 55—59. 1901. 8⁰.

Zeitschrift „Astrophysical Journal" in Chicago:

Vol. XIII No. 5; Vol. XIV No. 1—4. 1901. gr. 8⁰.

Zeitschrift „The Journal of Geology":

Vol. IX No. 6. 1901. 8⁰.

Gesellschaft der Wissenschaften in Christiana:

Forhandlingar 1900. 1901. 8⁰.
Skrifter. I. Mathemat.-naturwissensch. Classe 1900 No. 5—7 und Titel. II. Histor.-filos. Classe 1900 No. 6 und Titel. 1900. gr. 8⁰.

K. Norwegische Universität in Christiania:

Schriften aus dem Jahre 1900.

Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden in Chur:

XXX. Jahresbericht. Jahrg. 1900. 1901. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. N. F. Bd. 44. Vereinsjahr 1900/01. 1901. 8⁰.

Ohio State University in Columbus:

XIIIth annual Report. 1900. 8⁰.

Academia nacional de ciencias in Cordoba (Republik Argentinien):

Boletin. Tom. XVI, 4. 1901. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. N. F. Bd. X, Heft 2, 3.

Historischer Verein für das Grossherzogtum Hessen in Darmstadt:

Archiv für hessische Geschichte. N. F. Bd. 3 Heft 1 und Ergänzungsband 1 Heft 1. 1900—1901. 8⁰.

Académie des Sciences in Dijon:

Mémoires. IVe Série. Tome 7. Années 1899—1900. 1901. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tome 21, trimestre 4; Tome 22 trimestre 1, 2. 1900—1901. 8⁰.

K. sächsischer Altertumsverein in Dresden:

Jahresbericht 1900/01. 1901. 8⁰.
Neues Archiv für sächsische Geschichte. Bd. 22. 1901. 8⁰.

Generaldirektion der k. Sammlungen für Kunst und Wissenschaft in Dresden:

Bericht über das Jahr 1898/99. 1900. fol.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. Ser. III. Vol. VI, 2, 3; Vol. VII. 1901. 8°.
Transactions. Vol. XXXI. Parts 8—11. 1900. 4°.

Pollichia in Dürkheim:

Mitteilungen. 58. Jahrg. 1901 No. 14, 15. 8°.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. 23, No. 6—11. 1901. 8°.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XXIII, No. 4, 5. 1901. 8°.
Transactions. Vol. 40. Part I No. 8. 1901. 4°.

Royal Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1899—1900. 1901. 8°.

Verein für Geschichte der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:

Mansfelder Blätter. 15. Jahrg. 1901. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:

85. Jahresbericht für 1899/1900. 1901. 8°.

K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:

Jahrbücher. N. F. Heft 27. 1901. 8°.

K. Universitätsbibliothek in Erlangen:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4 und 8°.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. Ser. IV. Vol. 24 disp. 2. 1901. 8°.

Società Asiatica Italiana in Florenz:

Giornale. Vol. 14. 1901. 8°.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Abhandlungen. Bd. XXVI, Heft 3. 1901. 4°.
Bericht. 1901. 8°.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:

Jahresbericht für 1899—1900. 1901. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a/O.:

Helios. Bd. 18. 1901. 8°.
Societatum Litterae. 1900, Jahrg. XVI, No. 1—12. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i. Br.:

Berichte. Bd. XI, 3. 1901. 8°.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:

„Schau-ins-Land." 28. Jahrg. 1901. fol.

Kirchengeschichtlicher Verein in Freiburg i. Br.:

Freiburger Diöcesan-Archiv. N.F. Bd. 2 (= Bd. 29 d. ganz. Reihe). 1901. 8°.

Universität in Freiburg i. Br.:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Universität Freiburg in der Schweiz:

Collectanea Friburgensia. Nouv. Série. Fasc. 2. 1901. 8⁰.

Institut national in Genf:

Mémoires. Tom. XVIII. 1893—1900. 1900. 4⁰.

Observatoire in Genf:

Resumé météorologique de l'année 1899 pour Genève et le Grand Saint-Bernard. 1900. 8⁰.

Observations météorologiques faites aux fortifications de Saint-Maurice 1899. 1901. 8⁰.

Universität in Genf:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Histoire de l'Université de Genève par charles Borgeaud. L'Académie de Calvin 1559—1798. 1900. 4⁰.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:

Mémoires. Tom. 33, partie 2. 1899—1901. 4⁰.

Universität in Giessen:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Görlitz:

Abhandlungen. 23. Bd. 1901. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der k. Gesellschaft der Wissenschaften und zwar

Abhandlungen. N. F.
- a) Philol.-hist. Classe. Bd. III, 2; Bd. IV, 4; Bd. V, 1, 2. Berlin 1901.
- b) Mathem.-physikal. Classe. Berlin 1901.
- c) Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens. Berlin 1901. 4⁰.

Nachrichten.
- a) Geschäftliche Mitteilungen. 1901, Heft 1.
- b) Philol.-hist. Classe 1901, Heft 1, 2.
- c) Mathem.-physik. Classe. 1900, Heft 1. 1901. 4⁰.

Gelehrte Anzeigen. 1901. Jahrg. 163, No. 6—11. 1901. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Gothemburg:

Handlingar. Serie IV. Tom. 3. 1901. 8⁰.

Universität in Gothemburg:

Årsskrift. Bd. VI, 1900. 1901. 8⁰.

Scientific Laboratories of Dension University in Granville, Ohio:

Bulletin. Vol. XI, 10. 1901. 8⁰.

Historischer Verein für Steiermark in Graz:

Mitteilungen. Heft 48. 1900. 8⁰.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. 31. Jahrgang. 1901. 8⁰.

Der historische Verein für Steiermark 1850—1900. 1900. 4⁰.

Die Feier des 50jährigen Bestehens und Wirkens des Vereins. 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mitteilungen. Jahrg. 1900, Heft 37. 1901. 8⁰.

Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein in Greifswald:

Pommersche Jahrbücher. Bd. 2 und 1 Ergänzungsband. 1901. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:

Bijdragen. VI. Reeks. Deel IX, 1, 2. 1901. 8⁰.

Teyler's Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Ser. II. Vol. VII, partie 3, 4. 1901. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Oeuvres complètes de Christian Huggens. Vol. IX. 1901. 4⁰.
Archives Néerlandaises des sciences exactes. Série II. Tom. 4, livr. 3—5 und Série II. Tom. 6. La Haye 1901. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Repertorium zu den Akta und Nova Akta. Vol. I, II, 1, 2. 1894 bis 1899. 4⁰.
Geschichte der Bibliothek und Naturaliensammlung. 1894. 8⁰.
Leopoldina. Heft 37, No. 7—11. 1901. 4⁰.
Nova Acta. Abhandlungen, Bd. 77, 78. 1901. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Bd. 55, Heft 3, 4. Leipzig 1901. 8⁰.

Universität Halle:

Schriften aus 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 74, Heft 1, 2. Stuttgart 1901. 8⁰.

Thüringisch-sächsischer Verein zur Erforschung des vaterländischen Altertums in Halle:

Neue Mitteilungen. Bd. 21, Heft 1. 1901. 8⁰.

Deutsche Seewarte in Hamburg:

23. Jahresbericht für 1900. 1901. 8⁰.
III. Nachtrag zum Katalog der Bibliothek. 1901. 8⁰.

Stadtbibliothek in Hamburg:

Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten. XVII. Jahrg. 1899. 8⁰.

Sternwarte in Hamburg:

Mitteilungen. No. 7. 1901. 8⁰.

Verein für naturwissenschaftliche Unterhaltung in Hamburg:

Verhandlungen. Bd. XI, 1898—1900. 1901. 8⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrg. 1901. 8⁰.

Universität Heidelberg:

Akademische Rede zur Feier des Geburtsfestes des Grossherzogs, von Adolf Hausrath. 1901. 4⁰.
Schriften der Universisät aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. X, Heft 2. 1900. 8⁰.

Naturhistorisch-medizinischer Verein zu Heidelberg:

Verhandlungen. N. F. Bd. 6, Heft 5. 1901. 8⁰.

Geschäftsführender Ausschuss der Reichslimeskommission in Heidelberg:

Der Obergermanisch-Raetische Limes des Römerreiches. Liefg. XIV, XV. 1901. 4⁰.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Acta societatis scientiarum Fennicae. Tom. 26, 27. 1900. 4⁰.

Commission géologique de la Finlande in Helsingsfors:

Carte géologique détaillée, feuilles 36, 37, avec notes explicatives. Kuopi 1900. 8⁰.

Universität Helsingfors:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F. Bd. 30, Heft 1. 1901. 8⁰.
Siebenbürgische Münzen und Medaillen, von Adolf Resch. 1901. 4⁰.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen und Mitteilungen. 50. Bd. Jahrg. 1900. 1901. 8⁰.

Verein für Meiningische Geschichte und Landeskunde in Hildburghausen:

Schriften. 38 und 39. Heft. 1901. 8⁰.

Altertumsforschender Verein in Hohenleuben:

70. und 71. Jahresbericht. 1901. 8⁰.

Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. 28. Jahrg. 1901. 8⁰.

Ferdinandeum in Innsbruck:

Zeitschrift. 3. Folge, 45. Heft. 1901. 8⁰.

Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein in Innsbruck:

Berichte. 26. Jahrg., 1900/01. 1901. 8⁰.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. 5, No. 6—8. 1901. 8⁰.

Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Denkschriften. Bd. VII. Lieferung 3, 4. Text und Atlas. 1901. fol.
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. 36. Bd. 1901. 8⁰.

Gelehrte Estnische Gesellschaft in Jurjew (Dorpat):

Sitzungsberichte 1900. 1901. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):
Sitzungsberichte. Bd. 12, Heft 3, 1900. 1901. 8⁰.

Zentralbureau für Meteorologie in Karlsruhe:
Jahresbericht des Zentralbureaus für das Jahr 1900. 4⁰.

Grossherzoglich technische Hochschule in Karlsruhe:
Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Karlsruhe:
Verhandlungen. XIV. Bd., 1900—1901. 1901. 8⁰.

Société physico-mathématique in Kasan:
Bulletin. IIe Série. Tome X, No. 2—4. 1900—1901. 8⁰.

Universität Kasan:
Utschenia Sapiski. Bd. 68, No. 5, 7—11. 1901. 8⁰.
3 medizinische Dissertationen vom Jahre 1901.

Verein für hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:
Zeitschrift. N. F. Bd. XXV. 1901. 8⁰.
Mitteilungen. Jahrg. 1900. 1901. 8⁰.

Université Impériale in Kharkow:
Annales 1901. kniga 2—4. 1901. 8⁰.
W. A. Danilewski, Isledowania physiolog. II. 1901. 8⁰.
W. Sawwa, Der Moskowitische Czar und das Byzantinische Königtum. 1901. 8⁰. (In russischer Sprache.)

Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:
Zeitschrift. Bd. 31. 1901. 8⁰.
Quellensammlung. Bd. 5. 1901. 8⁰.

Sternwarte in Kiel:
Publikationen. No. XI. Leipzig 1901. 4⁰.

K. Universität in Kiel:
Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein in Kiel:
Schriften. Bd. XII, Heft 1. 1901. 8⁰.

Universität in Kiew:
Iswestija. Vol. 41, No. 3—9. 1901. 8⁰.

Geschichtsverein für Kärnten in Klagenfurt:
Jahresbericht für 1900. 1901. 8⁰.
Carinthia I. 91. Jahrg., No. 1—6. 1901. 8⁰.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:
Jahrbuch. 26. Heft, 47. Jahrg. 1900. 8⁰.
Diagramme der magnetischen und meteorolog. Beobachtungen 1900. fol.

Mediz.-naturwissenschaftl. Sektion des Museumsvereins in Klausenburg:
Sitzungsberichte. 25. Jahrg. 22. Bd., Abtlg. II, Heft 1—3. 1901. 8⁰.
26. Jahrg. 23. Bd., Abtlg. I, Heft 1—2. 1901. 8⁰.
Abtlg. II, Heft 1. 1901. 8⁰.

Universität in Königsberg:

Schriften aus dem Jahre 1900/01.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1901, No. 4, 5. 8⁰.
Skrifter. 6e Série. Section des sciences. Tom. IX, No. 7; Tom. XI, No. 1. 1901. 4⁰.
Tychonis Brahe Dani operum primitias de nova stella denuo edidit regia societas scientiarum Danica. 2 Voll. Hauniae 1901. 8⁰.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:

Chr. Thaarup, Fortegnelse paa danske Oversättelser af gräfke og latinske Skribenter. 1836. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. No. 4—8. (April—Juli, Oktober). 1901. 8⁰.
Rozprawy historyczno-filozof. Ser. II. Vol. 15. 1901. 8⁰.
Rozprawy filolog. Serya II. Tom. 17. 1901. gr. 8⁰.
Biblioteka pisarzow polskich. Tom. 39, 40. 1901. 8⁰.
Stownik gwar Polskich ulozyt Jan Kastowicz. Tom. 2. 1901. 8⁰.
Sprawozdanie komisyi fizyograficznej. Tom. 35. 1901. 8⁰.
Katalog literatury naukowej polskiej. Tom. 1. Heft 1, 2, 3. 1901. 8⁰.
Materiaty i Prace komisyi językowej. Tom. I 1. 1901. 8⁰.

Botanischer Verein in Landshut:

16. Bericht 1898—1900. 1901. 8⁰.

Historischer Verein in Landshut:

Verhandlungen. Bd. 37. 1901. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 4e Série. Vol. 37, No. 140, 141. 1901. 8⁰.
Observations météorologiques 1900. XIVe année. 1901. 8⁰.

Kansas University in Lawrence, Kansas:

The Kansas University Quarterly. Vol. IX No. 4; Vol. X No. 1, 6. (Neue Serie. Vol. II.) 1900/01. 8⁰.
Bulletin. Vol. I No. 4. 1900. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. N. Serie. Deel XIX, 3, 4; Deel XX, 1, 2. 1900—1901. 8⁰.
Handelingen en Mededeelingen, jaar 1900—1901. 1901. 8⁰.
Levensberichten 1900—1901. 1901. 8⁰.

Universität in Leiden:

Recueil de Travaux. Tom. 1, 2. 1899. 8⁰.

Herbier Royal in Leiden:

Livr. 1—8. Musée Botanique de Leide, publié par W. F. R. Suringar. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-histor. Classe. Bd. XXI No. 1. 1901. 4⁰.
Abhandlungen der mathem.-physik. Classe. Bd. XXVI No. 5—7. 1901. 4⁰.
Berichte der philol.-histor. Classe. Bd. 53 No. I—III. 1901. 8⁰.
Berichte der mathem.-physik. Classe. Bd. 53 No. I 1901. 8⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 63 Heft 9—12; Bd. 64 Heft 1—10. 1901. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mitteilungen 1900. 1901. 8⁰.
Wissenschaftliche Veröffentlichungen. Bd. V. Mit 1 Atlas in fol. 1901. 8⁰.

Université de Lille:

Travaux et Mémoires. Tom. X. Mémoire No. 28. 1901. 8⁰.
Livret de l'étudiant. 1901—1902. 8⁰.

Museum Francisco-Carolinum in Linz:

59. Jahresbericht. 1901. 8⁰.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. XVI part 2 No. 94. 1901. 8⁰.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. XVI No. 63, 64. 1901. 8⁰.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 68 No. 447—450; Vol. 69 No. 451—453 1901. 8⁰.
Philosophical Transactions. Series B. Vol. 193; Series A. Vol. 195, 196. 1900—1901. 4⁰.
List of Members. 30. November 1900. 4⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 61 No. 8, 9; Vol. 62 No. 1 und Appendix to Vol. 61 No. 2—4. 1901. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal. No. 465—470 (August—December 1901 und January 1902). 8⁰.
Proceedings. Vol. 17 No. 240—244. 1901. 8⁰.

Linnean Society in London:

Proceedings. Nov. 1900—June 1901. 8⁰.
The Journal. a) Zoology. Vol. 28 No. 182, 183; b) Botany. Vol. 35 No. 243. 1901. 8⁰.
The Transactions. a) Botany. Vol. V part 13—15; Vol. VI part 1; b) Zoology. Vol. VIII part 1—4. 1900. 4⁰.
List of the Linnean Society 1901—1902. 1901. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal 1901. Part 4—6. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1901. Vol. I part 2; Vol. II part 1. 1901. 4⁰.
Transactions. Vol. XVI, part 2, 3. 1901. 4⁰.

Zeitschrift „Nature“ in London:

Nature. No. 1654—1680.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome 28 livr. 3. 1901. 8⁰.

Société Royale des Sciences in Lüttich:

Mémoires. IIIᵉ Série. Tom. 3. 1901. 8⁰.

Institut Grand Ducal in Luxemburg:

Publications de la section des sciences naturelles. Tom. 26. 1901. 8⁰.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. Bd. 56. Stans 1901. 8⁰.

Wisconsin Academy of Sciences in Madison:

Transactions. Vol. XIII part 1. 1901. 8⁰.

Wisconsin Geological and Natural History Survey in Madison:

Bulletin. No. VII part I. 1901. 8⁰.

Government Museum in Madras:

Bulletin. Vol. 3 No. 3. 1901. 8⁰.
Catalogue of the prehistoric Antiquities by R. Bruce Foote. 1901. 8⁰.

The Government Observatory in Madras:

Report on the Kodaikanal and Madras Observatory for 1900—1901. 1901. fol.

R. Academia de ciencias exactas in Madrid:

Memorias. Tom. XIV. 1890—1901. 4⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tom. 39, cuad. 1—6. 1901. 8⁰.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:

Rendiconti. Serie II. Vol. 33. 1900. 8⁰.
Memorie. a) Classe di scienze matematiche. Vol. 18 fasc. 11; Vol. 19, fasc. 1—4; b) Classe di scienze storiche. Vol. 21 fasc. 3. 1900. 4⁰.

Comitato per le onoranze a Francesco Brioschi in Mailand:

Opere matematiche di Francesco Brioschi. Tomo I. 1901. 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Memorie. Vol. VI fasc. 3. 1901. 4⁰.
Atti. Vol. 40 fasc. 2, 3. 1901. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Serie III. Anno 28 fasc. 30 und 31. 1901. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 45 part 3, 4; Vol. 46 part 1. 1901. 8⁰.

Universität Marburg:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tom. XI, fasc. 1—9. 1901. 4⁰.

Royal Society of Victoria in Melbourne:

Proceedings. Vol. XIII. (New Series), part 2; Vol. XIV, part I. 1901. 8⁰.

Rivista di Storia Antica in Messina:

Rivista. N. Serie. Anno 6, fasc. 1. 1901. 8⁰.

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:

Jahrbuch. 12. Jahrg. 1900. 4⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in Mexico:

Boletin mensual. 1901. Enero—Junio. 4⁰.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:

Memorias y revista. Tom. XIII, No. 1, 2; Tom. XV, No. 7—12; Tom. XVI, No. 1. 1901. 8⁰.

Regia Accademia di scienze lettere ed arti in Modena:

Memorie. Serie III. Vol. 2. 1900. 4⁰.

Observatoire du Mont Blanc:

Annales. Tom. 4, 5. Paris 1900. 4⁰.

Bureau de dépôt, distribution et échange des Publications in Montevideo:

Manifiesto de S. E. el Presidente de la Republica Don Juan L. Cuestas. 1898. 8⁰.
Mensaje 1900 y 1901. 1900—1901. 8⁰.
Reglamento de la oficina de depósito. 1892. 8⁰.
Geografia nacional por Orestes Araujo. 1895. 8⁰. (Con una carta geografica.)
Constitución de la republica oriental del Uruguay. Por Pablo V. Goyena. 1887. 8⁰.
Nuestro País, cuadros descriptivos por Orestes Araujo. 1895. 8⁰.
Ceremonia inaugural de les obras del Puerto de Montevideo. 1901. 8⁰.

Dirección general de Estatistica in Mantevideo:

Comercio exterior y movimiento de navegación. 1901. 4⁰.

Museo nacional in Montevideo:

Anales. Tomo IV fasc. 19—21. 1901. fol.

Académie de sciences et lettres in Montpellier:

Mémoires. Section des lettres. 2e Serie. Tom. 3, No. 2; Tom. 4, No. 1. Section des médecine. 2e Série. Tom. 1, No. 4. 1900. 8⁰.

Numismatic and Antiquarian Society of Montreal:

The Canadian Antiquarian and Numismatic Journal. III. Serie. Vol. III, No. 1—4. 1900. 8⁰.
Catalogue of the Chateau Ramezay Museum. 1901. 8⁰.

Observatoire météorologique et magnétique de l'Université Imp. in Moskau:

Observations. Septembre 1899—Février 1901. 4⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1901 No. 1, 2. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Moskau:

Matematitscheskij Sbornik. Bd. XXII 1. 1901. 8⁰.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:

Bulletin. No. 2—11. 1901. 4⁰.

Statistisches Amt der Stadt München:

Münchener statistische Jahresübersichten für 1900. 1901. 4⁰.
Die Volk- und Wohnung-Zählung vom 1. Dezember 1900 in München. Teil I, II. 1901. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Korrespondenzblatt, 32. Jahrg. No. 7—10. 1901. 4⁰.

Hydrotechnisches Bureau in München:

Jahrbuch. III. Jahrg. 1901 Heft 2, 3. fol.

Generaldirektion der k. b. Posten und Telegraphen in München:

Preisverzeichnis der in Bayern erscheinenden Zeitungen für das Jahr 1902. I. Abtlg. und Nachträge. 1901. fol.

K. bayer. technische Hochschule in München:

Personalstand. Winter-Semester 1901/02. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1901 No. 18—27. 8⁰.

K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten in München:

Ergebnisse der Untersuchung der Hochwasserverhältnisse im deutschen Rheingebiete. Heft IV. Berlin 1900. fol.

Universität in München:

Schriften aus dem Jahre 1901 in 4⁰ und 8⁰.
Amtliches Verzeichnis des Personals. Winter-Semester 1901/02. 8⁰.
Rede des Rektors L. Brentano, Ueber Ethik und Volkswirtschaft in der Geschichte. 1901. 4⁰.

Historischer Verein in München:

Altbayerische Monatsschrift. 3. Jahrg. 1901 No. 1, 2. 4⁰.

Ornithologischer Verein in München:

II. Jahresbericht für 1899 und 1900. 1901. 8⁰.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten. 1901 No. 10—12; 1902 No. 2. 4⁰.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Sér. III. Tom. 1 fasc. 6; Sér. III. Tom. 2 fasc. 1, 2. Paris 1900—1901. 8⁰.

Reale Accademia di scienze morali et politiche in Neapel:

Atti. Vol. 33. 1901. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Ser. 3. Vol. VII fasc. 5—11. 1901. 8⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mitteilungen. Bd. XIV 3, 4; Bd. XV 1, 2. Berlin 1901. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):

Transactions. Vol. 49 part 6; Vol. 50 part 2—6; Vol. 51 part 1. 1901. 8⁰.
Annual Report for the year 1900—1901. 1901. 8⁰.
Subject-Matter Index of mining and metallurgical litterature for the year 1900. 1901. 8⁰.

American Association for the Advancement of science in New-Haven:

Proceedings. 49th Meeting held at New-York, June 1900. Easton 1900. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. IV. Ser. Vol. 12 No. 67—72 (September—Dezember). 1901. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:

Journal. Vol. XXII 1. 1901. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Memoirs. Vol. II part 3. 1901. 4⁰.
Annals. Vol 13 parts 2, 3. 1901. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Annual Report for the year 1900. 1901. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 33 No. 3, 4. 1901. 8⁰.

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:

American Journal of Archaeology. Vol. V No. 2—4 und Supplement. 1901. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:

Festschrift zur Säkularfeier 1801—1901. 1901. gr. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Nürnberg:

Jahresbericht 1899, 1900. 1900—1901. 8⁰.

Mitteilungen. Heft XIV. 1901. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Offenbach:

37.—42. Bericht von 1895—1901. 1901. 8⁰.

Geological Survey of Canada in Ottawa:

Catalogue of Canadian Birds. Part I by John Macoun. 1900. 8⁰.
Annual Report New Series. Vol. XI. With Maps. 1901. 8⁰.

R. Accademia di scienze in Padua:

Indice generale degli Atti 1779—1900. 1901. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. XV fasc. 5, 6. 1901. 4⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Bollettino. Anno I No. 3—5. 1901. fol.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1901 No. 26—43. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 133 No. 1—26. 1901. 4⁰.
Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. I. Série. Tom. 12. 1900. 4⁰.
A. G. Pingré, Annales célestes du XVIIe siècle. 1901. 4⁰.

École polytechnique in Paris:

Journal. IIe Série. Cahier 5, 6. 1900. 4⁰.

Ministère de l'instruction publique in Paris:

Les Carbures d'hydrogène 1851—1901. Par M. Berthelot. Paris 1901. 3 Vols. 8⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livre 716—721. (Août 1901 — Janvier 1902.) 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Bibliothèque d'études. Tom. IX. 1901. 8⁰.
Revue de l'histoire des réligions. Tom. 42 No. 2, 3; Tom. 43 No. 1, 2. 1900—1901. 8⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1900 No. 7, 8; 1901 No. 1—3. 8⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. 5e Série. N. S. Tom. 1 fasc. 3—6; Tom. 2 fasc. 1. 1901. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

La Géographie. Année 1901 No. 7—12. 4⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. 29 fasc. 3 1901. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XXV. 1900. 8⁰.
Mémoires. Tom. XIII. 1900. 8⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Byzantina Chronika. Tom. 7 Heft 4. 1900. 4⁰.
Annuaire du Musée zoologique. Tome VI No. 1. 1901. 8⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Vol. XX No. 1—10. 1901. 8⁰.
Mémoires. Vol. XVIII No. 1, 2. 1901. 4⁰.
Bibliothèque géologique de la Russie 1897. 1901. 8⁰.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie. Bd. 39, Liefg. 1. 1901. 8⁰.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der kais. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 33 No. 5—9. 1901. 8⁰.

Section géologique du cabinet de Sa Majesté in St. Petersburg:

Traveaux. Vol. III, 2; Vol. IV. 1901. 8⁰.

Kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Schriften aus dem Jahre 1900/01.

Sternwarte in St. Peterburg:

Publications de l'Observatoire Central Nicolas. Série II. Vol. VI, VIII. 1900—1901. fol.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Journal. IId Series. Vol. XI part 4. 1901. 4⁰.
Proceedings. Vol. 53 part 1, 2. 1901. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. XXV No. 99. 1901. 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:
Alumni Report. Vol. 37 No. 7—11. 1901. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:
Proceedings. Vol. 40 No. 165, 166. 1901. 8⁰.
Transactions. New Series. Vol. XX part 2. 1901. 4⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:
Atti. Processi verbali. Vol. XII, pag. 169—230. 1901. 4⁰.

Società Italiana di fisica in Pisa:
Il nuovo Cimento. Serie V. Tom. 2. Luglio—Ottobre. 1901. 8⁰.

Alleghany Observatory in Pittsburgh:
Miscellaneous scientific Papers. New Series. Vol. 1—3. 1901. 8⁰.

Altertumsverein in Plauen:
Mitteilungen. 14. Jahresschrift auf das Jahr 1900. 1901. 8⁰.

Portland Society of natural History in Portland:
Proceedings. Vol. II part 5. 1901. 8⁰.

Zentralbureau der internationalen Erdmessung in Potsdam:
Verhandlungen der XIII. Allgemeinen Konferenz der internationalen Erdmessung, I. Teil. Berlin 1901. 4⁰.

K. geodätisches Institut in Potsdam:
Veröffentlichung. N. F. No. 6. 1901. 8⁰.

Böhmische Kaiser Franz Josef-Akademie in Prag:
Rozprawy. Třída I, Ročnik 8; Třída II, Ročnik 9; Třída III, Ročnik 3, číslo 1. 1900. 8⁰.
Historický Archiv. Číslo 17—19. 1900. 8⁰.
Věstník. Bd. IX Heft 1—9. 1900. 8⁰.
Almanach. Ročnik 11. 1901. 8⁰.
Sbírka pramenův III, 3. 1900. 8⁰.
František Bartoš, Narodni Písně Moravské Sešit I. 1899. 8⁰.
Zíkmund Winter. Život a učení. 1901. 8⁰.
Gustav Gruss, Základové theoretické Astronomie Díl druhý. 1900. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Litteratur in Prag:
J. E. Scherer, Die Rechtsverhältnisse der Juden in den deutsch-österreichischen Ländern. Leipzig 1901. 8⁰.
Bericht über die Festsitzung vom 4. März 1901. 4⁰.
Die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung. I. Bd. Aussig 1901. 8⁰.
Beiträge zur Kenntnis der Wirbeltierfauna der böhmischen Braunkohlenformation II. 1901. 4⁰.
J. Lang, Ueber die Stickstoffausscheidung nach Leberexstirpation. Strassburg 1901. 8⁰.

K. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:
Bericht über die astrologischen Studien Tycho Brahe's. 1901. 4⁰.
Bericht über die Untersuchung der Gebeine Tycho Brahe's. 1901. 4⁰.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

52. Bericht über das Jahr 1900. 1901. 8⁰.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Časopis. Bd. 75 Heft 2, 3. 1901. 8⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnetische und Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1900. 61. Jahrg. 1901. 4⁰.

Verein für Geschichte der Deutschen in Prag:

Mitteilungen. 39. Jahrg. Heft 1—4. 1900. 8⁰.

Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos" in Prag:

Sitzungsberichte. Jahrg. 1900. N. F. Bd. 20. 1900. 8⁰.

Verein für Natur- und Heilkunde in Pressburg:

Verhandlungen. Bd. XXI (= N. F. XII). 1901. 8⁰.

Stadtarchiv in Pressburg:

Beiträge zur Geschichte der Medizin in Pressburg. Von D. Stephan von Vámossy. 1902. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Regensburg:

Berichte. VIII. Heft für das Jahr 1900. 1901. 8⁰.

Naturforscher-Verein in Riga:

Korrespondenzblatt. No. 44. 1901. 8⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Boletim mensal. Majo—Dezembro 1900. 1900—1901. 4⁰.
Annuario XVII. 1901. 8⁰.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Index to Vols 1, to 10, p. 1—209. 1900. 8⁰.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Serie V. Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. 10 semestre 1 fasc. 12 e Indice del volume; Vol. X semestre 2 fasc. 1—11. 1901. 4⁰.
Atti. Classe di scienze fisiche. Vol. I—III. 1895—1901. 4⁰.
Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. VII parte I: Memorie; Vol. IX parte 2: Notizie degli scavi 1901. Febbrajo — Ottobre. 1901. 4⁰.
Atti. Rendiconto dell' adunanza solenne del 2 Gingno 1901. 1901. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V. Vol. 10 fasc. 5 — 8. 1901. 8⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 54 (1900 — 1901). Sessione II—VII. 1901. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. 1901 No. 1, 2. gr. 8⁰.

Kaiserl. deutsches archäologisches Institut (röm. Abtlg.) in Rom:

Mitteilungen. Bd. XVI fasc. 2, 3. 1901. 8⁰.

K. italienische Regierung in Rom:

Le Opere di Galilei. Vol. XI. Firenze 1901. 4⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. 24 fasc. 1, 2. 1901. 8⁰.

Universität Rostock:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

Académie des sciences in Rouen:

Précis analytique des travaux. Année 1899/1900. 1901. 8⁰.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III. Vol. 7 fasc. 1, 2. 1901. 8⁰.

École française d'Extrême-Orient in Saigon:

Bulletin. Tom. 1 No. 1—3. Paris und Hanoi 1901. 4⁰.

Historischer Verein in St. Gallen:

Alfred Dobler, Erlebnisse eines Appenzellers in neapolitanischen Diensten, 1854—1859. 1901. 4⁰.

Missouri Botanical Garden in St. Louis:

XIIth annual Report. 1901. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Almanaque nautico para 1903. 1901. 4⁰.

Bosnisch-Herzegovinische Landesregierung in Sarajevo:

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Bosnien-Herzegovina im Jahre 1898. Wien 1901. 4⁰.

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Jahrbücher und Jahresberichte. 66. Jahrg. 1901. 8⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno 24 No. 6—11. 1901. 8⁰.

Stanford University in Stanford (California):

Contributions to Biology. No. XXIII—XXVI. 1901. 8⁰.

K. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademie in Stockholm:

Handlingar. Deel 33 Heft 1. 1901. 9⁰.
Månadsblad. Jahrg. 25, 1896; Jahrg. 29, 1900. 1901. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Lefnadsteckningar. Bd. 4 Heft 1, 2. 1901. 8⁰.
Meteorologiska iakttagelser i Sverige. Bd. 38 (= 2. Serie Bd. 24), 1896. 1901. 4⁰.
Handlingar. N. F. Bd. 33, 34. 1900—1901. 4⁰.
Bihang til Handlingar. Bd. 26 Teil 1—4. 1901. 8⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Bd. XXIII Heft 5, 6. 1901. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Bd. 35 Heft 6—9. 1901. 8⁰.

Universität Strassburg:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

K. württemberg. Kommission für die internationale Erdmessung in Stuttgart:

Relative Schweremessungen I. 1901. 8⁰.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Vierteljahreshefte für Landesgeschichte. N. F. 10. Jahrg. 1901 Heft 1—4. 1901. 8⁰.

K. württemberg. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Beschreibung des Oberamts Heilbronn. Teil 1. 1901. 8⁰.
Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde. Jahrg. 1900. Heft 1—3. 1901. 8⁰.

Geological Survey of New-South-Wales in Sydney:

The Mineral Resources of New-South-Wales by Edw. F. Pittmann. 1901. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:

Memoirs of the Geological Survey of New-South-Wales. Geology No. 2. 1901. 4⁰.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:

Abstract of Proceedings 1900/01. 8⁰.
Journal and Proceedings. Vol. 34. 1900. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Supplement der Mitteilungen. Japanische Mythologie von Karl Florenz. 1901. 8⁰.

Kaiserl. Universität Tokyo (Japan):

Calendar 1900/01. 8⁰.
The Journal of the College of Science. Vol. XIII, 4; Vol. XV, 2, 3 1901. 4⁰.
Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät. Bd. 5 No. 1. 1901. 4⁰.
The Bulletin of the College of Agriculture. Vol. IV, 4. 1901. 8⁰.

Kansas Academy of Science in Topeka, Kansas:

Transactions. Vol. XVII. 1901. 8⁰.

Canadian Institute in Toronto:

Transactions. Vol. VII part 1. August 1901. gr. 8⁰.

Royal Society of Canada in Toronto:

Proceedings and Transactions. II. Series. Vol. 6. 1900. 8⁰.

University of Toronto:

Studies. History, first Series. Vol. 5. 1901. 4⁰.

Université in Toulouse:

Annales du Midi. No. 49, 50. 1901. 8⁰.
Annales de la faculté des sciences. IIe Série. Année 1900. Tom. 2 fasc. 3, 4; Annèe 1901. Tom. 3. 1900/01. 4⁰.
Bibliothèque meridionale. Ie Série. Tom. 6; IId Série. Tom. 6. 1901. 8⁰.
Rey-Pailhade, Rôle du Philothion. Paris 1901. 8⁰.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XVI fasc 1. 1901. 8⁰.

Universität Tübingen:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 4⁰ und 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 36 disp. 6—9, 11—15. 1901. 8⁰.

R. Deputazione sopra gli studi di storia in Turin:

Historiae Patriae Monumenta. Vol. XIX. 1900. fol.

K. Universität Upsala:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1900—1901.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:

Prodromus florae Batavae. Vol. 1 pars 1. Nijmegen 1901. 8⁰.
Anteekeningen, 21. Juni 1901. 1901. 8⁰.
Verslag, 22. Juni 1901. 1901. 8⁰.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. V. Reeks. III. Aflev. 1. 1901. 8⁰.

Accademia di Scienze in Verona:

Atti. Serie IV. Vol. 1 fasc. 2. 1901. 8⁰.

Accademia Olimpica in Vicenza:

Atti. Annale 1899—1900. Vol. 32. 1900. 8⁰.

Mathematik-physikalische Gesellschaft in Warschau:

Prace matematyczno-fizyczne. Vol. XII. Warschau 1901. 4⁰.

Bureau of American Ethnology in Washington:

17. annual Report (1895—1896), part I und 18. annual (1896—1897), part I. 1898—1899. 4⁰.

Bureau of Education in Washington:

Report for the year 1899—1900. Vol. I. 1901. 8⁰.

U. S. Departement of Agriculture in Washington:

North American Fauna No. 20, 21. 1901. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Miscellaneous Collections No. 1258. 1901. 8⁰.
Annual Report for the year ending June 30. 1899. Part I, II. 1901. 8⁰.
Annals of the astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution. Vol. I. 1900. 4⁰.

Philosophical Society in Washington:

Bulletin. Vol. XIII und XIV, p. 1—166. 1900. 8⁰.

United States Geological Survey in Washington:

Bulletins. No. 163—176. 1900. 8⁰.
Monographs. No. 39, 40. 1900. 4⁰.
20th annual Report 1898—1899. Parts II—VII. 1900. 4⁰.
21th annual Report 1899—1900. Parts I, VI and VII continued. 1901. 4⁰.
Preliminary Report on the Cap Nom Gold Region Alaska. 1900. 8⁰.

Grossherzogliche Bibliothek in Weimar:

Verzeichnis der von Dr. Reinhold Köhler hinterlassenen Büchersammlung. 1901. 8⁰.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Mitteilungen der prähistorischen Kommission. I Bd. No. 5. 1901. 4⁰.
Sitzungsberichte.
Abtlg. I Bd. 109 Heft 7.
Abtlg. IIa Bd. 109 Heft 8, 9.
Abtlg. IIb Bd. 109 Heft 8—10. 1900. 8⁰.
Südarabische Expedition. Bd. II. 1902. 4⁰.
Fontes rerum Austriacarum. Abtlg. II v. Bd. 51 u. Reg. zu Bd. 1—50. 1901. 8⁰.
Almanach. 50. Jahrg. 1900. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrg. 1900. Bd. 50 Heft 4; Jahrg. 1901. Bd. 51 Heft 1. 4⁰.
Verhandlungen 1901 No. 7—14. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift 1901 No. 27—52; 1902 No. 1. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mitteilungen. Bd. 31 Heft 1—5. 1901. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Bd. 51 Heft 5—8. 1901. 8⁰.
Abhandlungen. Bd. 1 Heft 1, 2. 1901. 4⁰.
Die Schwalbe, Berichte der ornitholog. Beobachtungsstationen. N. F. II. 1900/01. 4⁰.

K. K. militärgeographisches Institut in Wien:

Die astronomisch-geodätischen Arbeiten. Bd. VII. 1901. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. XV No. 3—4. 1900. 4⁰.

K. K. Universität Wien:

Schriften aus dem Jahre 1900/01 in 8⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. 41. Bd. 1900/01. 1901. 8⁰.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 54. 1901. 8⁰.

Ortsverein für Geschichte und Altertumskunde in Wolfenbüttel:

Braunschweigisches Magazin. Jahrg. 1900. 4⁰.

Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:

Archiv. Bd. 43. 1901. 8⁰.
Jahresbericht für 1900. 1901. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahersschrift. 46. Jahrg. 1901 Heft 1, 2. 1901. 8⁰.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde. N. F. Bd. III 1901 No. 1—3. 1901. gr. 8⁰.
9. Jahresbericht 1900. 1901. 8⁰.
Robert Durrer, Die Kunst- und Architekturdenkmäler Unterwaldens. Bogen XI. 1901. 4⁰.
J. R. Rahn, Zur Statistik schweiz. Kunstdenkmäler. Bogen 12.

———

*

Von folgenden Privatpersonen:

Prinz Albert I. von Monaco:

Résultats des campagnes scientifiques. Fasc. 19, 20, avec les cartes III, V et VI. 1901. fol.

Verlagsbuchhandlung von Johann Ambrosius Barth in Leipzig:

Beiblätter zu den Annalen der Physik. Bd. 25 Heft 8—12. 1901. 8⁰.

Verlagsbuchhandlung Hermann Böhlaus Nachfolger in Weimar:

Zeitschrift für Rechtsgeschichte. Bd. XXII. (Roman. u. german. Abteilung.) Weimar 1901. 8⁰.

Julius Wilhelm Brühl in Heidelberg:

Roscoe-Schorlemmer's Ausführliches Lehrbuch der Chemie. Bd. VIII Teil 6; Bd. IX. Braunschweig 1901. 8⁰.

Ulysse Chevalier in Paris:

Oeuvres historiques. Tom. 2. Valence 1900. 8⁰.
Bibliothèque patrologique I. Paris 1900. 8⁰.
Bibliothèque liturgique. Tom. V, 2; Tom. VI, VII. 1900. 8⁰.

Margarites G. Dimitsas in Athen:

Ὁ πολιτισμὸς τῆς ἀρχαίας Ἑλλάδος. Athen 1902. 8⁰.

Verlagsbuchhandlung Ferd. Dümmler-Berlin:

Naturwissenschaftliche Wochenschrift. Bd. XVI Heft 7—9. 1901. fol. (Fortsetzung siehe „Fischer-Jena".)

Verlagsbuchhandlung Gustav Fischer in Jena:

Naturwissenschaftliche Wochenschrift. Bd. XVII No. 1—14. Jena. fol.

Magistrat der Stadt Mainz:

Gutenberg-Fest zu Mainz im Jahre 1900. 4⁰.

Albert Gaudry in Paris:

Sur la similitude des dents de l'homme et de quelques animaux. Paris 1901. 8⁰.

Karl Gegenbauer in Heidelberg:

Vergleichende Anatomie der Wirbeltiere. Bd. II. Leipzig 1901. 8⁰.

Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft in Berlin:

C. Arldt, Elektrische Kraftübertragung. 1901. 8⁰.

Madame J.-B.-A. Godin in Guise (Aisne):

Le Dovoir. Tom. 25. 1901. Juillet—Décembre. 8⁰.

L. Grünenwald in Speier:

Beiträge zur Urgeschichte der Pfalz. Speier 1901. 8⁰.

Ernst Haeckel in Jena:

Kunstformen der Natur. Liefg. VI. Leipzig 1901. fol.

G. N. Hatzidakis in Athen:

Ἔλεγχοι καὶ κρίσεις. 1901. 8⁰.
Γλωσσολογικαὶ μέλεται. Athen. Tom. 1. 1901. 8⁰.

Gideon Max Hirsch in Breslau:

Chronologische Reformen. 1901. 8⁰.

F. Imhoof-Blumer in Winterthur:

Kleinasiatische Münzen. Bd. I. Wien 1901. 4⁰.

Alexander von Kalecsinsky in Budapest:

Ueber die ungarischen warmen und heissen Kochsalzseen. 1901. 8⁰.

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. Bd. 10 Heft 3 und 4. Leipzig 1901. 8⁰.

Ugo Levi in Venedig:

I monumenti più antichi del dialetto di Chioggia. 1901. 8⁰.
E. Liesegang und V. Friese, Magdeburger Schöffensprüche. Berlin 1901. I. 8⁰.

Chr. Mehlis in Neustadt a/H.:

Die Schuhleistenkeile der neolithischen Zeit. 1901. 8⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. XXVIᵉ année, tom. 77. I. II. (Septembre—Décembre 1901.) Paris. 8⁰.

Chr. V. Nielsen in Kopenhagen:

Albrecht Dürer. 1895. 4⁰.
Filippo Brunellesco. 1896. 4⁰.
Leonardi da Vinci. 1897. 4⁰.
Den Venetianske Scole. 1898. 4⁰.
Nicolas Poussin. 1899. 4⁰.
Berómte Kunstnerne 1901. 4⁰.

G. Omboni in Venedig:

Dents di Lophiodon. 1901. 8⁰.

André Poéy in Paris:

Nouvelle conception de l'ovule. 1901. 8⁰.
La place de la mésologie dans la hiérarchie encyclopédique. 1901. 8⁰.

Oswald J. Reichel in Lympstone (England):

The Devonshire „Domesday“ IV—VI. 1898—1901. 8⁰.
Extracts from the Pipe Rolls of Henry II. Relating to Devon. 1897. 8⁰.

Verlagshandlung Dietrich Reimer in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische und ozeanische Sprachen. 5. Jahrg. 4. Heft. 1900. 4⁰.

Adolf Roemer in Erlangen:

Studien zu Aristophanes. Leipzig 1902. 8⁰.

Lucian Schermann in München:

Orientalische Bibliographie. XIV. Jahrg. 1. Halbjahresheft, Liefg. 1, 2. Berlin 1901. 8⁰.

Verlagshandlung Seitz & Schauer in München:

Deutsche Praxis. 10. Jahrg. No. 13—24. München. 8⁰.

Verlagshandlung B. G. Teubner in Leipzig:

Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe, Bd. I Heft 3 und 4. Leipzig 1901. gr. 8⁰.
Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. IV, 1 Heft 1; Bd. II, 2 Heft 1. Leipzig 1901. 8⁰.
Thesaurus linguae latinae. Vol. II fasc. 1, 2; Vol. I fasc. 3. Leipzig 1901. 4⁰.

A. Thieulleu in Paris:

Deuxième étude sur les pierres figures. 1901. 8⁰.
Varia. Os travaillés à l'époque de Chelles. 1901. 4⁰.

Otto Walkhoff in München:

Mikrophotographischer Atlas der pathologischen Histologie menschlicher Zähne. Text und Atlas. Stuttgart 1897. fol.

N. Wecklein in München:

Euripidis fabulae. Vol. I. Pars 3 et 5. Lipsiae 1901. 8⁰.

Boris Weinberg in Odessa:

† P. Passalsky, Anomalies magnétiques dans la région des mines de Krivöi-Rog. 1901. 4⁰.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1901. Heft I.

München.

Verlag der k. Akademie.

1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).



Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1901. Heft II.

München.
Verlag der k. Akademie.
1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).



Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1901. Heft III.

München.
Verlag der k. Akademie.
1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).



Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

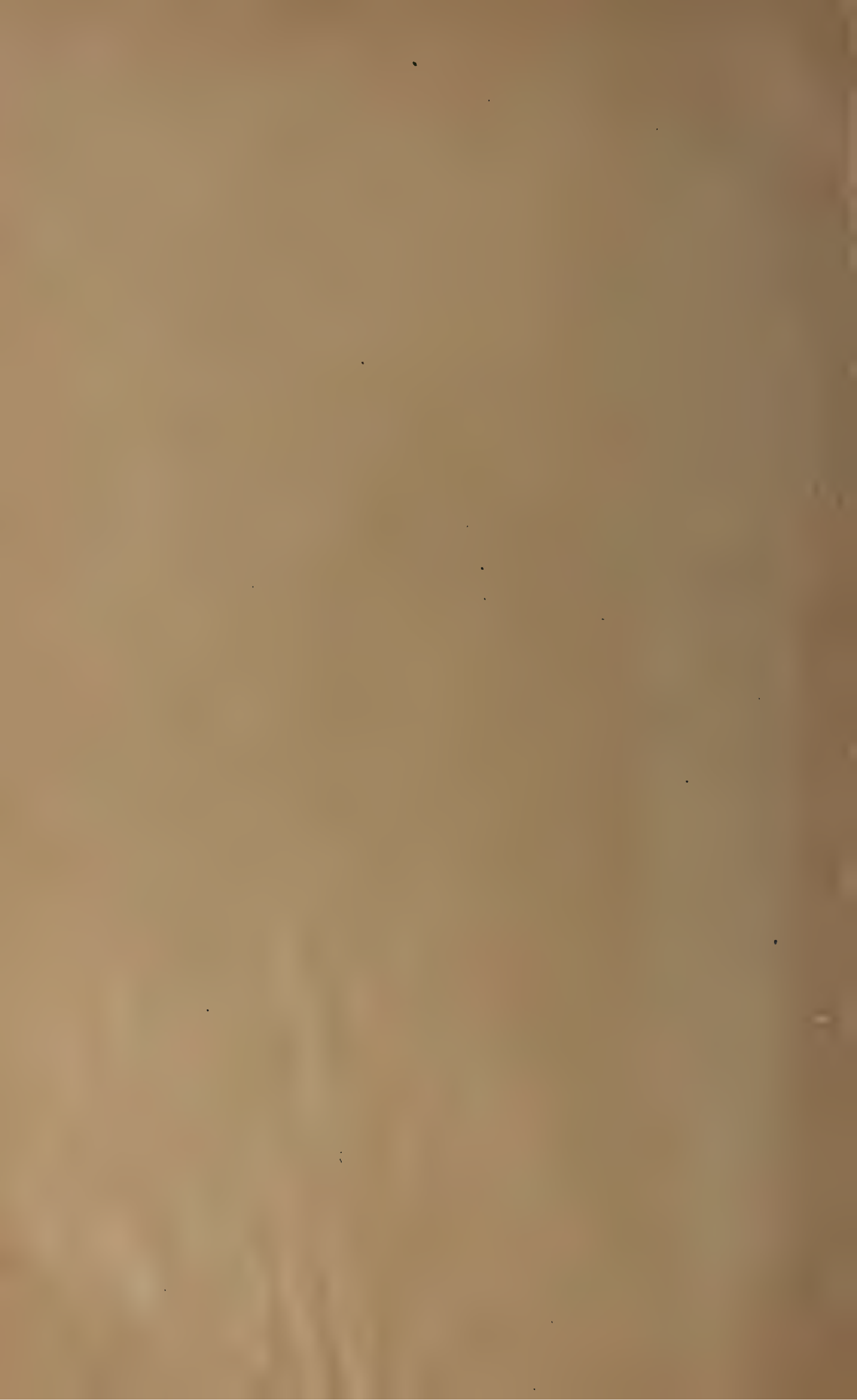
k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1901. Heft IV.

München.
Verlag der k. Akademie.
1902.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).





Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen werden in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 9. November 1901.

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 16. November 1901.

Sitzung vom 7. Dezember 1901.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.



Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen werden in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 6. Juli 1901.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.



Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen werden in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.



Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen werden in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 5. Januar 1901.

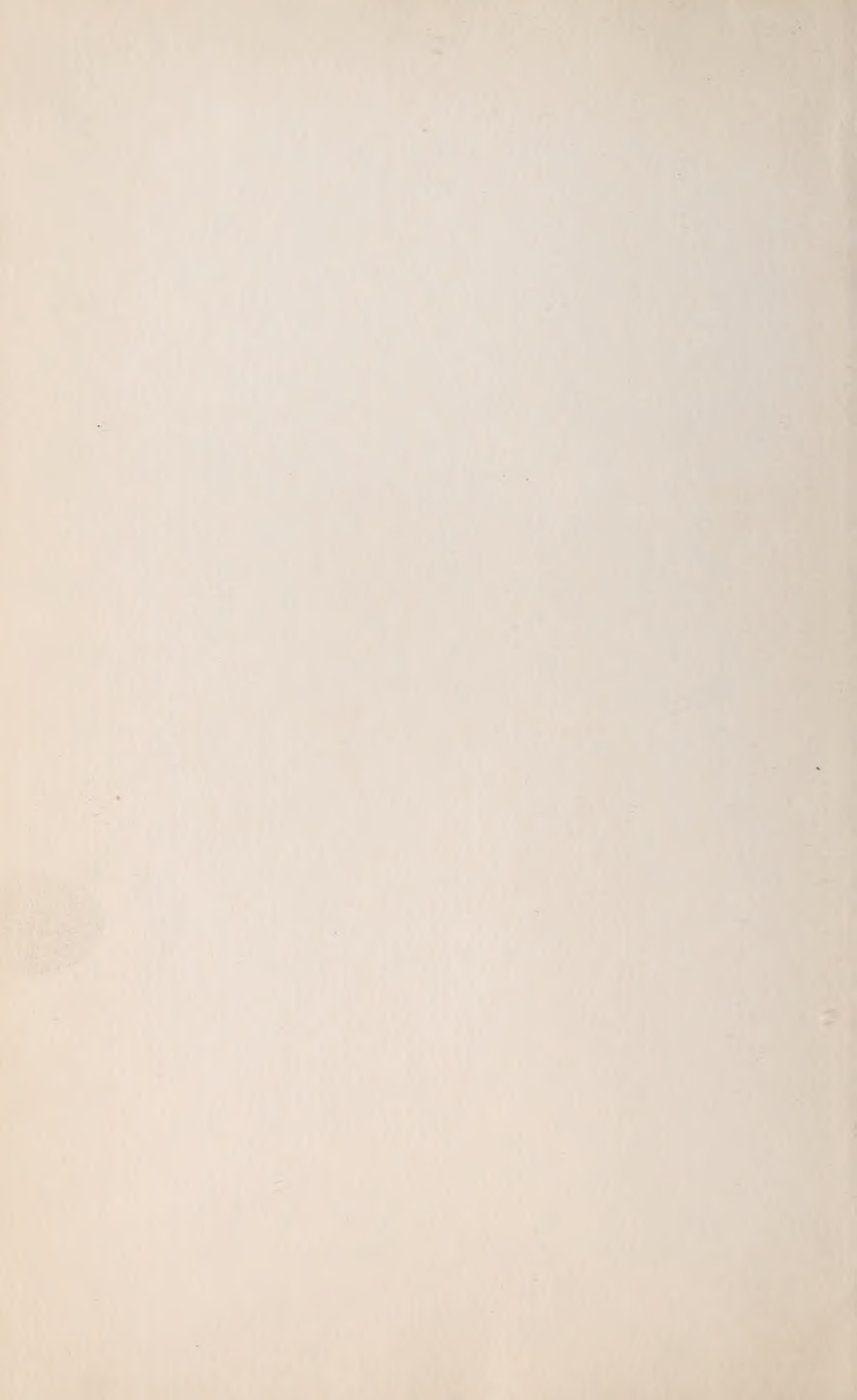
Sitzung vom 9. Februar 1901.

Sitzung vom 2. März 1901.

Oeffentliche Sitzung zur Feier des 80. Geburtstages Seiner Königlichen Hoheit des Prinzregenten, sowie des 142. Stiftungstages der Akademie am 13. März 1901.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.








AMNH LIBRARY
100229644